9. ULUSAL HAVACILIK VE UZAY KONFERANSI **UHUK-2022-136**
14-16 Eylül 2022, İzmir Ekonomi Üniversitesi, İzmir

LİNEER OLMAYAN MEKANİK BİR SİSTEMİN DAVRANIŞININ MODELLENMESİ VE DOĞRULUK DERECESİ YÜKSEK SONUÇLAR İÇİN ÇÖZÜM ÖNERİLERİ

Esra Demir*, İbrahim Özkol†
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ÖZET

Mekanik bir sistemin yüksek doğrulukta modellenmesi, mühendisler için oldukça önemli bir konudur. Tasarımcının, ortaya koyduğu modelin doğru matematik ifadesini elde etmesi ve elde edilen denklemleri uygun başlangıç ve sınır şartları altında, yüksek doğrulukta çözdüğünden emin olması gerekmektedir. Elde edilen sonuçların bir simülasyon ortamında denenmesi, çözümün başarılı olması kadar, sistemin istenilen misyonu ve görevi yerine getirebileceğinin anlaşılması açısından mühimdir. Bu sayede, tasarımcı hem sistemin isterleri sağlayıp sağlamadığını kontrol eder hem de herhangi bir başarısızlık riskini azalttığı için maaliyette belirgin bir düşüş sağlar. Bahsi geçen bu durumların gösterilmesi için Lotka-Volterra, Chen ve Lorenz gibi basit sistemler ele alınmış ve çeşitli diferansiyel denklemler için çözüm örnekleri verilmiştir. Hassasiyet ve doğruluk derecesini test etmek için lineer olmayan ikili sarkaç problemi üzerine çalışılmıştır. Lineer olmayan sistemlerin hareket denklemlerinin çözüm yöntemleri, analitik, yarı-analitik nümerik ve nümerik olabilir. Bu metotlardan yaygın olanları Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DTM) ve Çok Adımlı Diferansiyel Dönüşüm Metodu (MsDTM)'dur. Her çözüm yönteminde ıraksama, ayrıklaştırmadan kaynaklanan hatalar bulunur. Bu hatalar ise sistemin çalışma süresi boyunca birikerek devam eder. Birikmeden dolayı modelin analizinde yanlış veya gerçeği tam yansıtmayan sonuçlar elde edilebilir. Bu sebeple, çalışma kapsamında bir modelin çözümlemesinde kullanılabilecek Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Çok-Adımlı Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi açıklanmış, seçilen sistemler üzerinde uygulanmış ve sonuçların karşılaştırması verilmiştir. Çözümlerin doğrulanması için ise, seçilen tüm sistemlerin dördüncü dereceden Runge-Kutta sonuçları referans olarak kullanılmıştır. Böylelikle bu çalışmada, tasarımcının elindeki sistemin en doğru sonucu verecek şekilde çözebilmesi için kullanılabileceği yöntem önerileri sunulmuştur.

*Araştırma Görevlisi, Savunma Tek. Böl., E-posta: demire15@itu.edu.tr
†Prof. Dr., Uçak Müh. Böl. E-posta: ozkol@itu.edu.tr

GİRİŞ

Mekanik bir sistemin matematik modelinin analizi için, bu sistemin davranışını ifade eden, yüksek mertebeden ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin uygun metotlar ile çözülmesi gerekmektedir. Bu yöntemler nümerik, analitik ve yarı-analitik nümerik olabilir [Hatami, Ganji ve Sheikholeslami, 2016]. Nümerik çözümler, sistemin asıl cevabına yaklaşık bir sonuç elde edilmesini sağlarken, analitik çözümler çoğunlukla sistemin tam çözümünü verir. Bu durumda, analitik çözümlerin gerçeğe daha yakın sonuçlar vereceği söylenebilir, ancak, modellemesi yapılan mekanik sistemin ve dolayısıyla bu sistemi ifade eden diferansiyel denklemlerin karmaşıklaşması ile analitik çözüm zorlaşır. Yeterli hassasiyete sahip nümerik çözümlerin kullanılması, elde edilen sonuçların gerçek veriler ile birebir örtüşmemesine rağmen mühendislik açısından yeterli olabilir. Bu çalışma kapsamında, analitik bir çözüm yöntemi olarak Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DTM, Differential Transform Method), yarı-analitik nümerik çözüm yöntemi olarak Çok Adımlı Diferansiyel Dönüşüm Metodu (MsDTM, Multi-Step Differential Transformation Method) ele alınacaktır.

Analitik çözüm yöntemlerinden biri olan DTM, Taylor serisi çözümüdür ve lineer olmayan yüksek mertebeden diferansiyel denklemlere, denklemlerde herhangi bir lineerleştirme ya da ayrıklaştırma gerektirmeden uygulanabilir. Böylelikle çözümlerde, bu sebeplerden kaynaklanan bir hata gözlemlenmez. Ancak DTM, aslında kesilmiş (Truncated) bir Taylor serisi açılımı olduğu için, çözümün belli bir aşamasından sonra, eğer problem oldukça lineer olmayan ifadelere sahip ise, ıraksama ortaya çıkar. Özellikle zamana bağlı sistemler için, DTM'in, gerçek değerlere yakınsama aralığı oldukça düşüktür.

DTM ilk olarak elektrik devrelerindeki lineer ve lineer olmayan sistemlerin diferansiyel denklemlerinin çözümünde Zhou tarafından kullanılmıştır [Zhou, 1986]. Bununla birlikte, diferansiyel ve integral denklemlerinin çözümü [Moharir ve Patil, 2012], integro-diferansiyel denklemlere uygulanması [George ve Sivakumar, 2019], lineer olmayan ve osilasyona sahip sistemlerin çözümlemesi [El-Shahed, 2008], lineer olmayan ısı geçiş problemlerinin çözümü [Torabi ve Yaghoobi, 2012], fark denklemlerinin [Arıkoğlu ve Özkol, 2006] ve diferansiyel fark denklemlerinin çözümü [Arıkoğlu ve Özkol , 2006] gibi örnekleri de mevcuttur.

DTM'deki ıraksama sorununu ortadan kaldırmak için çeşitli yöntemler kullanılmaktadır ve Laplace dönüşümü-Pade yaklaşımınının DTM ile birleştirilmesi sıklıkla kullanılan metot olarak örnek verilebilir. Bir diğer örnek ise, bu çalışmada ele alınan, DTM'in geliştirilmiş hali olarak tanımlanan ve özellikle mekanik sistemlerin zamana bağlı diferansiyel denklem takımlarının çözümlerinde tercih edilen MsDTM'dir. Diferansiyel denklemlere MsDTM uygulanması ile, sistem belli bir adım sayısına bölünür ve bölünen her bir aralık DTM ile çözülerek bu aralığı temsil eden fonksiyon bulunur. Böylelikle, DTM çözümüyle elde edilen ve gerçek değere yakın sonuç veren zaman aralığı, MsDTM'in uygulanması sayesinde artar. Ancak, bu yöntem, sistemin zaman adımlarına bölünmesi sebebi ile nümerik özellik kazanır ve sonuçta ayrıklaştırmaya bağlı hata oluşumu başlar. MsDTM'in uygulamaları, kaotik ve kaotik olmayan sistemlerde [Odibat, Bertelle, Aziz-Alaoui ve Duchamp, 2010], lineer olmayan değişken gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde [Benhammouda ve Vazquez-Leal, 2016], lineer olmayan osilasyonlu sistemlerde [Ertürk, Odibat ve Momani, 2012] ve akış problemlerinde [Keimanesh, Rashidi, Chamkha ve Jafari, 2011] görülmektedir.

Bu çalışmada, DTM, MsDTM ve Runge Kutta yöntemi; Lotka-Volterra sistemi, Chen sistemi ve Lorenz sistemi için uygulanmış ve çeşitli diferansiyel denklemler bu yöntemler kullanılarak çözülmüştür. DTM ve MsDTM kullanılarak bulunan değerler, Runge-Kutta yöntemini referans kabul ederek kıyaslanmıştır. Ayrıca, bu yöntemler, oldukça lineer olmayan sistemlerdeki sonuçları da görmek için ikili sarkaç problemine uygulanmıştır. Sonuç olarak, hangi metodun matematik modelin çözümlenmesinde uygun olduğu hakkında yorum yapılmıştır.

ÇÖZÜM METOTLARI

Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DTM)

DTM ile, sistemi tanımlayan fonksiyonların kesilmiş (Truncated) Taylor serisi açılımları elde edilmektedir. Bu çözüm fonksiyonlarının polinom mertebelerinin artması ile DTM'den elde edilen sonuçların, gerçek değerlere yakınsaması artmaktadır, ancak bununla birlikte sistemin çözüm süresi uzamaktadır.

$f(x)$, D alanında tanımlı analitik bir fonksiyon ve x_0 ise bu alandaki herhangi bir nokta olarak alınsın. Bu fonksiyonun bir x_0 noktasındaki Taylor serisi açılımı Denklem 1'de verildiği gibi olur.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_i)^k}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \qquad \forall x \in D \tag{1}$$

Denklem 1'den faydalanarak $f(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $F(k)$,

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \tag{2}$$

Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun eşiti Denklem 3'de verildiği gibi bulunur.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k) \left(x-x_i\right)^k \tag{3}$$

Bir sistemin davranışını temsil eden diferansiyel denklemlerin çözülmesi için, bu denklemlerin her bir teriminin diferansiyel dönüşümü elde edilir. Bu terimlerin dönüşümünde kullanılabilecek formüller Tablo-1'de özetlenmiştir.

Table 1: Fonksiyonların Diferansiyel Dönüşümleri

Kural Numarası	**Fonksiyon**	**Diferansiyel Dönüşümü**
1	$f(x) = u(x) \pm v(x)$	$F(k) = U(k) \pm V(k)$
2	$f(x) = c.u(x)$	$F(k) = c.U(k)$
3	$f(x) = \frac{d^m u(x)}{dx^m}$	$F(k) = (k+1)(k+2)...(k+m)U(k+m)$
4	$f(x) = u(x).v(x)$	$F(k) = \sum_{l=0}^{k} U(l)V(k-l)$
5	$f(x) = x^m$	$F(k) = \delta(k-m)$
6	$f(x) = sin(\alpha x)$	$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k} \sin\left(\sum_{r=0}^{\infty} Y(r)t^r\right)\right]$
7	$g(x) = cos(\alpha x)$	$G(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k} \cos\left(\sum_{r=0}^{\infty} Y(r)t^r\right)\right]$
8	$f(x) = u(x).v(x).w(x)$	$F(k) = \sum_{s=0}^{k} \sum_{m=0}^{k-s} U(s)V(m)W(k-s-m)$

Başlangıç koşullarının uygulanması ile, sistemi temsil eden denklemlerin dönüşümlerinin değerleri, yani $F(0), F(1), ..., F(k)$, hesaplanır ve sonuç olarak davranışı temsil eden denklemlerin dönüşümü, Denklem 3 kullanılarak elde edilir.

Ancak, tasarlanan sistemin mekanik bir sistem olduğu kabul edilirse, bu sistemin hareketini temsil eden diferansiyel denklemler zamana bağlı olarak değişir. DTM'in ise zamana bağlı değişen sistemlerde yeteri kadar iyi sonuç vermediği [Odibat, Bertelle, Aziz-Alaoui ve Duchamp, 2010] yapılan hesaplamalar sonrasında elde edilen grafiklerde (UYGULAMALAR VE DEĞERLENDİRME bölümünde verilmiştir.) görülmektedir. Bu çalışmada da verilecek örnek sistemlerde çok küçük zaman aralıklarında gerçek değerlere yakın sonuçlar elde edilirken, bu sonuçların zaman arttıkça ıraksadığı görülmüştür. Bu sebeple zamana bağlı fonksiyonların çözümünde DTM tercih edilmemektedir. Bunun yerine, hibrit çözümler ya da özellikle zamana bağlı sistemler için MsDTM önerilmektedir.

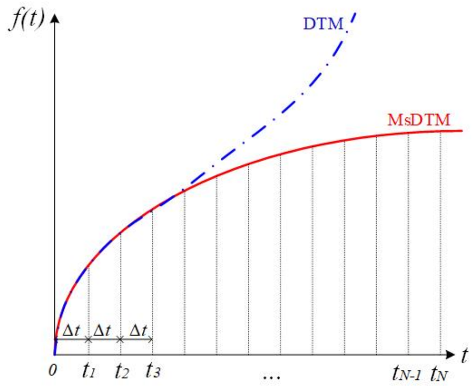
Çok Adımlı Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (MsDTM)

MsDTM yönteminde, sistemin davranışının göz önüne alındığı zaman aralığı, zaman adımlarına bölünerek çözüm yapılır. Yani sistemin inceleneceği süre (T), seçilen adım sayısına (N) bölünerek zaman aralığı (Δt) hesaplanır. Her Δt aralığında ise, bu aralıktaki davranışı temsil eden fonksiyonun DTM çözümü yapılır. Böylelikle, çözüm sonucunda N tane fonksiyonu temsil eden kesilmiş Taylor serisi açılımı ile verilen sisteme ulaşılır yani sistemin incelenmek istenen herhangi bir t_i anı için, bu ana karşılık gelen fonksiyon kullanılmalıdır. Denklem 4'de bir $u(t)$ fonksiyonunun N tane farklı fonksiyona bölünmüş hali verilmiştir. Herbir $u_n(t)$ fonksiyonunun hesaplanması ise denklem 5'de gösterilmiştir.

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [0, t_1] \\ u_2(t), & t \in [t_1, t_2] \\ & \cdots \\ u_N(t), & t \in [t_{N-1}, t_N] \end{cases} \tag{4}$$

$$u_n(t) = \sum_{n=0}^{k} U_n \left(t - t_{n-1}\right)^n \tag{5}$$

Bu yöntemde dikkat edilmesi gereken, her fonksiyonun başlangıç koşulunun, bir önceki zaman aralığını temsil eden fonksiyondan elde edilmesi gerektiğidir. Yani bir $u_{(n-1)}(t)$ fonksiyonun geçerli olduğu zaman aralığı $[t_{(n-2)}, t_{(n-1)}]$ ise, $u_{(n-1)}(t_{(n-1)})$ ifadesi, bir sonraki adımın başlangıç koşullunu, $u_{(n-1)}(t_{(n-1)}) = u_n(t_{(n-1)})$, verir.



Şekil 1: DTM-MsDTM Karşılaştırma

Şekil 1'de, örnek sistemlerin grafiklerinin incelenmesinin ardından elde edilen ve zamana bağlı değişen bir $f(t)$ fonksiyonu için DTM ve MsDTM ile hesaplanan temsili gösterimi verilmiştir. Öncesinde de bahsedildiği gibi, DTM'in kısa bir zaman aralığında uygun sonuçlar verirken ardından beklenilen değerlerden saptığı, ancak MsDTM'in beklenildiği gibi bir davranış gösterdiği görülmektedir.

YÖNTEM

Bu çalışmada, öncelikle, örnek sistem ve problemlerin DTM ve MsDTM kullanılarak çözümlemesi yapılmıştır. Bu amaçla, çözümlerin ve istenilen dönüşümlerin hesaplaması için MATLAB kullanılmış, böylelikle sistemi temsil eden fonksiyonlar elde edilmiş ve aynı dönüşümler kullanılarak MsDTM için, her aralıktaki fonksiyonlar hesaplanmıştır. Sonuçların elde edilmesinin ardından ise, MATLAB kullanılarak, her sistemin ve problemin DTM ve MsDTM çözümleri, aynı zamanda Runge Kutta çözümü ile elde edilen referans sonuçlar aynı grafik üzerinde çizdirilmiştir. Böylelikle DTM ve MsDTM çözümlerinden hangisinin daha uygun sonuç verdiği ve bu yöntemlerin uygunluk limitleri belirlenmiştir. Ardından ise, daha karmaşık bir sistem olarak ikili sarkaç modellenmiş ve DTM-MsDTM ve Runge-Kutta karşılaştırılması verilip en uygun çözüm yönteminin değerlendirilmesi yapılmıştır.

UYGULAMALAR VE DEĞERLENDİRME

Lotka-Volterra sistemi, Chen ve Lorenz kaotik sistemleri başta olmak üzere farklı tip diferansiyel denklemlerin DTM-MsDTM-RK çözümleri ve bu çözümlerin grafikleri verilecektir. Ardından, MsDTM'in lineer olmayan sistemlerde (örneğin hava araçları) kullanımının uygunluğunu yorumlamak için, mekanik bir sistem olarak ikili sarkaç probleminin çözümü yapılacaktır ve sonuçları karşılaştırmalı olarak grafikler ile verilecektir.

Nümerik Örnekler

Lotka-Volterra Sistemi: Lotka-Volterra sistemi denklem 6 ve 7'de verildiği gibi lineer olmayan, birinci dereceden bir diferansiyel denklem takımı ile temsil edilmektedir.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(t)(a - by(t)) \tag{6}$$

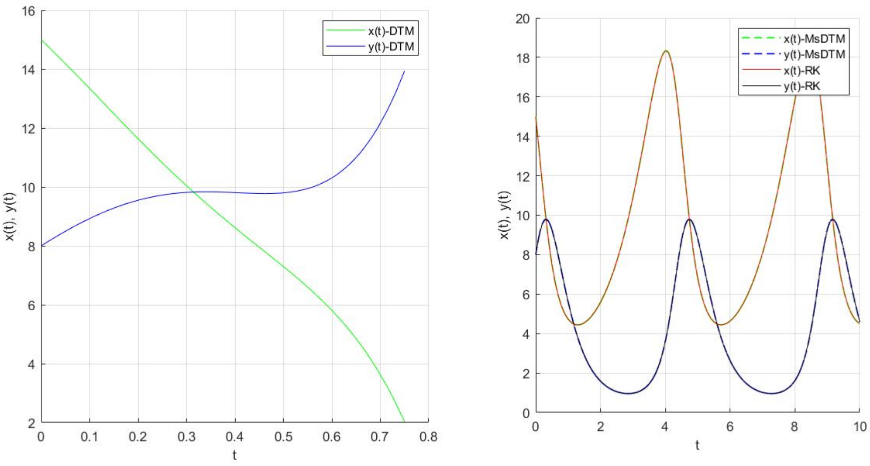
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y(t)(c - \mathrm{d}x(t)) \tag{7}$$

Verilen denklem takımının çözümünü yaparken Tablo-1'deki kurallar kullanılır. Böylelikle denklem 8-9'daki dönüşüm denklemleri elde edilir.

$$(k+1)X(k+1) = aX(k) - b\sum_{l=0}^{k} X(l)Y(k-l) \tag{8}$$

$$(k+1)Y(k+1) = -cY(k) + d\sum_{l=0}^{k} X(l)Y(k-l) \tag{9}$$

Elde edilen dönüşüm denklemleri (Denklem 8-9) ve başlangıç koşulları kullanılarak, MATLAB programı ile DTM ve MsDTM çözümleri hesaplanmıştır. Böylelikle, $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları Şekil 2'deki gibi çizdirilmiştir. Şekil 2-a'da, yalnıza DTM çözümü verilmiş ve çok kısa bir aralıktan sonra ıraksama olduğu gösterilmiştir. Şekil 2-b'de ise, MsDTM çözümü ile RK çözümü aynı grafikte çizdirilerek MsDTM'in gerçeğe oldukça yakın sonuç verdiği sonucuna ulaşılmıştır.



Şekil 2: Lotka-Volterra Sistemi a) DTM, b) MsDTM ve RK Çözümleri

Chen Sistemi: Chen sistemi lineer olmayan birinci dereceden denklem takımını içerir.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(y - x) \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (c - a)x - xz + cy \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - bz \tag{12}$$

Bu denklemlere diferansiyel dönüşüm uygulanır ve denklem 13-14-15'de verilen sonuçlara ulaşılır.

$$(k+1)X(k+1) = aY(k) - aX(k) \tag{13}$$

$$(k+1)Y(k+1) = (c-a)X(k) - \sum_{l=0}^{k} X(l)Z(k-l) + cY(k) \tag{14}$$

$$(k+1)Z(k+1) = \sum_{l=0}^{k} X(l)Y(k-l) - bZ(k) \tag{15}$$

Başlangıç koşullarının da uygulanması ile MATLAB'de elde edilen grafikler şekil 3'de verilmiştir. Şekil 3-a'da DTM ile çözdürülen ve $0.12sn$ gibi kısa bir sürede ıraksayan fonksiyon grafikleri gösterilmiştir. Ardından MsDTM çözümü yapılmış, bu sonuçlar ile RK çözümünden elde edilen sonuçlar aynı grafik üzerinde gösterilmiştir. Sonuçların neredeyse aynı olduğu görülmektedir.

Lorenz Sistemi: Lorenz sistemi de Chen sistemine benzer diferansiyel denklem takımına sahiptir.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(y - x) \tag{16}$$

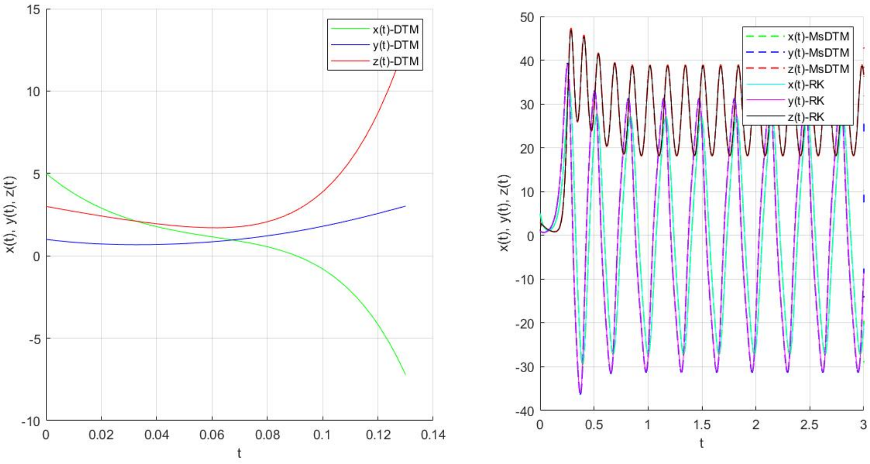
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cx - xz - y \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - bz \tag{18}$$

Tablo 1'deki dönüşüm kuralları uygulanır.

$$(k+1)X(k+1) = aY(k) - aX(k) \tag{19}$$

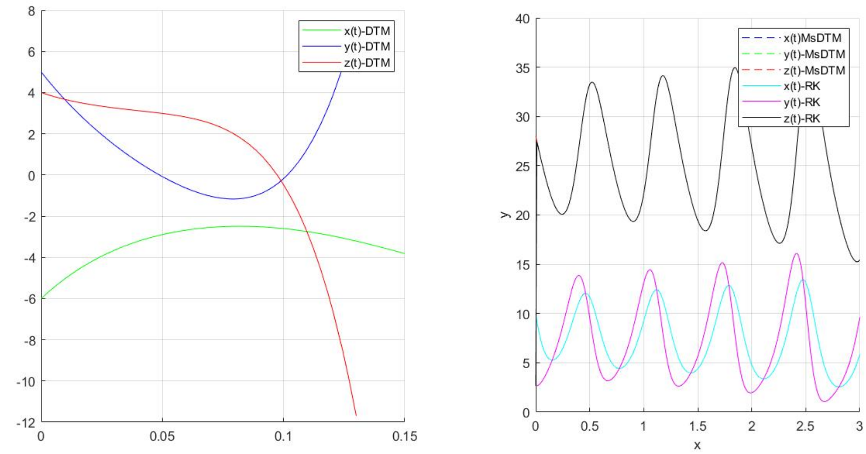
$$(k+1)Y(k+1) = cX(k) - \sum_{l=0}^{k} X(l)Z(k-l) + Y(k) \tag{20}$$



Şekil 3: Chen Sistemi a) DTM, b) MsDTM ve RK Çözümleri

$$(k+1)Z(k+1) = \sum_{l=0}^{k} X(l)Y(k-l) - bZ(k) \tag{21}$$

Şekil 4'de MATLAB kullanılarak elde edilen sonuçlar verilmiştir. Bu denklem takımında da MsDTM'in Runge Kutta çözümü ile örtüştüğü, ancak DTM'in ıraksadığı görülmektedir.



Şekil 4: Lorenz Sistemi a) DTM, b) MsDTM ve RK Çözümleri

Örnek Diferansiyel Problem 1: Diferansiyel denklem ve bu denklemin dönüşümü denklem 22-23'de verilmiştir.

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y + \epsilon y^3 = 0 \tag{22}$$

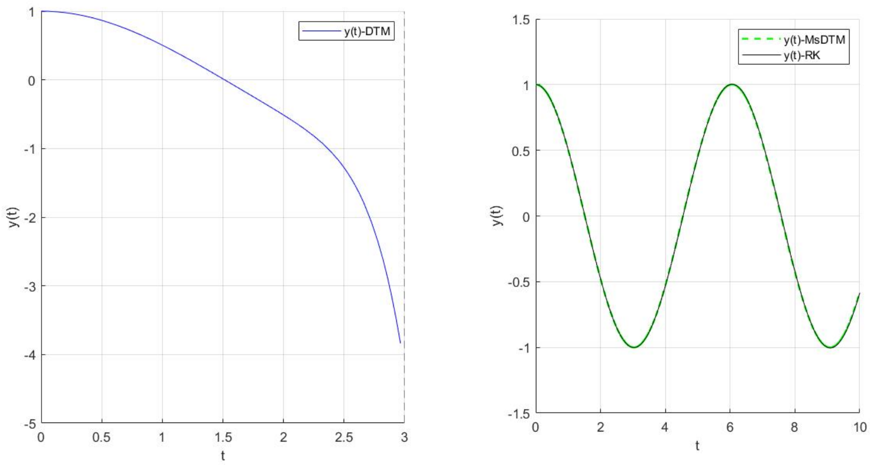
$$(k+1)(k+2)Y(k+2) + Y(k) + \varepsilon \sum_{s=0}^{k} \sum_{m=0}^{k-s} Y(s)Y(m)Y(k-s-m) = 0 \tag{23}$$

Denklem, MATLAB kullanılarak çözdürüldüğünde bulunan fonksiyon şekil 5'de verilmiştir.

Şekil 5 incelendiğinde, yine önceki sonuçlara benzer şekilde DTM'in ıraksadığı ve MsDTM'in RK referans sonuçlarına benzer sonuç verdiği görülür.

Örnek Diferansiyel Problem 2: Diferansiyel denklem ve bu denklemin dönüşümü denklem 24-25 ile verilmiştir.

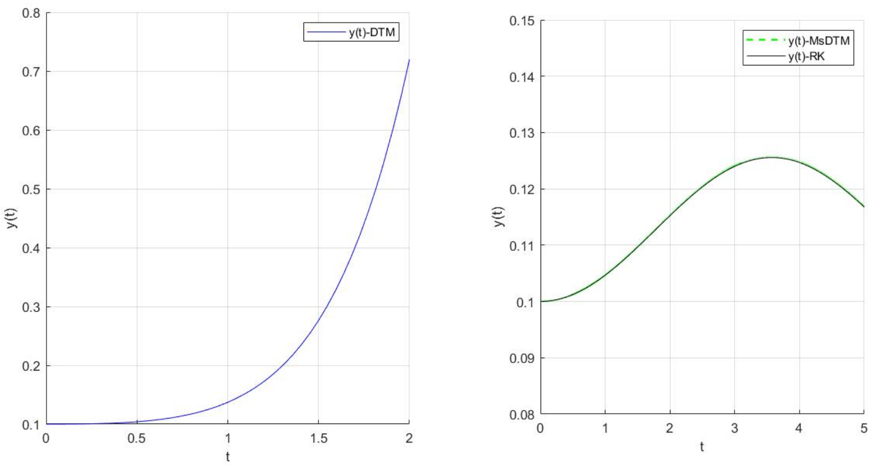
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = a + by^2 \tag{24}$$



Şekil 5: Örnek Dif. Problem 1 a) DTM, b) MsDTM ve RK Çözümleri

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)+Y(k)=a+b\sum_{l=0}^{k}Y(l)Y(k-l) \tag{25}$$

Denklem MATLAB programı kullanılarak çözdürülmüş ve grafiği çizilmiştir. Grafikte yine benzer şekilde MsDTM'in doğru sonuçları verdiği görülmektedir.



Şekil 6: Örnek Dif. Problem 2 a) DTM, b) MsDTM ve RK Çözümleri

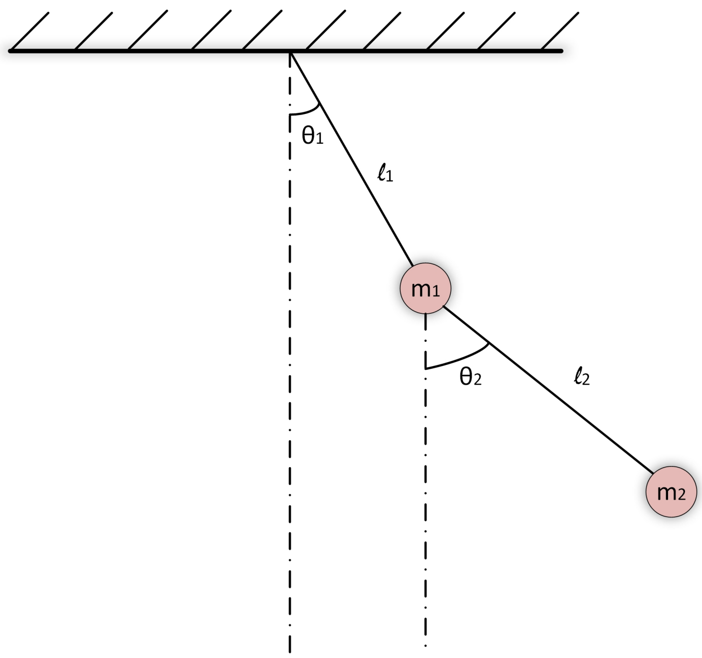
İkili Sarkaç Problemi

Bu çalışmada bahsedilen durumların mekanik bir sistemde gösterilebilmesi için bir ikili sarkaç problemi incelenmiştir. Şekil 7'de verilen sisteme dışarıdan herhangi bir kuvvet uygulanmamış, yalnıza başlangıç açıları olarak θ_1 ile θ_2 verilmiştir. Sistemin hareket denklemleri Lagrange Mekaniği kullanılarak çıkarılmıştır. Sistemin davranışını temsil eden ifadeler denklem 26 ve 27 ile verilmiştir.

$$\left(m_1+m_2\right)l_1\ddot{\theta}_1+m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)+\left(m_1+m_2\right)g\sin\theta_1=0 \tag{26}$$

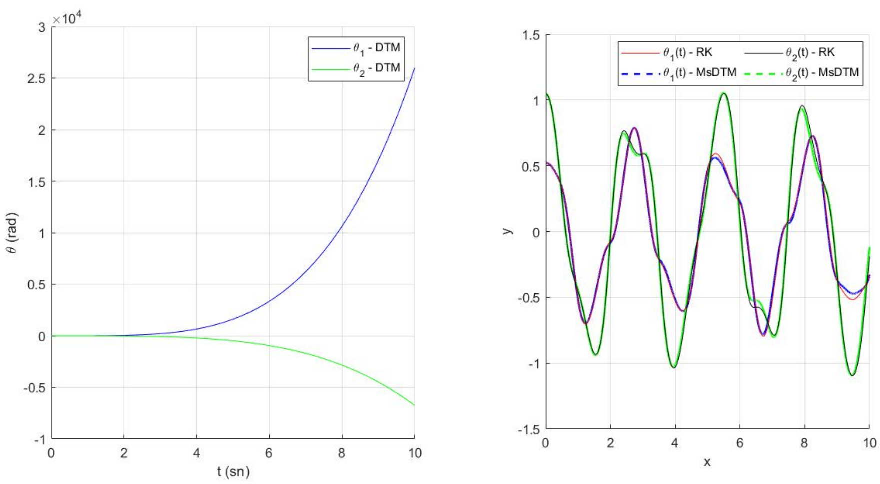
$$l_2\ddot{\theta}_2+l_1\ddot{\theta}_1\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)-l_1\dot{\theta}_1^2\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)+g\sin\theta_2=0 \tag{27}$$

Bu denklemlerin, Tablo 1'de verilen kurallar uygulanarak diferansiyel dönüşümleri elde edilir. Ancak, oldukça lineer olmayan bir sistem olduğu için, açıların fonksiyonların denklemlerinin elde edilebilmesi için MATLAB kullanılmıştır. DTM, MsDTM ve RK kullanılarak çıkarılan fonksiyonların grafikleri ise Şekil 8'de verilmiştir.



Şekil 7: İkili Sarkaç Referans Çizim

Şekil 8-a'da DTM çözümü $10sn$ boyunca verilmiştir. Grafikler incelendiğinde salınımlı bir davranışın yerine, oldukça ıraksayan ve sürekli olarak artan-azalan sonuçlar elde edilmiştir. Şekil 8-b'de ise MsDTM ve RK ile elde edilen açısal konum fonksiyonları beraber çizdirilmiştir. Sonuçların birbiri ile örtüştüğü görülür. RK çözümü referans doğru değer olarak alınırsa, MsDTM'in oldukça iyi sonuç verdiği yorumu yapılabilir.



Şekil 8: İkili Sarkaç Sistemi a) DTM ve b) MsDTM Çözümleri

SONUÇ

Bu çalışma kapsamında, bir mekanik sistemin davranışının ortaya konması ve analizi için bazı örnek sistemler DTM, MsDTM ve RK yöntemleri ile analiz edilmiş ve son olarak mekanikte yaygın olarak örnek verilen (Lagrange Mekaniği) ikili sarkaç sisteminin incelemesi yapılmıştır. Elde edilen sonuçlara bakıldığında, zamana bağlı sistemlerin DTM çözümlerinin doğruluk derecesinin oldukça düşük olduğu görülmüştür. DTM ile verilen çözümün doğruluğunun arttırılması için k değeri arttırılmış, ancak yine tatminkar çözüm vermeyip sonuçlar sapmıştır. Buna karşılık MATLAB kodunun çalışma süresi oldukça artmaktadır.

MsDTM yöntemi ise, DTM'in geliştirilmiş bir halidir ve DTM'deki kurallar geçerlidir. Bu yöntem sayesinde, davranışı temsil eden çözüm denklemi N tane fonksiyona bölünmüştür ve her fonksiyon DTM yöntemi ile hesaplanmıştır. Bu sayede, fonksiyonların ıraksamasına müsade edilmeden yeni fonksiyon hesabı yapılır. Bu işlemlerin ardından da çözülen diferansiyel denklemlerin oldukça doğru sonuçlar verdiği görülmektedir. Ancak burada da göz önünde bulundurulması gereken bazı durumlar mevcuttur. Öncelikle, MsDTM'de herbir Δt aralığı için k değerinin küçük seçilmesi fonksiyonda çok büyük bir sapmaya sebep olmamaktadır. Yani çözüm süresinin kısa olması için k değeri küçük seçilebilir. Ancak, Δt aralığı yeterince küçük olmazsa, doğru değerlerden oldukça sapma gözlemlenebilir. Bu durumun engellenmesi için uygun zaman aralığının doğru bir şekilde belirlenmesi gerekmektedir. Eğer ki aralık çok küçük tutulursa da işlem yükünün artması ile birlikte çözme süresinin artacağı bilinmelidir. Ayrıca, sistemin ve aynı şekilde diferansiyel denklemlerin karmaşıklaşması ile MsDTM çözümü zorlaşacaktır ve simülasyonda oldukça fazla vakit alacaktır.

Runge-Kutta metodu ile MsDTM'in kıyaslanması için deneysel verilerden faydalanmak daha doğru olacaktır. Ancak, Runge-Kutta'nın daha uzun bir zaman aralığında doğru sonucu vereceği, yapılan hesaplamalar sonucunda beklenilen bir durumdur. Ayrıca aynı zaman adımı için, RK'nın daha kısa sürede hesaplama yaptığı görülmektedir.

Son olarak, lineer olmayan sistemler düşünüldüğünde, MsDTM'in daha doğru sonuç vermesine karşılık, Runge Kuttadan daha yavaş çalışacağı düşünüldüğü için, gerçek değere göre yaklaşık sonuç veren Runge-Kuttanın kullanılmasının tercih edilebileceği kanısına varılmaktadır. Ancak basit sistemlerde, MsDTM'in yarı-nümerik analitik çözüm olmasına karşın daha doğru bir sonuç vereceği yorumu yapılabilir. Bununla birlikte, MsDTM ile DTM çözümlerinden analitik ifadelerin elde edildiği göz önüne alındığında, bu analitik ifadelerin türevi alınabilir ve integre edilebilir olması sayesinde, sistem davranışları fonksiyonlarla ortaya konabilir ve incelemesi kolaylaşır.

Kaynaklar

Arıkoğlu, A. ve Özkol, İ., 2006. *Solution of difference equations by using differential transform method.*, Applied mathematics and computation, 174(2), s.1216-1228

Arıkoğlu, A. ve Özkol, İ., 2006. *Solution of differential–difference equations by using differential transform method.*, Applied Mathematics and Computation, 181(1), s.153-162

Benhammouda, B. ve Vazquez-Leal, H., 2016. *A new multi-step technique with differential transform method for analytical solution of some nonlinear variable delay differential equations*, SpringerPlus, 5(1), s.1-17

El-Shahed, M., 2008. *Application of differential transform method to non-linear oscillatory systems.*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13(8), s.1714-1720

Ertürk, V. S., Odibat, Z. M. ve Momani, S., 2012. *The multi-step differential transform method and its application to determine the solutions of non-linear oscillators.*, Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 4(4), s.422-438

George, S. ve Sivakumar, T. R., 2019. *Application of Differential Transform Method to Integral and Integro-Differential Equations.*, Asian Journal of Applied Sciences, 7(6)

Hassan, I. A. H., 2008. *Application to differential transformation method for solving systems of differential equations.*, Applied Mathematical Modelling, 32(12), s.2552-2559

Hatami, M., Ganji, D. D. ve Sheikholeslami, M., 2016. *Differential transformation method for mechanical engineering problems.*, Academic Press

Keimanesh, M., Rashidi, M. M., Chamkha, A. J. ve Jafari, R., 2011. *Study of a third grade non-Newtonian fluid flow between two parallel plates using the multi-step differential transform method.*, Computers & Mathematics with Applications, 62(8), s.2871-2891

Moharir, S. ve Patil, N., 2012. *Application of Differential transform Method for solving Differential and Integral Equations.*, Scientific Reviews and Chemical Communications, Cilt.2, s.293-298

Odibat, Z., Bertelle, C., Aziz-Alaoui, M. A. ve Duchamp, G. H., 2010. *A multi-step differential transform method and application to non-chaotic or chaotic systems.*, Computers & Mathematics with Applications, 59(4), s.1462-1472

Torabi, M. ve Yaghoobi, H., 2012. *Differential Transformation Method for Solving the Nonlinear Heat Transfer Equation with a Variable Specific Heat Coefficient.*, YComputational Thermal Sciences: An International Journal, Cilt.4

Zhou, J. K., 1986. *Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits.*, Huazhong University Press, Wuhan, China