

BİRİMSEL VE ÇOK ZİNCİRLİ PSEUDOSPECTRAL OPTİMAL KONTROL YAZILIMININ GELİŞTİRİLMESİ VE DOĞRULANMASI

Akan SELİM¹
ROKETSAN, İstanbul

İbrahim ÖZKOL²
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ÖZET

Doğrusal olmayan sistem dinamiklerinin eniyilenmesi problemi, karmaşık kısıtlara sahip uçak ve uzay araçlarının tasarımı ve gerçek zamanlı kontrolü için elzem olması dolayısıyla gündemde olan aktif bir araştırma alanıdır. Bu tür problemlerin çözümü için geliştirilen çeşitli yöntemler arasında, doğrusal olmayan programlama ve konveks eniyilemeye dayalı doğrudan transkripsiyon yöntemleri, gerçek zamanlı yakınsama garantileri ve yüksek doğruluklarından ötürü Mars'a iniş, uzay araçlarının yönelim kontrolü, yeniden giriş sırasında yörünge eniyilmesi gibi görevlerde başarıyla kullanılmıştır. Bu yöntemler gerçek zamanlı kontrole ek olarak, araçların yörünge tasarımları için kullanılmakta ve optimalite koşullarını sağlayarak güvenilir sonuçlar sağlamaktadır. Bu amaçla, Pseudospectral optimal kontrol metoduna dayalı bir yazılım geliştirilerek, DIDO ve GPOPS gibi endüstri standardı ve akademide kendini kanıtlamış yazılımlara karşı çeşitli doğrulama çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Geliştirilen yazılım, herhangi bir kolokasyon metodu ile çalışabildiği gibi, çok zincirli problemleri de çözebilecek şekilde geliştirilmiş ve başarı ile doğrulanmıştır.

GİRİŞ

Optimizasyona dayalı kontrol metodları araç tasarımlarından gerçek zamanlı güdüm ve kontrole kadar çok çeşitli amaçlarla kullanılmaktadır. Pseudospectral optimal kontrol metodu bu anlamda endüstrinin ve akademinin standardı olup çeşitli uzay uçuşu görevlerinde, örneğin Uluslararası Uzay İstasyonu'nun yakıtsız yönelim kontrolünde [Bedrossian, N., 2007] başarı ile kullanılmıştır. Standartlaşmış bu yazılımlar açık kaynaklı olmayışlarından dolayı, ilgili algoritmaların herhangi bir ağ yapısı için uygulanabilecek şekilde, kesin doğruluklu seyrekleştirilmiş Jakobyen ve Hessian matrislerinin dual-türevleme metodu ile hesaplanması, araç tasarımından gerçek zamanlı kontrol ve kestirimin sağlanabilmesini sağlayacak bir yazılım geliştirilmiş ve doğrulanmıştır. Yazılım aynı zamanda, hp ve ph olarak bilinen ağ iyileştirme yöntemlerine dayalı, yazarlar tarafından geliştirilmiş saf durum kısıtları olan singular problemler için uyarlamalı düğüm yerleştirme özelliği sayesinde bahsi geçen yazılımlarda karşılaşılan problemlere çözüm sunabilmektedir.

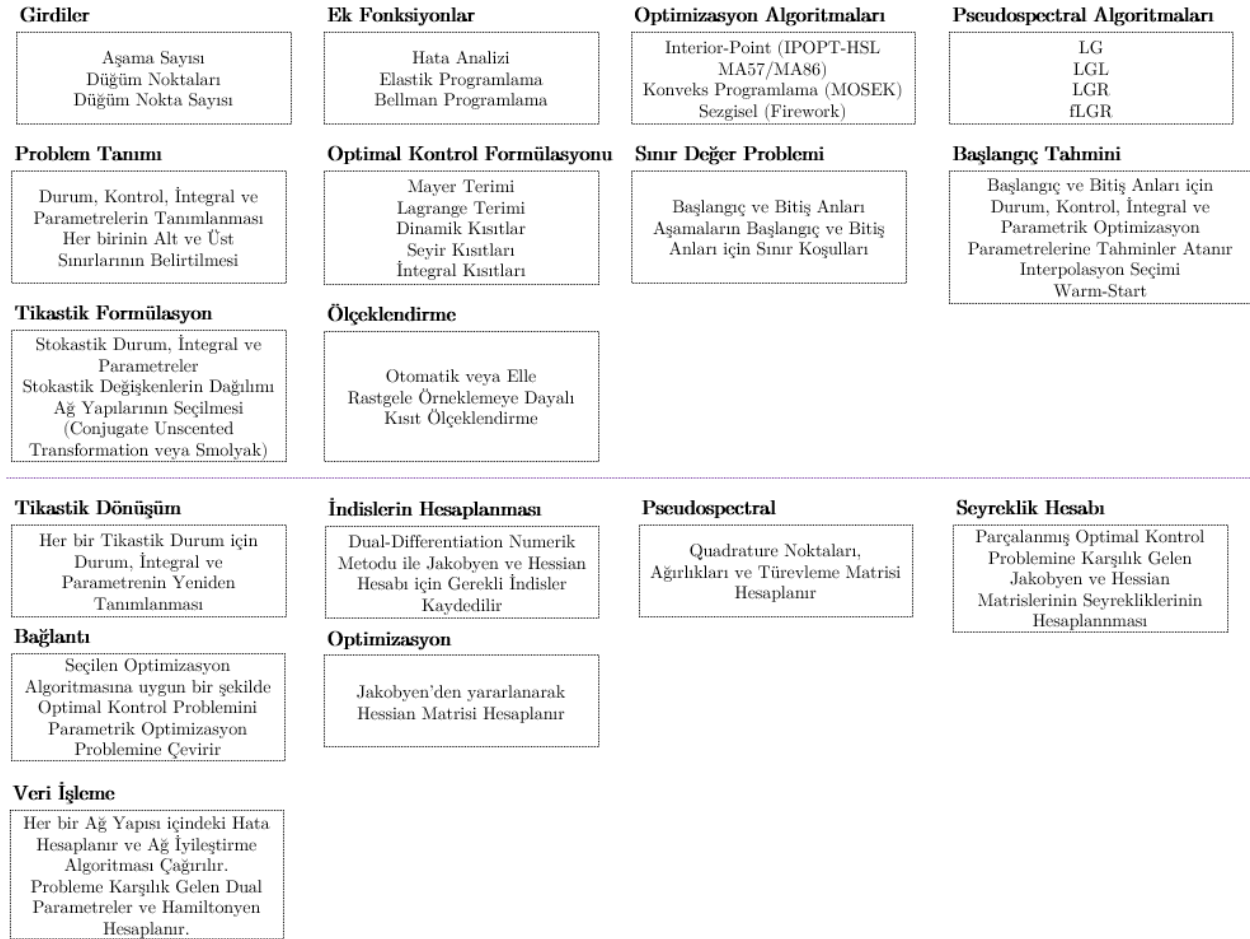
YÖNTEM

Programın İskeleti

Geliştirilen yazılımın bulundurduğu modüller (Şekil 1)'de verilmiştir.

¹ Mühendis, E-posta: akan.selim@roketsan.com.tr

² Prof. Dr., Uçak Müh. Böl., E-posta: ozkol@itu.edu.tr



Şekil 1: Pseudospectral Optimal Kontrol Yazılımının Ana Modülleri

Yazılımın Girdiler modülü ilgili problemin sahip olacağı aşama/zincir sayısını ve içerecekleri düğüm noktalarının sayısını ve konumunu girdi olarak kabul etmektedir. Düğüm noktalarının sayısı ve konumları sırasıyla, çözümün kalitesini arttırmak ve detaylandırılması gereken kısımlara öncelik vermek için kullanılmaktadır.

Ek Fonksiyonlar modülü çeşitli fonksiyonları yerine getirmek için dahil edilmiş araçlardan oluşmaktadır. Çözümün elde edilemediği durumlarda problemi esnetmek için Elastik Programlama, gerçek zamanlı yörünge eniyilemesi denemeleri için Bellman Programlama ve hata analizi için Jakobyen ve Hessian testlerini içermektedir.

Optimizasyon Algoritmaları kullanıcı tarafından seçilecek olan Doğrusal Olmayan Programlama, Konveks Eniyileme ve Sezgisel Algoritmaları içermektedir ve yazılım yapılacak olan seçime göre uygun optimizasyon problemini oluşturacaktır.

Pseudospectral Algoritmaları, Legendre-Gauss (LG), Legendre-Gauss-Lobatto (LGL), Legendre-Gauss-Radau (LGR) ve flipped-Radau (fLGR) kolokasyon metodlarını içermektedir ve problemin sonlu veya sonsuz ufuklu olmasına göre kullanıcı tarafından seçilebilecektir.

Problem Tanımı, kullanıcının tanımlayacağı problem içinde kullanacağı durum, kontrol, integral ve parametrelerin tanımlanacağı, üst ve alt sınırlarının belirtildiği kısımdır. Tanımlanan değişkenlerin başlangıç ve bitiş koşulları, eğer var ise, Sınır Değeri Problemi kısmında belirtilmektedir.

Yörünge Eniyilemesi kısmında ilgili problemin içereceği dinamik kısıtlar, seyir kısıtları, integral kısıtları ve maliyet fonksiyonunda yer alacak Mayer ve Lagrange terimleri tanımlanmaktadır.

Oluşturulan problemin çözümü için uygun bir başlangıç tahmini yapılması gerekmektedir. Bu tahmin kullanıcı tarafından girilebileceği gibi elastik programlamayla program tarafından da elde

edilebilmektedir. Ayrıca warm-start ayarı ile evvelden çözümü elde edilmiş çözümleri görece daha kolay olan bir problemin sonuçları, başlangıç tahmini olarak kullanılabilir.

Tikastik Formülasyon modülü, geliştirilen yazılımın diğer yazılımlara göre asıl avantajı olup tek bir kontrol girdisi ile çok sayıda yörüngeyi aynanda kontrol etmeyi mümkün kılmaktadır. Buna göre başlangıç değerlerine veya parametrelere bilinmezlik katarak stokastik problemlerde deterministik problemlere dönüştürülür. İlgili hesaplamalar Jakobyen ve Hessian matrislerinin hızlı ve verimli bir şekilde hesaplanabilmesi için vektörize bir şekilde gerçekleştirilir ve binlerce yörüngeyi bir arada tasarlanmasına olanak sağlar. İlgili modül içerisinde Seyrek Ağ Yapılarından Smolyak ve Conjugate Unscented Dönüşümü seçeneklerinden biri seçilerek deterministik problem oluşturulur.

Ölçeklendirme kısmında ise hem parametreler hem de problemdeki Jakobyen matrisinin ölçeklendirilmesi için kullanılacak yaklaşım seçilmektedir. Buna göre ilgili katsayılar kullanıcı tarafından girilebilmekteyken, yazılım kendisi başlangıç noktasının çevresinde rastgele noktalar seçerek, Jakobyen matrisini her bir durum için hesaplar ve satırların normlarını ölçeklendirme katsayısı olarak atar.

Tikastik Dönüşüm modülü içerisinde farklı yörüngelere denk gelen durum, integral ve parametreler tanımlanır ve ardından İndis Dönüşümü modülü içerisinde eniyileme sürecinde Dual-türevleme Numerik metodunun ihtiyaç duyacağı, türevlenecek konumların kaydedildiği vektörler hesaplanır ve kaydedilir. Böylece optimizasyon sürecinde her adımda aynı hesaplar tekrarlanmamış olunur.

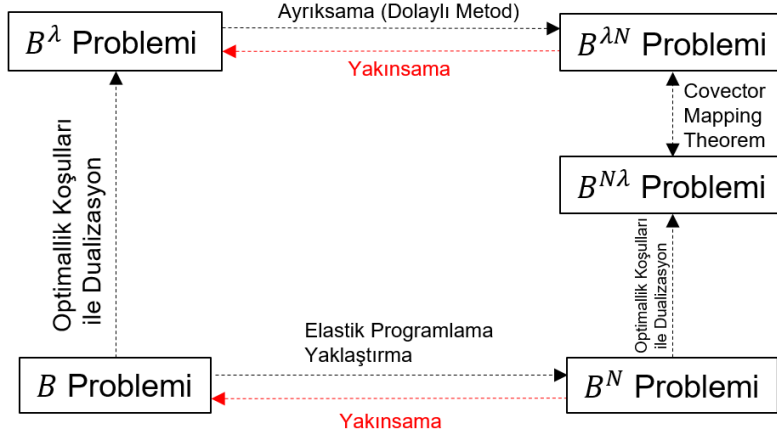
Pseudospectral modülü içerisinde her bir zincir için düğüm noktaları, karşılık gelen ağırlık katsayıları ve türevleme matrisleri hesaplanır.

Seçilmiş olunan optimizasyon algoritması için gerekli olan Seyreklik Haritaları, Seyreklik Hesabı modülü içerisinde NaN testi veya başlangıç noktasının çevresinde ele alınacak rastgele noktalarda hesaplanan Jakobyen matrisleri ile elde edilir. Burada eniyileme sırasında ilgili matrislerin tekrardan hesaplanması gerekeceğinden, Hessian matrisini Jakobyen hesabı sırasında elde edilmiş gradyan vektörlerini azami şekilde kullanarak hesaplayan algoritmalar mevcuttur ve başka bir çalışmada detaylıca açıklanacaktır. Bağlantı ve Optimizasyon modülleri ise, kullanıcının tanımladığı optimal kontrol problemini optimizasyon problemine dönüştürür ve seçilen optimizasyon algoritmasına uygun formata çevirir.

Veri İşleme modülünde, sonuçları elde edilmiş problemin hata analizleri, kolokasyon noktalarının orta noktaları üzerinde gerçekleştirilir ve kullanıcının gireceği eşik değerin üstünde kalması durumunda ağ iyilemesi aşamasına geçilerek problem detaylandırılmış ağ yapısı üzerinde tekrardan çözülecektir. Hatanın eşik değerin altında olması durumunda ise optimal kontrol problemine karşılık gelen dual parametreler ve Hamiltonyen çizdirilir.

Optimal Kontrol Formülasyonu

Yörünge eniyilemesi problemleri optimal kontrol teknikleri aracılığı ile çözülebilmektedir. Bunun için optimal kontrol problemi (bundan sonra B olarak ifade edilecektir) sınır değer problemi olarak yeniden yazılarak dualize edilebilmekte ve sonuçta elde edilen problem B^λ olarak ifade edilmektedir. Bu işlem aynı zamanda optimal kontrol probleminin Pontryagin Yükseltmesi olarak da anılmaktadır. Problemin çözülebilmesi için mevcut yaklaşımlardan biri problemi diskretize ederek sürekli problemin çözümüne yakınsayacağı umuduyla çözmektir. Bu yaklaşım Dolaylı Yaklaşım olarak bilinmekte olup Sınır Problemi Çözümleri ile, örneğin MATLAB'daki bvp4c ile çözülebilmektedir. Bu yaklaşımların yakınsaması zor olmakla birlikte karmaşık problemlerde durum kısıtlarını ifade etmek oldukça zordur. Bu yaklaşımın tersine problem dualize edilmeden önce parçalanır (bu sefer problem B^N problemi olarak ifade edilir) ve doğrudan optimizasyon algoritmaları ile çözümlere dual parametrelere (bu problem de $B^{\lambda N}$ ile gösterilir) erişilmek istenir. Pseudospectral metodları ile Covector Mapping Teorem'i aracılığı [Gong, Q., 2007] ile bu parametreleri elde etmek mümkündür ve önce dualize et sonra parçala yaklaşımıyla ($B^{\lambda N}$) aynı sonuçlara erişilebilmektedir. Bu yüzden Pseudospectral Optimal Kontrol yaklaşımı hem doğrudan hem dolaylı optimal kontrol metodu olarak da anılmaktadır. Süreç (Şekil 2)'de gösterilmiştir.



Şekil 2: Doğrudan-Dolaylı Optimal Kontrol Problemi Çözümü

Pseudospectral yöntemlerin bu avantajı ile çözülen NLP probleminde elde edilen kesikli Karush–Kuhn–Tucker (KKT) çarpanları ile orijinal optimal kontrol probleminin sürekli olan birinci dereceden optimallik koşulları arasında doğrudan bir bağ olmasıdır. Gauss Pseudospectral Costate Mapping Teorem'ine göre NLP probleminin KKT koşulları diskretize edilmiş olunan sürekli Bolza problemine karşılık gelen sürekli birinci dereceden gereklilik koşullarına denktir.

Pseudospectral yaklaşımı, öncelikle ilgili problemi optimal kontrol problemi olarak Bolza formunda şu şekilde yeniden tanımlayarak kullanılabilir:

$$\mathcal{J} = \phi(e^{(1)}, \dots, e^{(P)}, s) + \sum_{p=1}^P \int_{t_0^{(p)}}^{t_f^{(p)}} g^{(p)}(y^{(p)}, u^{(p)}, t^{(p)}, s) dt \quad (1)$$

Problem içerisinde her bir faza ait zaman aralığı istenen noktalarda parçalara ayrılarak yeni düğümler eklenerek daha da detaylandırılabilir. Bu durumda ilgili zaman aralığı $K^{(p)}$ adet parçaya ayrılarak yeni bir örgü oluşturulmuş olunur ve bu örgünün parçaları $\mathcal{S}_k^{(p)}$ ile temsil edilir. Burada $k \in \{1, \dots, K^{(p)}\}$ ve $p \in \{1, \dots, P\}$ dir. P problemin ihtiva ettiği toplam faz sayısıdır. Örgü parçalarının son noktalarını bulduran $e^{(P)}$, $\forall p \in \{1, \dots, P\}$ vektörü,

$$e^{(P)} = [Y_{1,:}^{(p)}, t_0^{(p)}, Y_{N^{(p)},:}^{(p)}, t_f^{(p)}, \hat{q}^{(p)}], \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \quad e^{(P)} \in \mathbb{R}^{[2n_y^{(p)} + n_q^{(p)} + 2] \times 1} \quad (2)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Burada, durum matrisi $Y^{(p)}$, kontrol matrisi $U^{(p)}$ ve integral değişken vektörü $\hat{q}^{(p)}$ şu şekilde oluşturulmaktadır:

$$Y^{(p)} = \begin{bmatrix} Y_{1,1}^p & \dots & Y_{1,n_y^{(p)}}^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N^{(p)}+1,1}^p & \dots & Y_{N^{(p)}+1,n_y^{(p)}}^p \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$U^{(p)} = \begin{bmatrix} U_{1,1}^p & \dots & U_{1,n_u^{(p)}}^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N^{(p)},1}^p & \dots & U_{N^{(p)},n_u^{(p)}}^p \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\hat{q}^{(p)} = \begin{bmatrix} \hat{q}_1^{(p)} \\ \vdots \\ \hat{q}_{n_q^{(p)}}^{(p)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Her bir $q_j^{(p)} \forall j \in \{1, \dots, n_q^{(p)}\}, \forall p \in \{1, \dots, P\}$ vektörü şu şekilde hesaplanmaktadır:

$$q_j^{(p)} = \sum_{k=1}^{K^{(p)}} \int_{(t_0^{(k)})^{(p)}}^{(t_f^{(k)})^{(p)}} \psi_j^{(p)}(y^{(p)}, u^{(p)}, t^{(p)}, s) dt, \quad \forall j \in \{1, \dots, n_q^{(p)}\}, \quad (6)$$

$$\forall p \in \{1, \dots, P\},$$

Bu durumda yeni objektif fonksiyonu şu olmuş olur:

$$\mathcal{J} = \phi(e^{(1)}, \dots, e^{(P)}, s) + \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^{K^{(p)}} \int_{(t_0^{(k)})^{(p)}}^{(t_f^{(k)})^{(p)}} g^{(p)}(y^{(p)}, u^{(p)}, t^{(p)}, s) dt \quad (7)$$

Problemin uymak zorunda olduğu dinamik eşitlik koşulları:

$$\dot{y}^{(p)} = a^{(p)}(y^{(p)}, u^{(p)}, t^{(p)}, s), \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \quad (8)$$

Her faz için ayrıca tanımlı olunan ve bu fazlar içerisindeki düğümlerin her birinde geçerli olması beklenen seyir kısıtları:

$$c^{(p)}_{min} \leq c^{(p)}(y^{(p)}, u^{(p)}, t^{(p)}, s) \leq c^{(p)}_{max}, \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \quad (9)$$

Fazlar arasında tanımlanabilen global eşitlik ve eşitsizlikler, diğer adıyla olay kısıtları:

$$b_{min} \leq b(e^{(1)}, \dots, e^{(P)}, s) \leq b_{max} \quad (10)$$

Her faz içerisinde ayrıca tanımlı olunan integral eşitsizlik kısıtları:

$$q^{(p)}_{min} \leq \hat{q}^{(p)} \leq q^{(p)}_{max} \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \quad (11)$$

Tüm fazlar için geçerli olan statik parametre eşitsizlik kısıtları:

$$s_{min} \leq s \leq s_{max} \quad (12)$$

Burada gösterilen tüm vektör fonksiyonları satır vektörleri olarak tanımlıdır ve haritalamaları şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} \phi &: \prod_{p=1}^P \mathbb{R}^{[2n_y^{(p)} + n_q^{(p)} + 2]x1} \times \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \\ g^{(p)} &: \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \\ \psi_j^{(p)} &: \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n_q^{(p)}\}, \quad \forall p \in \{1, \dots, P\}, \\ a^{(p)} &: \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}, \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \\ c^{(p)} &: \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}, \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \\ b &: \prod_{p=1}^P \mathbb{R}^{[2n_y^{(p)} + n_q^{(p)} + 2]x1} \times \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_b}, \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \end{aligned} \quad (13)$$

Optimal kontrol probleminin doğrusal olmayan programlama formatına çevrilmesi için oluşturulacak olan tasarım parametresi z şu şekilde [Rao, A.V., 2010] oluşturulmaktadır:

$$z = \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ \vdots \\ z^{(P)} \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n_s} \end{bmatrix}, \quad z^{(p)} = \begin{bmatrix} Y^{(p)}_{:,1} \\ \vdots \\ Y^{(p)}_{:,n_y} \\ U^{(p)}_{:,1} \\ \vdots \\ U^{(p)}_{:,n_u} \\ \hat{q}^{(p)} \\ t_0^{(p)} \\ t_f^{(p)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Burada $Y^{(p)} \in \mathbb{R}^{N^{(p)} \times n_y^{(p)}}$ durum değişkeni matrisi, $U^{(p)} \in \mathbb{R}^{N^{(p)} \times n_u^{(p)}}$ kontrol değişkeni matrisi, $\hat{q}^{(p)} \in \mathbb{R}^{n_q^{(p)}}$ integral değişken vektörü, $t_0^{(p)}$ ve $t_f^{(p)}$ ilgili fazın başlangıç ve bitiş zamanı değişkenleri $p \in \{1, \dots, P\}$ için tanımlanmış olup, tüm fazlar için kullanılacak olan ortak statik parametreler ise s_i $i \in \{1, \dots, n_s\}$ ile tasarım parametrelerine katılmıştır. Sonuçta her faz için kullanılacak olan tasarım vektörü

$$z^{(p)} \in \mathbb{R}^{[(N^{(p)}+1) \times n_y^{(p)} + N^{(p)} n_u^{(p)} + n_q^{(p)} + 2] \times 1} \quad (15)$$

ve optimal kontrol probleminin tamamını tanımlayan tasarım vektörü ise

$$z \in \mathbb{R}^{[n_s + \sum_{p=1}^P [(N^{(p)}+1) \times n_y^{(p)} + N^{(p)} n_u^{(p)} + n_q^{(p)} + 2]] \times 1} \quad (16)$$

olarak oluşturulmaktadır.

Doğrusal olmayan programlamaya beslenecek olan objektif fonksiyonu, boyutsuzlaştırılmış zaman vektörü cinsinden şu şekilde oluşturulmaktadır:

$$\mathcal{J} = \phi(e^{(1)}, \dots, e^{(P)}, s) + \sum_{p=1}^P \frac{t_f^{(p)} - t_0^{(p)}}{2} \sum_{k=1}^{K^{(p)}} \int_{(\tau^{(k-1)})^{(p)}}^{(\tau^{(k)})^{(p)}} g^{(p)}(y^{(p)}, u^{(p)}, \tau^{(p)}, t_0^{(p)}, t_f^{(p)}, s) d\tau \quad (17)$$

Objektif fonksiyonunu oluşturan fonksiyonel terim faz içerisindeki her örgü için şu şekilde yeniden yazılarak hesaplanır:

$$\gamma = \sum_{p=1}^P \frac{t_f^{(p)} - t_0^{(p)}}{2} w^{(p)T} g^{(p)} \quad (18)$$

Kısıtlamalar ise sırasıyla dinamik, seyir, integral, sınır/olay ve statik parametre koşulları için şu şekilde yeniden oluşturulmaktadır:

$$(\Delta^{(i)})^{(p)} = \frac{dy^{(k)}(s)}{ds} - \frac{t_f^{(p)} - t_0^{(p)}}{2} A^{(p)} = D^{(p)} Y^{(p)} - \frac{t_f^{(p)} - t_0^{(p)}}{2} A^{(p)} = 0, \forall i \in \{1, \dots, N_k^{(p)}\} \quad (19)$$

$$c_{min}^{(p)} \leq C_{i,:}^{(p)} \leq c_{max}^{(p)}, \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \quad \forall i \in \{1, \dots, N^p\} \quad (20)$$

$$\rho_j^{(p)} = \hat{q}_j^{(p)} - \frac{t_f^{(p)} - t_0^{(p)}}{2} [w^{(p)}]^T \Psi_{:,j}^{(p)} = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n_q^{(p)}\}, \quad \forall p \in \{1, \dots, P\}, \quad (21)$$

$$q^{(p)}_{min} \leq \hat{q}^{(p)} \leq q^{(p)}_{max} \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \quad (22)$$

$$b_{min} \leq b(e^{(1)}, \dots, e^{(P)}, s) \leq b_{max} \quad (23)$$

$$s_{min} \leq s \leq s_{max} \quad (24)$$

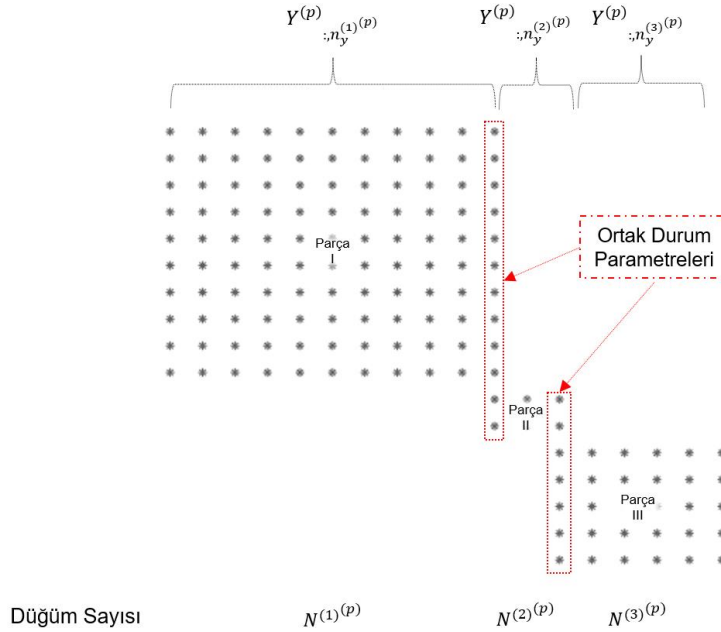
Burada,

$$A^{(p)} = \begin{bmatrix} a^{(p)}(Y_{1,:}^{(p)}, U_{1,:}^{(p)}, t_1^{(p)}, \tau) \\ \vdots \\ a^{(p)}(Y_{N^{(p)},:}^{(p)}, U_{N^{(p)},:}^{(p)}, t_{N^{(p)}}^{(p)}, \tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N^{(p)} \times n_y^{(p)}} \quad (25)$$

$$C^{(p)} = \begin{bmatrix} c^{(p)}(Y_{1,:}^{(p)}, U_{1,:}^{(p)}, t_1^{(p)}, \tau) \\ \vdots \\ c^{(p)}(Y_{N^{(p)},:}^{(p)}, U_{N^{(p)},:}^{(p)}, t_{N^{(p)}}^{(p)}, \tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N^{(p)} \times n_e^{(p)}} \quad (26)$$

$$\Psi^{(p)} = \begin{bmatrix} \psi^{(p)}(Y_{1,:}^{(p)}, U_{1,:}^{(p)}, t_1^{(p)}, \tau) \\ \vdots \\ \psi^{(p)}(Y_{N^{(p)},:}^{(p)}, U_{N^{(p)},:}^{(p)}, t_{N^{(p)}}^{(p)}, \tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N^{(p)} \times n_q^{(p)}} \quad (27)$$

olarak tanımlıdır. $(\Delta^{(i)})^{(p)}$ dinamik kısıt hatasıdır, $N^{(p)} = \sum_{k=1}^{K^{(p)}} N_k^{(p)}$ ilgili faza denk gelen toplam düğüm noktasıdır, $w^{(p)} \in \mathbb{R}^{N^{(p)}}$ Gaussian integrasyonunun gerçekleştirilmesi için ilgili düğüm noktalarına karşılık gelen ağırlık katsayılarını içeren vektördür ve $D^{(p)}$ ilgili düğümleme yönteminde Lagrange interpolasyon polinomu ile elde edilen, ilgili fazın içerdiği tüm örgülere ait türevleme matrislerinin kombinlenmiş halidir ve bir örneği (Şekil 3)'de verilmiştir.



Şekil 3: Parçalanmış Örgülerin Türevleme Matrisi

Burada türevleme matrislerinin son ve başlangıç sütunlarının hizalanması, bu parçalar arasında yer alan durum vektörleri için gerekli olan sınır koşullarının kendiliğinden sağlanmasına yardımcıdır.

Sonuçta, girilen kısıt fonksiyonları tek bir kısıt vektörü olarak birleştirilir:

$$H = \begin{bmatrix} h^{(1)} \\ \vdots \\ h^{(p)} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n_b} \end{bmatrix}, \quad h^{(p)} = \begin{bmatrix} \Delta^{(p)}_{:,1} \\ \vdots \\ \Delta^{(p)}_{:,n_y} \\ C^{(p)}_{:,1} \\ \vdots \\ C^{(p)}_{:,n_c} \\ \rho^{(p)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Burada $\Delta^{(p)} \in \mathbb{R}^{N^{(p)} \times n_y^{(p)}}$ dinamik hata kısıtı, $C^{(p)} \in \mathbb{R}^{N^{(p)} \times n_c^{(p)}}$ seyir kısıtı, $\rho^{(p)} \in \mathbb{R}^{n_q^{(p)}}$ integral hata kısıtını ifade etmektedir. $b \in \mathbb{R}^{n_b \times 1}$ tüm fazlar arasında geçerli olan sınır ve olay koşullarını içeren bir sütun vektörüdür.

Düğüm Seçimleri

Eşit aralıklı seçilmiş düğüm noktaları, interpolate edilmek istenen fonksiyonun kestirimini daha yüksek doğruluk payı ile gerçekleştirmek için arttırıldığında kaçınılmaz olarak kestirilmek istenen fonksiyonun uç noktalarında giderek artan, Runge Fenomeni olarak bilinen dalgalanmalar görülür. Seçilmesi gereken en iyi düğüm noktası serisi Chebyshev düğümleri [Trefethen, L., 2000] olarak bilinir ve şu şekilde hesaplanabilir:

$$\tau_j = \frac{t_0 + t_f}{2} + \frac{t_f - t_0}{2} \cos \left(\left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{N} \right), j = 1, \dots, N \quad (29)$$

Bu noktalar uç noktalara daha yakın olup merkezde birbirlerinden daha uzaktırlar. Chebyshev düğümleri, kestirilmek istenen fonksiyonun boyutsuzlaştırılarak standart formda ifade edilebilmesi için kullanılabilir. Burada standart forma göre $f(\tau)$ $\tau \in [-1,1]$ aralığında ifade edilmek istenmektedir.

Eğer standart form yerine belirli bir a ve b aralığında tanımlanmak istenirse haritalama şu şekilde yapılabilmektedir:

$$\tau \rightarrow \frac{t_0 + t_f}{2} + \tau \frac{t_f - t_0}{2} \quad (30)$$

Bu haritalama ayrıca boyutsuzlaştırılmış vektörü eski orijinal haline çevirmek için kullanılabilir.

Yapılabilecek düğüm seçimleri genel olarak üç farklı alt başlık altında toplanır, bunlar Radau, Lobatto ve Gauss metodlarıdır. Radau metodu içerisinde uç noktalardan biri düğüme dahil edilmez, Gauss metodu iki ucu da dahil etmez ve son olarak Lobatto metodu iki ucuda düğüm olarak dahil eder. Yazılım içerisinde kullanıma açık olan yaklaşımlar Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL), Legendre-Gauss (LG), Legendre-Gauss-Radau (LGR), Legendre-Gauss-Lobatto (LGL), Flipped Radau (fLGR) olsa da kullanıcı kendi ağını kendisi üretmek istediği şekilde düğümleme yapabilir ve ilgili ağırlık ve türevleme matrislerini hesaplayabilir.

Lagrange İnterpolasyonu

Verili bir zaman serisi N'inci dereceden Lagrange interpolasyon [Wang, X., 2021] polinomu cinsinden şu şekilde ifade edilebilmektedir:

$$y(\tau) \simeq \sum_{j=1}^{N+1} y(\xi_j) \mathcal{L}_j(\tau) \quad (31)$$

Burada ξ_j , $N + 1$ tane interpolasyon düğüm noktasını temsil etmektedir ve $\mathcal{L}_j(\tau)$ j'ninci interpolasyonu düğümüne karşılık gelen Lagrange interpolasyon baz fonksiyonudur ve şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\mathcal{L}_j(\tau) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N+1} \frac{\tau - \tau_l}{\tau_j - \tau_l}, \quad \tau \in [-1, +1] \quad (32)$$

burada $j = 1, \dots, N + 1$.

Burada verilmiş olan baz fonksiyonları ortogonalite şartını sağlamaktadır, yani:

$$\mathcal{L}_k(\tau_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (33)$$

Sonuç olarak, düğüm noktaları arasındaki fonksiyon değerleri şu şekilde hesaplanabilmektedir:

$$p_N(\tau) = \sum_{j=0}^N y_j \mathcal{L}_{N,j}(\tau) \quad (34)$$

Burada y_j düğüm noktalarına denk gelen değerlerdir, $p_N(x)$ ise N'inci dereceden olan bu Lagrange polinomu içerisinde interpolate edilmek istenen τ noktasına karşılık gelen değerdir.

Düğüm noktalarının ve ilgili Lagrange polinomunda interpolate edilmek istenen x noktalarına denk gelen birinci ve ikinci seviyeden türevlerin elde edilebilmesi için şu fonksiyonların sırayla hesaplanması gerekmektedir:

$$\dot{\mathcal{L}}_k(\tau) = \mathcal{L}_k(\tau) \left(\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{1}{\tau - \tau_l} \right) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_k - \tau_j} \left(\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{1}{\tau - \tau_l} \right) \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathcal{L}}_k(\tau) &= \mathcal{L}_k(\tau) \left(\left(\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{1}{\tau - \tau_l} \right)^2 - \left(\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{1}{(\tau - \tau_l)^2} \right) \right) \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_k - \tau_j} \left(\left(\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{1}{\tau - \tau_l} \right)^2 - \left(\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{1}{(\tau - \tau_l)^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (36)$$

Legendre polinomlarının ortogonalliği kullanılarak, Lagrange interpolasyon polinomunun katsayıları şu şekilde hesaplanabilmektedir:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{dY(t)}{dt} = \sum_{i=0}^N Y(t_i) \frac{d\mathcal{L}_i(t)}{dt} \quad (37)$$

$$\dot{Y}_k = \sum_i D_{ki} Y_i, \quad k = 1, \dots, N^p \quad (38)$$

$$D_{ki} = \dot{\mathcal{L}}_i(t_k) \quad (39)$$

burada D_{ki} pseudospectral türevleme matrisidir.

Herhangi bir integrasyon işlemi Gausyen Quadrature kuralı ile,

$$\int_{-1}^1 f(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^N w_k f(\tau_k) \quad (40)$$

gerçekleştirilebilmektedir.

Son olarak integrasyon matrisi elde edilen türevleme matrisinden şu şekilde elde edilebilmektedir:

$$I = [D_{:,2} \dots D_{:,N^p}]^{-1} \quad (41)$$

Bu matris kullanılarak dinamik eşitlik koşulları integral formatında yazılabilmektedir. Buna göre,

$$Y_{k+1} = Y_1 + \frac{(t_f)^p - (t_0)^p}{2} \sum_i I_{ki} \dot{Y}_k, \quad k = 1, \dots, N^p \quad (42)$$

Legendre Pseudospectral Metodu

Legendre polinom serisi [Wang, X., 2021] $\{P_k(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ $[-1,1]$ aralığında tanımlı olup k dereceli polinomu şu şekilde tanımlıdır:

$$P_k(\tau) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{d^{(k)}}{2^k k! d\tau^{(k)}} [(\tau^2 - 1)^k], & \text{değilse} \end{cases} \quad (43)$$

Legendre polinom serisi ortogonalite şartını sağlamaktadır:

$$\int_{-1}^1 P_k(\tau) P_j(\tau) d\tau = \frac{2}{2k+1} \delta_{kj} \quad (44)$$

$[-1,1]$ aralığında tanımlı bir kuadratik integer edilebilen $f(\tau)$ fonksiyonu Legendre polinom serileri tarafından şu şekilde tanımlanabilmektedir.

$$f(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(\tau) \quad (45)$$

Burada c_k , Legendre polinomlarının ortogonalite özelliğinden yararlanılarak şu şekilde hesaplanmaktadır:

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 P_k(\tau) f(\tau) d\tau \quad (46)$$

Legendre-Gauss-Radau (LGR) Pseudospectral Metodu

Düğüm noktaları (τ_k) $L_N(\tau) + L_{N+1}(\tau)$ polinomunun sıfırlarında yer almaktadır.

$$\begin{cases} w_0 = \frac{2}{(N+1)^2} \\ w_k = \frac{2}{(N+1)^2} \frac{1-\tau_k}{(L_N(\tau_k))^2}, k = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (47)$$

Zamana bağlı bir y değişkeni şu şekilde ifade edilebilmektedir:

$$y(\tau) \approx Y(\tau) = \sum_{j=1}^{N+1} Y(\ell_j)(\tau) \quad (48)$$

burada,

$$\ell_j(\tau) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N+1} \frac{\tau - \tau_l}{\tau_j - \tau_l}, \quad \tau \in [-1, +1] \quad (49)$$

(τ_1, \dots, τ_N) LGR quadrature noktalarının konumlarıdır. İlgili yöntemde sağdaki sınır noktası 1 dahil edilmemektedir.

Türevleme matrisi şu şekilde hesaplanabilmektedir:

$$D_{ij} = \frac{d(\ell_j(\tau_i))}{d\tau}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, N+1\} \quad (50)$$

Ardından zamana bağlı y değişkeninin türevi,

$$\sum_{j=1}^{N+1} D_{ij} Y_j = \frac{t_f - t_0}{2} a(Y_i, U_i, t_0, t_f, s), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (51)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Burada a , ilgili tasarım noktasındaki y değişkeninin zamana bağlı türev ifadesidir.

Ters Radau (fLGR) Pseudospectral Metodu

Polinom interpolasyonunda seçilecek düğüm noktaları arasında başka bir alternatif ters radau polinomlarıdır. Bu polinomlar ardışık Legendre polinomları arasındaki farkın sonucudur:

$$R_N(\tau) = L_N(\tau) - L_{N-1}(\tau), \quad \tau \in [-1, 1] \quad (52)$$

Burada $P_N(\tau)$, N'inci seviyeden Legendre polinomunu ifade etmektedir.

Bu polinomların köklerine ilişkin Gausyen integrasyon ağırlıkları şu şekilde hesaplanabilmektedir:

$$w_k = \text{flip} \left\{ \frac{1 - \tau_k}{N^2 L_{N-1}^2(\tau_k)} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (53)$$

Burada $L_N(t)$ N'inci dereceden Legendre polinomunu ifade etmektedir.

Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) Pseudospectral Metodu

Düğüm noktaları $(1 - \tau^2) \dot{L}_N(\tau)$ polinomunun sıfırlarında yer almaktadır.

$$w_k = \frac{2}{N(N+1)} \frac{1}{[L_N(\tau_k)]^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N+1 \quad (54)$$

Burada $k=0, 1, \dots, N$ LGL düğüm noktalarını, $L_N(t)$ N'inci dereceden Legendre polinomunu ifade etmektedir.

Legendre-Gauss (LG) Pseudospectral Metodu

Burada düğüm noktaları $L_{N+1}(\tau)$ polinomunun sıfırlarında yer almaktadır.

$$w_k = \frac{1}{(1 - \tau_k^2)} \frac{2}{L_{N+1}(\tau_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (55)$$

Kullanılan bu polinom, derecesi $2N + 1$ 'in üzerinde olmayan herhangi bir polinom için tam kesin yakınsama sunmaktadır. Burada $L_{N+1}(t)$ $N + 1$ 'inci dereceden Legendre polinomunu ifade etmektedir.

UYGULAMALAR VE DEĞERLENDİRME

Bu kısımda yazılımın doğrulanması için kullanılan iki örnek çalışmaya yer verilmiştir. Bunlar sırasıyla yeniden kullanılabilir bir yeniden giriş aracı olan Space Shuttle'ın katedebileceği boylam mesafesinin azami kılınması ve Delta III fırlatma aracının Yerdurağan Transfer Yörüngesi'ne optimal bir şekilde aktarılmasıdır. İlgili doğrulama çalışmalarının ardından akademide çözülmüş güncel çok zincirli yörünge eniyilemesi ve kontrol problemlerine de yer verilerek, yeniden kullanılabilir bir fırlatma aracının iniş aşaması, Falcon 9'un birinci kademesinin fırlatma noktasına geri dönüşü için geri dönüş ve iniş manevrası, NPSAT1 uydusunun optimal yönelim kontrolü, Starship'in Belly-Flop manevrası, itki ile süzülen yeniden giriş araçlarının yörünge eniyilemesi, geri-ateşleme, yeniden-giriş, iniş ateşlemeleri içeren bir yeniden kullanılabilir fırlatma aracı yörünge eniyilemesi ve baştan sona iki kademeli yeniden kullanılabilir fırlatma aracı örneği çözülmüştür.

Space Shuttle Yeniden Giriş Boylam Eniyilemesi

İlk doğrulama çalışması [Betts, J.T., 2010]'dan alınan Space Shuttle'ın yeniden giriş yörünge eniyilemesi örneğidir. İlgili problemde kullanılan dinamikler,

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= v \sin \gamma \\
 \dot{\theta} &= \frac{v \cos \gamma \sin \psi}{r \cos \phi} \\
 \dot{\phi} &= \frac{v \cos \gamma \cos \psi}{r} \\
 \dot{v} &= -\frac{D}{m} - G \sin \gamma \\
 \dot{\gamma} &= -\frac{L \cos \sigma}{mv} - \left(\frac{G}{v} - \frac{v}{r} \right) \cos \gamma \\
 \dot{\psi} &= \frac{L \sin \sigma}{mv \cos \gamma} + \frac{v \cos \gamma \sin \psi \tan \phi}{r}
 \end{aligned} \tag{56}$$

Burada,

$$G = g_0 \left(\frac{R_e}{R_e + r} \right)^2 \tag{57}$$

R_e Dünya'nın yarıçapı ve g_0 deniz seviyesindeki yerçekimi ivmesidir. D ve L araç üstüne etkiyen sürüklenme ve taşıma kuvvetleri olup ilgili çalışmada tanımlandığı şekliyle hesaplanmıştır.

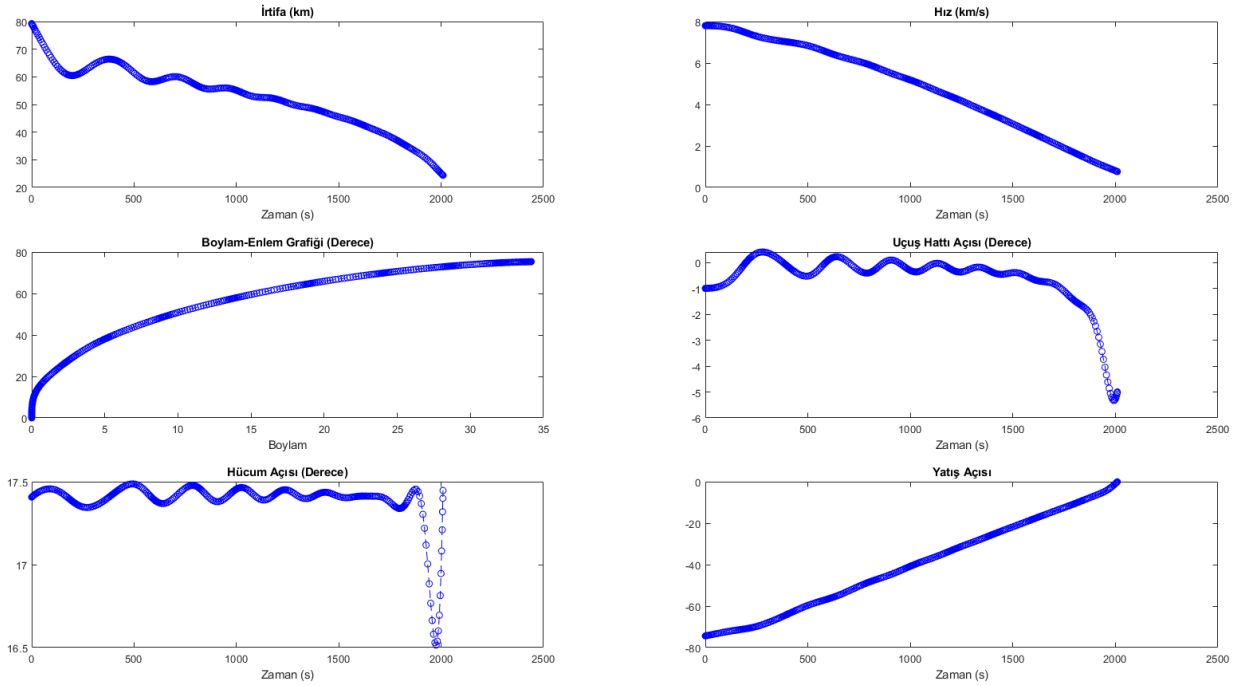
İlgili problemin çözümü için performans indisi:

$$J = -\phi(t_f) \tag{58}$$

Problemin sınır koşulları (Tablo 1)'de ve çözümü (Şekil 4)'de verilmiştir.

Tablo 1: Yeniden Giriş Aracı Boylam Eniyilemesi Probleminin Sınır Koşulları

	Başlangıç Sınır Koşulu	Uç Sınır Koşulu
		Birinci Aşama
$r(km)$	79248	24384
$\theta(derece)$	0	serbest
$\phi(derece)$	0	serbest
$v(m/s)$	7803	762
$\gamma(derece)$	-1	-5
$\psi(derece)$	90	serbest
$t(s)$	0	serbest



Şekil 4: Yeniden Giriş Aracı Boylam Eniyilemesi Probleminin Optimal Çözüm Sonuçları

Referans çalışmada elde edilen azami boylam 34.1412 derece olarak elde edilmişken, bizim çalışmamızda 34.1641 derece optimal değer olarak belirlenmiştir.

Çok Kademeli Fırlatma Aracı Yörünge Eniyilemesi

İyi bilinen çok kademeli bir fırlatma aracı olan Delta-III'ün Yerdurağan Transfer Yörüngesi (YTY)'ne azami kütle ile çıkabilmesini sağlayacak optimal kontrol girdilerinin hesaplanmasıdır. Aracın kademelerinin kütle dağılımları ve ulaşılabilecek yörünge parametreleri hakkında detaylı bilgi [Benson, D., 2005]'de bulunmaktadır. İlgili yörünge eniyilemesi problemi Mayer optimal kontrol problemine dönüştürülerek şu şekilde formüle edilmiş ve çözülmüştür.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} &= -\frac{\mu}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} + \frac{\vec{T}}{m} + \frac{\vec{D}}{m} \\ \dot{m} &= -\frac{\|\vec{T}\|}{g_0 I_{sp}} \end{aligned} \quad (59)$$

Burada,

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v} - [0 \ 0 \ \Omega_E]^T \times \vec{r}$$

$$\vec{D} = -\frac{1}{2}\rho_0 e^{-\frac{h}{H}} S C_D \|\vec{v}_{rel}\| \vec{v}_{rel} \quad (60)$$

İlgili problemin çözümü için performans indisi ise:

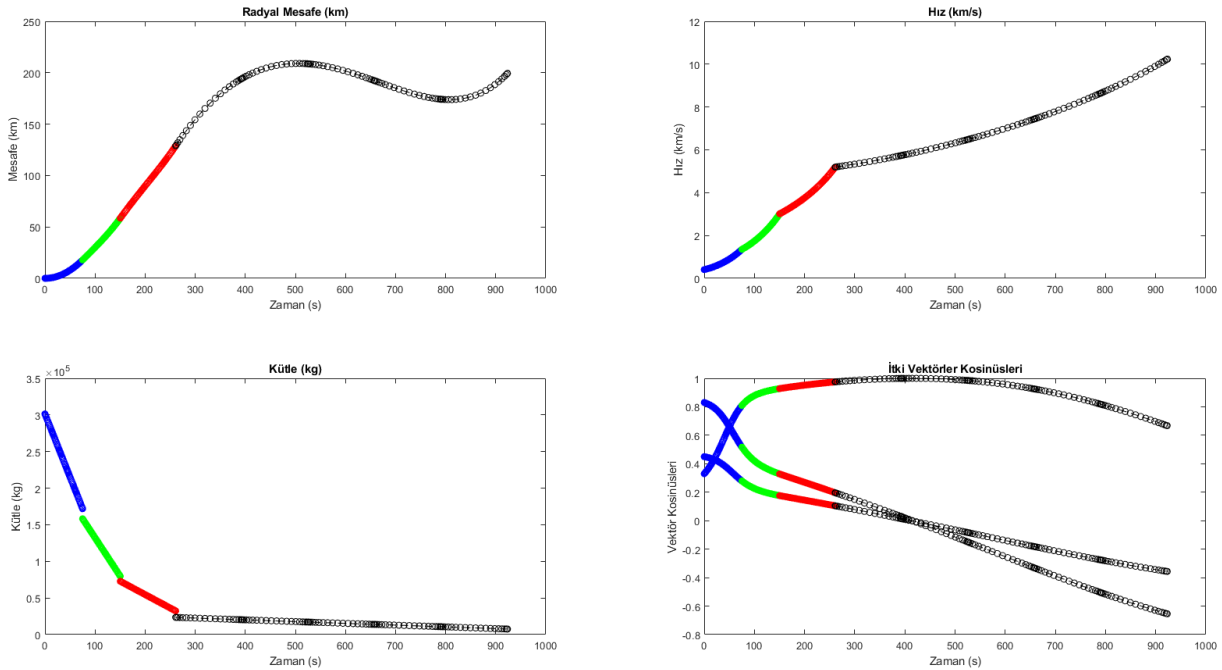
$$J = -m^{(4)}(t_{f,4}) \quad (61)$$

Problemin sınır koşulları (Tablo 2)'de, ve çözümü (Şekil 5)'de verilmiştir.

Tablo 2: Çok Kademeli Fırlatma ve Yörüngeye Yerleşme Görevi Eniyilemesi Sınır Koşulları

	Başlangıç Sınır Koşulu	Uç Sınır Koşulu			Dördüncü Aşama
		Birinci Aşama	İkinci Aşama	Üçüncü Aşama	
$r(km)$	[5605.2,0,3043.4]	serbest	serbest	serbest	Yörünge Elemanlarına Göre
$v(km/s)$	[0,0.4076,0]	serbest	serbest	serbest	Yörünge Elemanlarına Göre
$m(kg)$	301,454	serbest	serbest	serbest	serbest
$t(s)$	0	75.2	150.4	261	serbest

Yörüngeye yerleşme sınır koşulları $a, e, i, \Omega, \omega = [24361.14 \text{ km}, 0.7308, 28.5, 269.8, 130.5]$ olarak belirlenmiştir. Burada i, Ω, ω derece cinsinden ifade edilmiştir. İlgili kademelerin detaylı bilgileri ilgili çalışmadan elde edilmiştir [Benson, D., 2005].



Şekil 5: Çok Kademeli Fırlatma Aracı Yörünge Eniyilemesi

Referans çalışmada elde edilen azami kütle 7529.7123 kg, [Garrido, J.V., 2021]'da SPARTAN ile 7529.9284 kg olarak elde edilmiş, bizim çalışmamızda ise 7547.97 kg olarak elde edilmiştir.

Yeniden Kullanılabilir Fırlatma Aracı İniş Eniyilemesi

Yeniden kullanılabilir bir fırlatma aracının yavaşlama ve iniş uçuş aşamaları [Garrido, J.V., 2021] eniyilenmiştir. Buna göre 15 km'de serbest düşüşte olan fırlatma aracı iniş aşamasına ne zaman geçeceğine karar verip itki vektör kontrolü ile optimal bir şekilde yere iniş yapacaktır. Buna göre sistem dinamikleri NED (North-East-Down) koordinat ekseninde,

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= R_e V_N / r \\
\dot{y} &= R_e V_E / (r \cos \phi) \\
\dot{h} &= -V_D \\
\dot{V} &= -\frac{P_x}{m} - \frac{D}{m} - \mu \sin \gamma / r^2 \\
\dot{\gamma} &= \frac{P_y}{mV} + V \cos \gamma / r - \mu \cos \gamma / (Vr^2) + 2\Omega_E \sin \psi \cos \phi \\
\dot{\psi} &= \frac{P_z}{mV \cos \gamma} + V \tan \phi \cos \gamma \sin \psi / r - 2\Omega_E (\cos \psi \tan \gamma \cos \phi - \sin \phi) \\
\dot{m} &= -\|P\| / I_{sp} g_0 \\
\dot{P} &= u
\end{aligned} \tag{62}$$

ile ifade edilmektedir.

Burada u kontrol girdileri olup itki seviyesini kontrol etmektedir. Kullanılan görev parametreleri [6]'dan alınmıştır.

İlgili problemin çözümü için performans indisi:

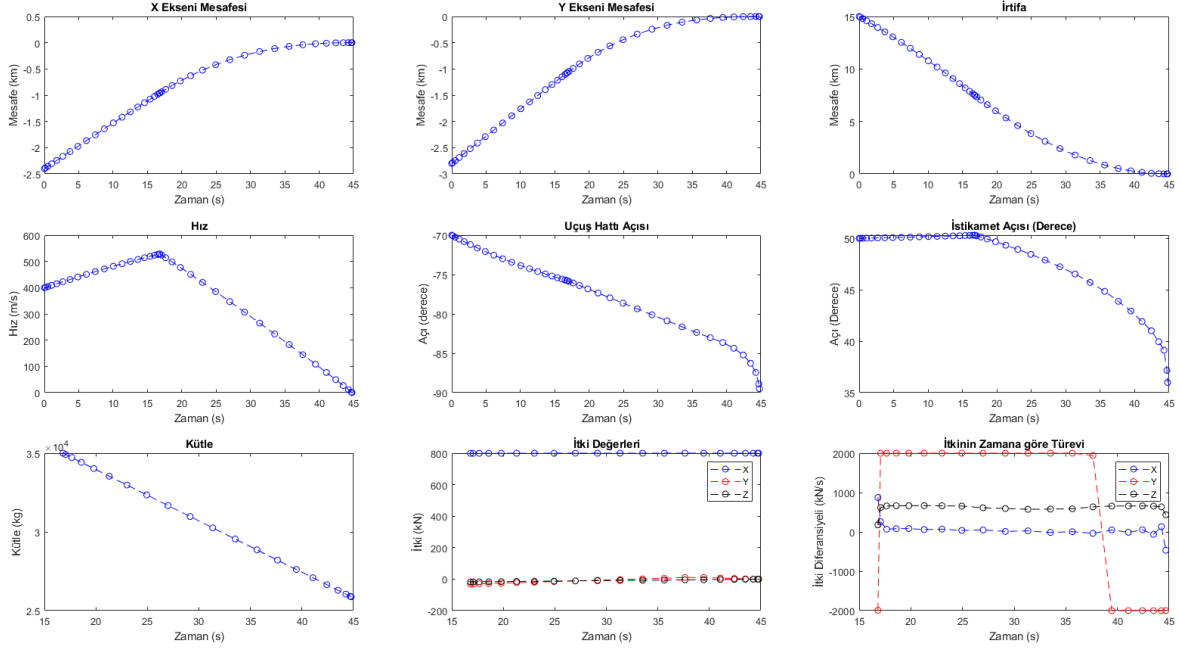
$$J = -m^{(2)}(t_{f,2}) \tag{63}$$

Problemin sınır koşulları (Tablo 3)'de, ve çözümü (Şekil 6)'de verilmiştir.

Tablo 3: Yeniden Kullanılabilir Fırlatma Aracı İniş Eniyilemesi Sınır Koşulları

	Başlangıç Sınır Koşulu	Uç Sınır Koşulu	
		Birinci Aşama	İkinci Aşama
$x(m)$	-2400	serbest	$-0.5 < x < 0.5$
$y(m)$	-2800	serbest	$-0.5 < y < 0.5$
$h(m)$	15000	serbest	$0 < h < 0.2$
$V(m/s)$	400	serbest	$0 < V < 0.2$
$\gamma(\text{derece})$	-70	serbest	$-90 < \gamma < -89.5$
$\psi(\text{derece})$	50	serbest	serbest
$m(kg)$	35000	serbest	$25000 <$
$t(s)$	0	serbest	serbest

Uçuşun ilk aşamasında ateşleme yok iken, ikinci aşamasında itki 400 ile 800 kN arasında kontrol edilebilecektir. x , y ve z eksenleri doğrultusunda aracın itkiyi kısma hızı, sırasıyla 1000, 2000 ve 667.6 N/s olarak kabul edilmiştir.



Şekil 6: Yeniden Kullanılabilir Fırlatma Aracı İniş Eniyilemesi Sonuçları

Referans çalışmada toplam uçuş süresi 43.8545 saniye olarak belirlenmiş olup, azami iniş kütlesi 25.98 tondur. Bizim çalışmamızda ise uçuş süresi 43.97 saniye olup azami iniş kütlesi 25.96 ton olarak belirlenmiştir.

Falcon 9 Birinci Kademesinin İniş

Falcon 9'un Return-to-Launch-Site görevi için yapılan çalışma [Garrido, J.V., 2021] üç aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada 9 motordan üçü kullanılarak fırlatma aracı iniş yapacağı konuma yönlendirilmektedir. İkinci aşama serbest düşüş olup üçüncü aşamada iniş ateşlemesi ile yumuşak iniş gerçekleştirilecektir.

Problemin çözümü için kullanılan dinamik denklemler,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_x &= \frac{T}{m} k \cos \theta - \frac{D}{m} \frac{v_x}{v} \\ \dot{v}_y &= \frac{T}{m} k \sin \theta - \frac{D}{m} \frac{v_y}{v} - g_0 \\ \dot{m} &= -\frac{T}{I_{sp} g_0} k\end{aligned}\quad (64)$$

Burada,

$$\begin{aligned}v^2 &= v_x^2 + v_y^2 \\ D &= \frac{1}{2} \rho_0 e^{-\frac{y}{h_0}} C_D \pi \frac{d^2}{4} v^2\end{aligned}\quad (65)$$

İlgili problemin çözümü için performans indisi:

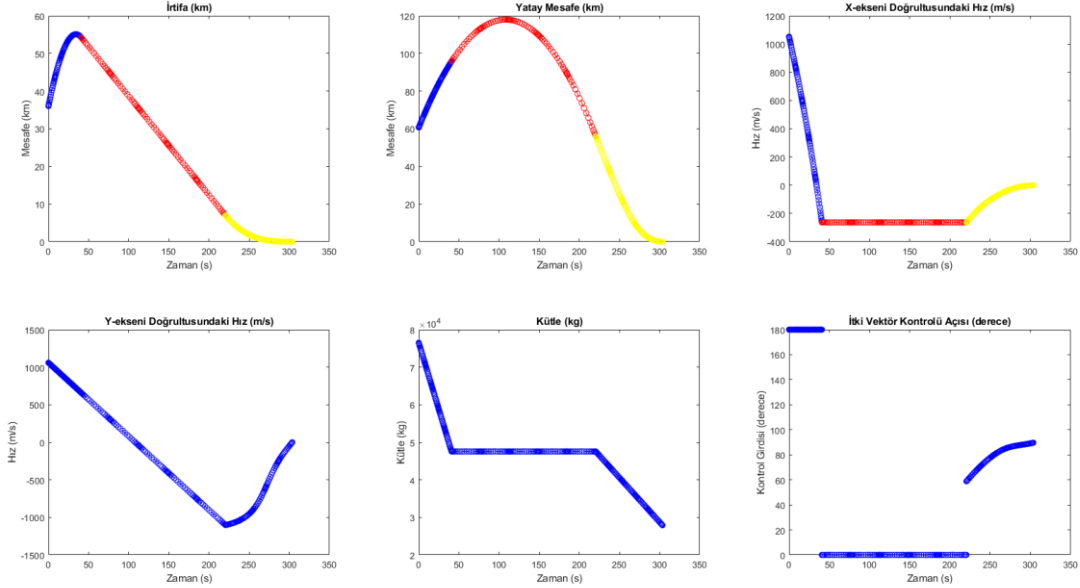
$$J = -m(t_f)\quad (66)$$

Problemin sınır koşulları (Tablo 4)'de, ve çözümü (Şekil 7) ve (Şekil 8)'de verilmiştir.

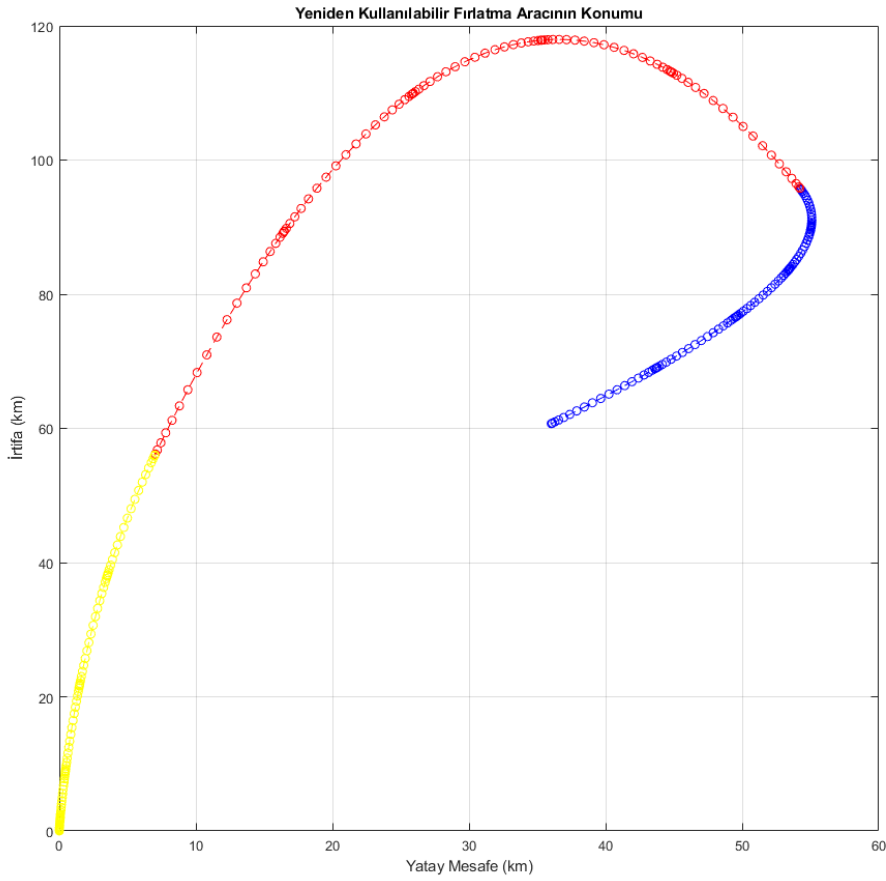
Tablo 4: Falcon 9 Birinci Kademe İniş Aşaması Yörünge Eniyilemesinin Sınır Koşulları

	Başlangıç Sınır Koşulu	Uç Sınır Koşulu		
		Birinci Aşama	İkinci Aşama	Üçüncü Aşama
$x(km)$	36.022	serbest	serbest	0
$y(km)$	60708	serbest	serbest	0
$v_x(km/s)$	1052	serbest	serbest	0
$v_y(m/s)$	1060	serbest	serbest	$-0.5 < v_y < 0.5$
$m(kg)$	76501	serbest	serbest	serbest
$t(s)$	0	40.8	serbest	serbest

Problemin ilk aşamasında itki seviyesi azami itkinin üçte biri, üçüncü aşamada ise dokuzda biri ile sınırlandırılmıştır. Aracın I_{sp} 'si 282 saniye, kalkış itkisi 5886 kN, çapı 3.66 m, sürükleme katsayısı 0.75 ve kuru kütlesi 25.6 ton olarak ele alınmıştır. Referans çalışmada elde edilen optimal sonuçlara göre, iniş kütlesi 27905.5554 kg olarak elde edilmiştir. Buradaki çalışmada ise elde edilen iniş kütlesi 27905.56 kg'dır.



Şekil 7: Falcon 9 Birinci Kademe İniş Aşaması Yörünge Eniyilemesinin Sonuçları



Şekil 8: Falcon 9 Birinci Kademe İniş Aşaması Optimal Yörüngesi

NPSAT1 Yönelim Kontrolü

Optimal yönelim kontrol problemlerine örnek olarak [Fahroo, F., 2008]'de paylaşılan ve Naval Postgraduate School'da geliştirilen deneysel uydu NPSAT1 kontrol edilmek istenmektedir. İlgili dinamikler:

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= \frac{1}{2} [\omega_x q_4 - \omega_y q_3 + \omega_z q_2] \\
 \dot{q}_2 &= \frac{1}{2} [\omega_x q_3 + \omega_y q_4 - \omega_z q_1] \\
 \dot{q}_3 &= \frac{1}{2} [-\omega_x q_2 + \omega_y q_1 + \omega_z q_4] \\
 \dot{q}_4 &= \frac{1}{2} [-\omega_x q_1 - \omega_y q_2 - \omega_z q_3] \\
 \dot{\omega}_x &= \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_y \omega_z + u_1 \\
 \dot{\omega}_y &= \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_x \omega_z + u_2 \\
 \dot{\omega}_z &= \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_x \omega_y + u_3
 \end{aligned} \tag{67}$$

Eniyileme probleminde uygulanan eşitlik ve eşitsizlik koşulları sırasıyla,

$$\begin{aligned} q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 &= 1 \\ q_4 &\geq 0 \end{aligned} \quad (68)$$

Burada kontrol torkları u_i ile gösterilmiş olup ± 0.01 N.m üst ve alt sınırlarına sahiptirler. $I_1 = 5, I_2 = 5.1$ ve $I_3 = 2$ olarak ele alınmıştır.

İlgili problemin çözümü için performans indisi:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} e^T e + 10w^T w + 100u^T u \, dt \quad (69)$$

olarak kullanılmıştır. Hata vektörü e ,

$$e = [q_1, q_2, q_3, q_4 - 1] \quad (70)$$

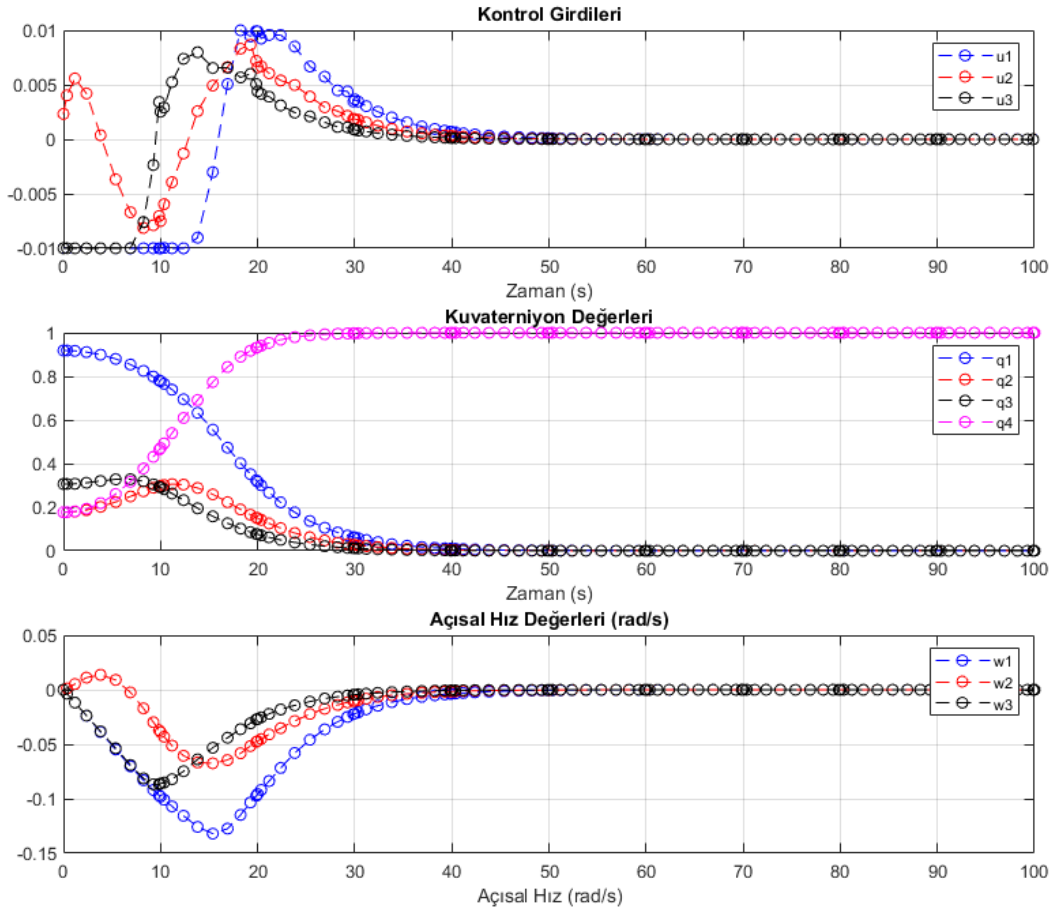
olarak tanımlanmıştır.

Problemin sınır koşulları (Tablo 5)'de, ve çözümü (Şekil 9)'da verilmiştir.

Tablo 5: NPSAT1 Optimal Yönelim Kontrolünün Sınır Koşulları

	Başlangıç Sınır Koşulu	Uç Sınır Koşulu
		Birinci Aşama
q_1	0.91856	0
q_2	0.17678	0
q_3	0.30619	0
q_4	0.17678	1
ω_x	0	0
ω_y	0	0
ω_z	0	0
$t(s)$	0	100

Optimal maliyet fonksiyonu sonucu paylaşılmadığından grafiklerdeki benzerlikler dışında bir karşılaştırma yapılamamıştır, fakat verilen sonuçlara göre aynı çözüme ulaşılmış ve denge noktası sağlanmıştır.



Şekil 9: NPSAT1 Optimal Yönelim Kontrolü

Starship Belly-Flop Manevrası [2]

Starship fırlatma aracı 50 metre uzunluğunda ve 100 ton olarak kabul edilmiş ve iniş manevrası olan Belly-Flop manevrası [Sagliano, M., 2021]'de eniyilenmiştir. Gimbal açılarının limiti 20'şer derece olarak ele alınmıştır. Azami itki seviyesi 2210 kN, I_{sp} 'si 380 saniye ve itki kısma oranı %40 olarak kabul edilmiştir. DLR'ın çalışmasında verilen performans indisi çalışmalarındaki sonuçlarla örtüşmediği fark edilmiştir. Referans olarak aldıkları başka bir sonuçla aynı performans indisini kullandıkları tahmin edilerek aynı sonuçlar elde edilmiştir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x \\
 \dot{y} &= v_y \\
 \dot{v}_x &= \frac{T_{max} u \sin(\theta + \delta)}{m} \\
 \dot{v}_y &= \frac{T_{max} u \cos(\theta + \delta)}{m} - g \\
 \dot{\theta}_z &= \omega_z \\
 \dot{\omega}_z &= M_z / I_z \\
 \dot{m} &= -\frac{T_{max} u}{g_0 I_{sp}}
 \end{aligned} \tag{71}$$

Burada u itki kısma oranı ve δ motor gimbal açısıdır. Moment hesabı:

$$M_z = -\frac{L}{2} T_{max} u \sin(\delta) \quad (72)$$

şeklinde yapılmaktadır.

İlgili problemin çözümü için performans indisi:

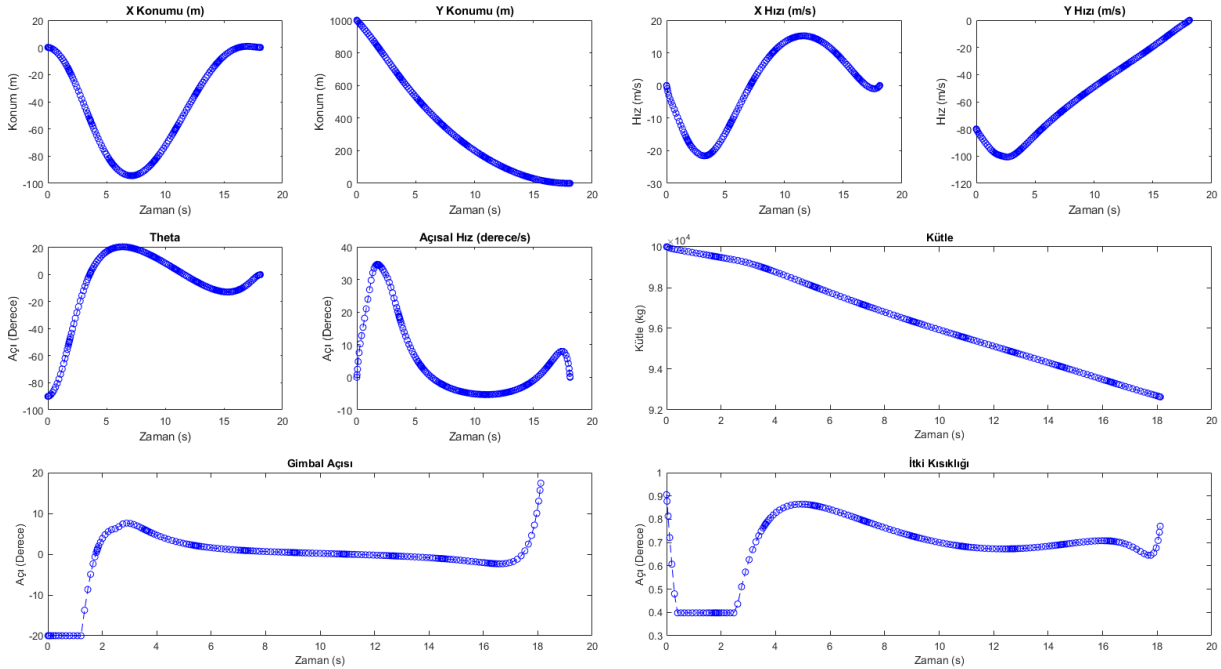
$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \delta^2 + u^2 + 2\omega_z^2 dt \quad (73)$$

Problemin sınır koşulları (Tablo 6)'de, ve çözümü (Şekil 10)'da verilmiştir.

Tablo 6: Starship Belly-Flop Manevrası Eniyilemesi

	Başlangıç Sınır Koşulu	Uç Sınır Koşulu
		Birinci Aşama
$x(m)$	0	0
$y(m)$	1000	0
$v_x(m/s)$	0	0
$v_y(m/s)$	-80	0
θ (rad)	$\frac{\pi}{2}$	0
ω (rad/s)	0	0
m (kg)	100000	serbest
$t(s)$	0	serbest

Orijinal çalışmanın elde ettiği kontrol sinyaline yakınsama gerçekleştirilmiş ve araç yaklaşık 7363.36 kg'lık yakıtla, referans çalışmada ifade edilen yaklaşık 7500 kg'a benzer şekilde, başarıyla indirilmiştir.



Şekil 10: Starship Belly-Flop Manevrası Eniyilemesi Sonuçları

İtki Kapasiteli Süzülen Yeniden Giriş Araçları

Referans çalışma [Moshman, N.D., 2014]'de ele alınan düşük L/D (ing. lift-to-drag) konfigürasyonlu yeniden giriş aracının parametreleri $\frac{L}{D} = 1.25$, azami itki seviyesi 40 kN, yüzey alanı 7.43 m^2 , burun yarıçapı 0.3048 m , kuru ve ıslak kütlesi sırasıyla 1360 ve 1814 kg olarak ele alınmıştır. İlgili aracın taşıma ve sürüklenme aerodinamik katsayıları, X-38 verilerinden yola çıkarak, sırasıyla,

$$\begin{aligned} C_L(\alpha) &= C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha \\ C_D(\alpha) &= C_{D0} + KC_L^n \end{aligned} \quad (74)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Buradaki katsayılar, $C_{L0} = -0.01$, $C_{L\alpha} = \frac{1}{160}$, $C_{D0} = 0.04$, $K = 3.5$, $n = 2$ 'dir.

Küresel koordinatlarda dönen dünya modeli altında yeniden giriş dinamikleri,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v \sin \gamma \\ \dot{\lambda} &= \frac{v \cos \gamma \cos \psi}{r \cos \lambda} \\ \dot{\phi} &= \frac{v \cos \gamma \sin \psi}{r} \\ \dot{v} &= \frac{T \cos \alpha}{m} - \frac{D}{m} - g \sin \gamma + \Omega_E^2 r F_1 \\ \dot{\gamma} &= \frac{T \sin \alpha \cos \alpha}{mv} + \frac{L \cos \sigma}{mv} + \left(\frac{v}{r} - \frac{g}{v}\right) \cos \gamma + 2\Omega_E C_2 + \Omega_E^2 \frac{r}{v} F_2 \\ \dot{\psi} &= \frac{T \sin \alpha \sin \sigma}{mv \cos \gamma} + \frac{L \sin \sigma}{mv \cos \gamma} - \frac{v \cos \gamma \cos \psi \tan \lambda}{r} - \frac{2\Omega_E C_3}{\cos \gamma} - \frac{\Omega_E^2 r F_3}{v \cos \gamma} \\ \dot{\alpha} &= u_1 \\ \dot{\sigma} &= u_2 \\ \dot{m} &= -\frac{T}{V_e} \end{aligned} \quad (75)$$

Burada,

$$\begin{aligned} F_1 &= \cos \lambda (\sin \gamma \cos \lambda - \cos \gamma \sin \lambda \sin \psi) \\ F_2 &= \cos \lambda (\cos \gamma \cos \lambda - \sin \gamma \sin \lambda \sin \psi) \\ F_3 &= \sin \lambda \cos \lambda \cos \psi \\ C_2 &= \cos \lambda \cos \psi \\ C_3 &= \cos \lambda \sin \lambda - \sin \gamma \cos \lambda \sin \psi \end{aligned} \quad (76)$$

$$q = \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$L = q S C_L$$

$$D = q S C_D$$

Hücum açısı ve yatış açısı u_1 ve u_2 ile kontrol edilmekte olup ilgili kontrol sinyalleri bu açıların türevlerini ifade etmektedir. İlgili türevler için sırasıyla 100 *derece/s* ve 10 *derece/s* kısıtı konmuştur. V_e çıkış hızı 3140 m/s olarak ele alınmıştır.

İlgili problemin çözümü için performans indisi Mayer formatında:

$$J = \lambda(t_f) \quad (77)$$

azami boylamı ifade edecek şekilde belirlenmiştir.

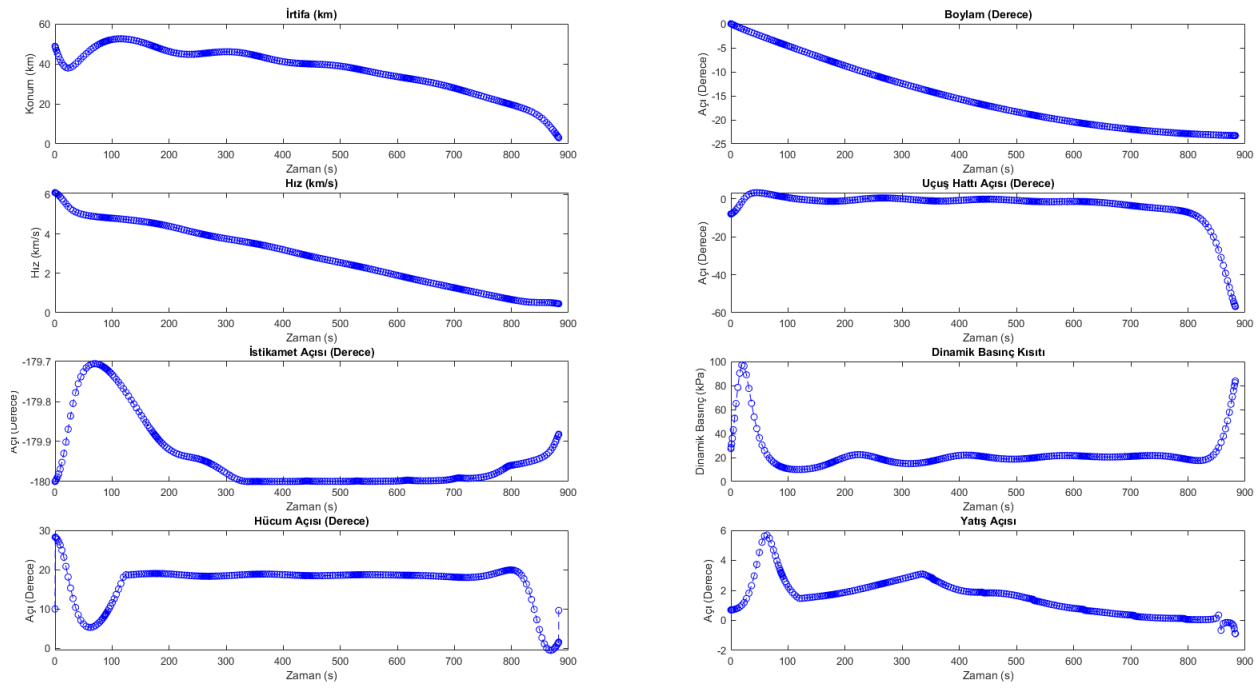
Problem iki farklı koşul için de çözülmüştür. Buna göre ilkinde itki uygulanmayacakken ikincisinde itki uygulanabilmektedir. İtkili olan durumda başlangıç uçuş hattı açısı 0 olarak alınmıştır. İtkisiz olan durumda ise asgari dinamik basınç 10 kPa olarak alınmış olup başlangıç uçuş hattı açısı -8 derecedir.

Problemin sınır koşulları (Tablo 7)'de verilmiştir.

Tablo 7: İtki Kapasiteli Süzülen Yeniden Giriş Aracı için Sınır Koşulları

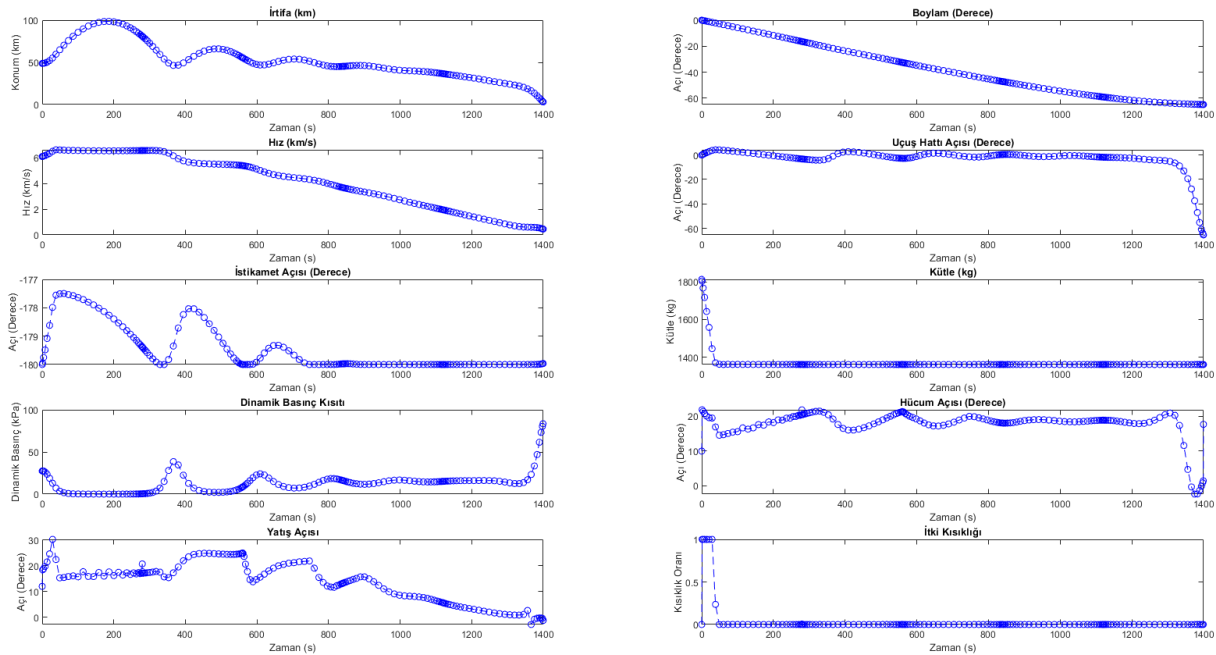
	Başlangıç Sınır Koşulu	Uç Sınır Koşulu
		Birinci Aşama
$h(km)$	48.768	3.050
$\lambda(derece)$	0	serbest
$\phi(derece)$	0	serbest
$v(km/s)$	-6.096	>0.457
$\gamma(derece)$	-8/0	serbest
$\psi(derece)$	-180	serbest
$\alpha(derece)$	10	serbest
$\sigma(derece)$	serbest	serbest
$m(kg)$	1814	>1361
$t(s)$	0	serbest

İlgili çalışmada itkisiz uçuş için, 10 kPa'lık alt dinamik basınç kısıtı altında, düşük L/D oranlı aracın ilgili performans indisi sonucunda, -8 derecelik başlangıç uçuş hattı koşulu ile elde edilen uçuşta yaklaşık 19.2 derecelik bir boylam seyahat edilmiştir. Bizim çalışmamızda elde edilen azami boylam 23.27 derecedir ve sonuçlar (Şekil 11)'de verilmiştir.



Şekil 11: İtkisiz Süzülen Yeniden Giriş Aracı için Optimal Yörünge Sonuçları

İtkili uçuş için, düşük L/D oranlı aracın uçuşu ilgili performans indisi için yaklaşık 1300 saniye sürdüğü gözlemlenmektedir. Başlangıç koşulu 0 derecelik başlangıç uçuş hattı olan ve dinamik basınç alt kısıtı uygulanmayan durumda azami boylam yaklaşık 50 derece olarak elde edilmiştir. Bizim çalışmamızda elde edilen azami boylam 64.88 derecedir ve sonuçlar (Şekil 12)'de verilmiştir.



Şekil 12: İtkili Süzülen Yeniden Giriş Aracı için Optimal Yörünge Sonuçları

Beş Aşamalı İniş Yörünge Eniyilemesi

Referans alınan çalışma [Li, Y., 2020]'da Falcon 9'un birinci kademesinin yörüngesine benzer bir eniyileme gerçekleştirilmiştir. İlgili problemde herhangi bir seyir kısıtına, örneğin ısı akısına, dinamik basınca veya aerodinamik yük kısıtına yer verilmemiştir. Kullanılan dinamik denklem takımı,

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v \cos \gamma \cos \psi \\
\dot{y} &= v \cos \gamma \sin \psi \\
\dot{z} &= v \sin \gamma \\
\dot{v} &= \frac{T \cos \alpha \cos \beta - D - G \sin \gamma}{m} \\
\dot{\gamma} &= \frac{T \sin \alpha + L - G \cos \gamma}{mv} \\
\dot{\psi} &= \frac{T \cos \alpha \sin \beta - Y}{mv \cos \gamma} \\
\dot{m} &= -\frac{T}{g_0 I_{sp}} \\
\dot{\alpha} &= u_1 \\
\dot{\beta} &= u_2
\end{aligned} \tag{78}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} \rho v^2 S C_L \\
D &= \frac{1}{2} \rho v^2 S C_D \\
Y &= \frac{1}{2} \rho v^2 S C_Y \\
C_L &= k_l \sin 2\alpha \\
C_D &= k_D \sin(2\alpha - \pi/2) + b_D \\
C_Y &= -k_l \sin(2\beta) \\
G &= m g_0 \left(\frac{R}{R+z} \right)^2
\end{aligned} \tag{79}$$

$I_{sp} = 304$ s, yüzey alanı $S = 10.752$ m², $k_l = 4$, $k_D = 6.5$, $b_D = 9.4$ olarak ele alınmaktadır.

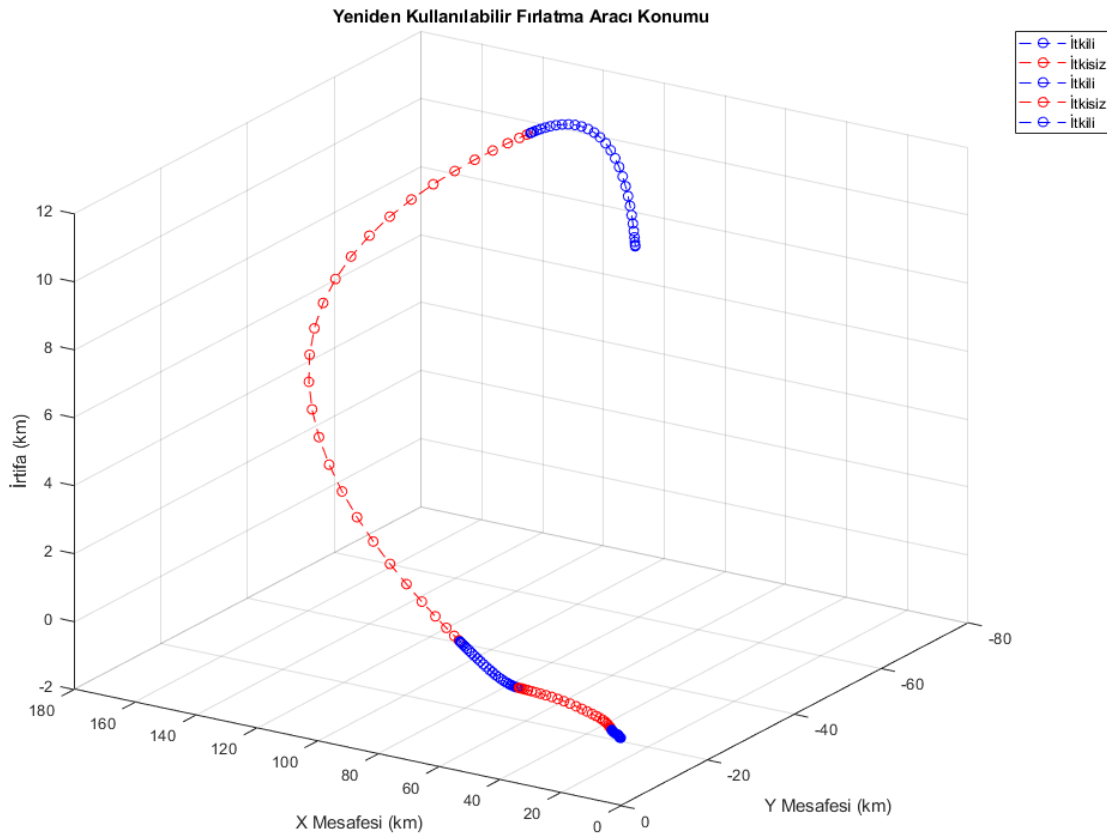
Atmosfer modeli olarak eksponansiyel model kullanılmıştır. Uçuşun ilk aşamasında $\dot{\psi} = 0$ ve $\dot{\beta} = 0$ olacağından kontrol girdileri itki seviyesi ve hücum açısının türevidir. İkinci aşamada itki uygulanmamakta ve $\dot{\psi} = 0$, $\dot{\beta} = 0$ olacak şekilde uçuş gerçekleştirilmektedir. Buna göre tek kontrol girdisi hücum açısının türevidir. Üçüncü aşamada 3 boyutlu uçuşa geçiş yapılır ve kontrol girdileri itki seviyesi, hücum açısı ve kayma açısının türevleridir. Dördüncü aşama itkisiz 3 boyutlu uçuştur ve hücum açısı ve yana kayma açısının türevleri kontrol edilecektir. Son aşama olan iniş aşaması $\dot{\psi} = 0$ ve $\dot{\beta} = 0$ olarak 2 boyutlu düzlemde gerçekleştirilir ve kontrol girdileri itki ile hücum açısının türevinin kontrolüdür. İlgili problemin çözümü için performans indisi:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} T^2 + u_1^2 + u_2^2 dt \tag{80}$$

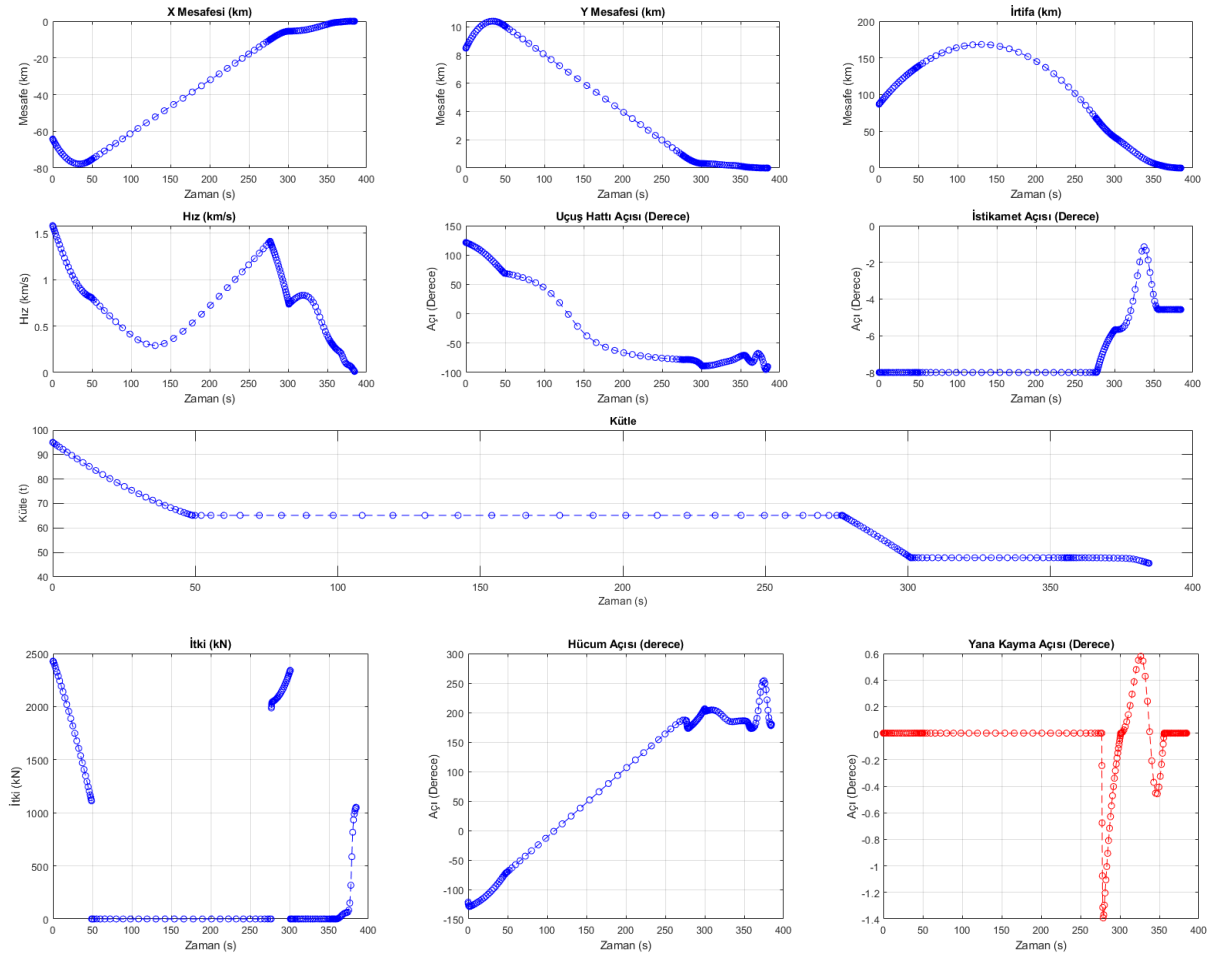
Problemin sınır koşulları (Tablo 8)'de ve sonuçlar (Şekil 13) ve (Şekil 14)'de verilmiştir.

Tablo 8: Beş Aşamalı İniş Yörünge Eniyilemesi

	Başlangıç Sınır Koşulu	Uç Sınır Koşulu				
		Birinci Aşama	İkinci Aşama	Üçüncü Aşama	Dördüncü Aşama	Beşinci Aşama
$t(s)$	0	49	277	301	356	384.6
$x(m)$	-64200	serbest	serbest	-5420	-1000	0
$y(m)$	8490	serbest	serbest	320	80	serbest
$z(m)$	87000	137850	serbest	serbest	4400	5
γ (derece)	121.5	69	serbest	-89	-71	-90
ψ (derece)	-8	-8	-8	serbest	-4.57	serbest
v (m/s)	1580	810	serbest	735	serbest	10
m (kg)	95000	serbest	serbest	serbest	serbest	serbest
α (derece)	-121.5	-71	186	202	serbest	180
β (derece)	0	0	0	0	0	0



Şekil 13: Beş Aşamalı Optimal İniş Yörüngesi



Şekil 14: Beş Aşamalı Optimal İniş Yörüngesi Sonuçları

Yapılan çalışmada elde edilen iniş kütlesi grafiklerden yaklaşık 40 ton olarak anlaşılmaktadır. Azami itki seviyesi çalışmada paylaşılmadığından yaklaşık olarak 2500 kN olarak kabul edilmiştir. Hücum açısı ve yana kayma açılarının türevleri için üst sınır değerleri ve performans indisinde kullanılan çarpanlar verilmediğinden sırasıyla saniyede 10 derece ve 1 olarak kabul edilmişlerdir. Durum vektörleri eniyileme sırasında ne tür sınırlar arasında alındığı da dahil edilmediğinden sonuçlar üzerinde farklılıklar gözlemlenmiş olsa da, elde edilen iniş kütlesi değeri olan 47 ton, orijinal çalışmadakinden çok daha yüksektir.

Baştan Sona Dikey Kalkış ve Dikey İnişli İki Kademeli Yeniden Kullanılabilir Fırlatma Aracı Yörünge Eniyilemesi

Referans alınan çalışma [Ma, L., 2018]'da iki kademeli bir yeniden kullanılabilir fırlatma aracı, birinci kademesi kalkış noktasına geri dönecek ve ikinci kademesi hedef yörüngeye azami faydalı yük kütlesini yerleştirecek şekilde eniyilenmiştir. Burada Earth-centred Inertial Koordinat Ekseninde (ECI) dönen dünya modeli kullanılarak ilerletimler sağlanmıştır. İlgili dinamik denklemler,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} &= -\frac{\mu}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} + \frac{\vec{T}}{m} + \frac{\vec{D}}{m} \\ \dot{m} &= -\frac{\|\vec{T}\|}{g_0 I_{sp}} \end{aligned} \quad (81)$$

Buradaki tanımlar, Delta III örneğinde verilenlerle aynıdır ve tekrar verilmeyecektir.

İlgili problemin çözümü için performans indisi:

$$J = -m^{(3)}(t_{f,3}) \quad (82)$$

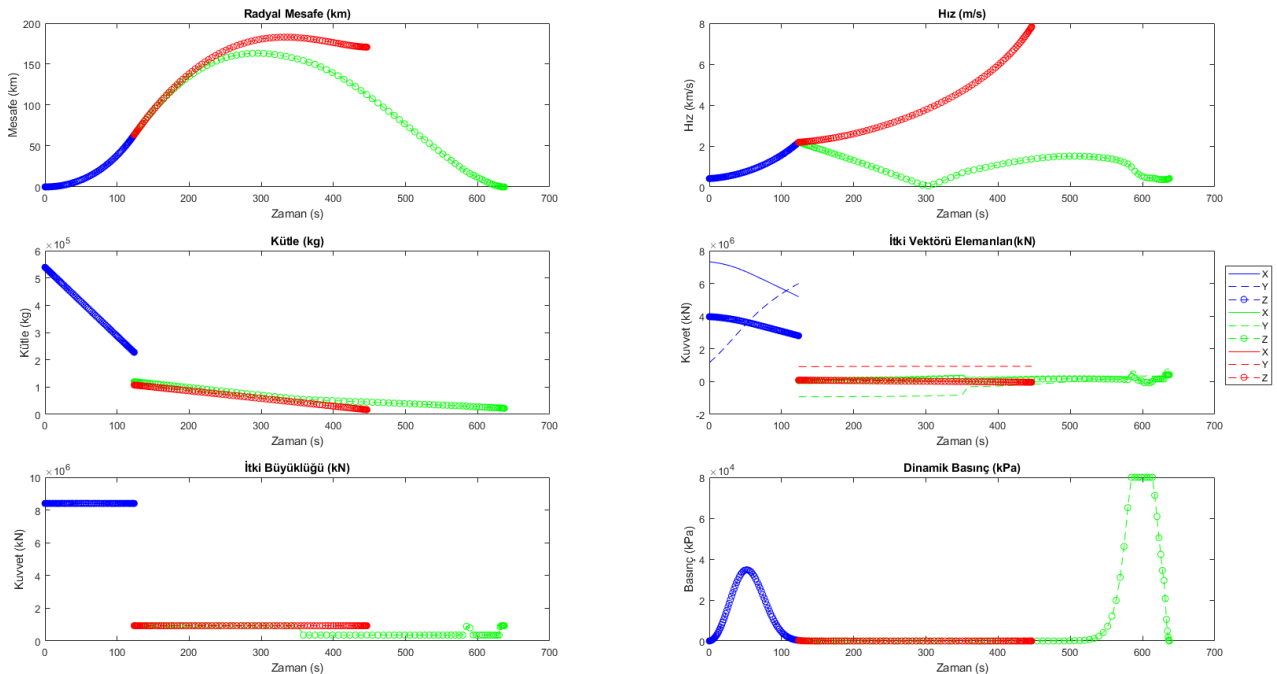
olarak belirlenmiştir. Fırlatma ve iniş aşamalarında 80 kPa dinamik basınç kısıtı ve 10 g'lık dinamik yük kısıtı vardır. İlgili problemin çözümü için kısıtsız çözüm sonuçları başlangıç tahmini olarak kullanılarak kısıtlı problemin çözümüne ulaşılabilmektedir.

Problemin sınır koşulları (Tablo 9)'da ve sonuçlar (Şekil 15)'de verilmiştir. Yeşil ve kırmızı ile çizilen grafikler sırasıyla, yörüngeye yerleşen ikinci kademeye ve iniş yapacak olan birinci kademeyi temsil etmektedir.

Tablo 9: Beş Aşamalı İniş Yörünge Eniyilemesi

	Başlangıç Sınır Koşulu	Uç Sınır Koşulu		
		Birinci Aşama	İkinci Aşama: İniş	İkinci Aşama: Yörüngeye Yerleşme
$r(km)$	[5605.2,0,3043.4]	serbest	[5605.2,0,3043.4]	Yörünge Elemanlarına Göre
$v(km/s)$	[0,0.4076,0]	serbest	[0,0.4076,0]	Yörünge Elemanlarına Göre
$m(kg)$	539,010	serbest	serbest	serbest
$t(s)$	0	serbest	serbest	serbest

Yörüngeye yerleşme sınır koşulları $a, e, i, \Omega, \omega = [24361.14 km, 0.7308, 28.5, 269.8, 130.5]$ olarak evvelki örnekle aynı seçilmiştir. Burada i, Ω, ω derece cinsinden ifade edilmiştir. İlgili kademelerin detaylı bilgileri ilgili çalışmadan elde edilmiştir [Ma, L., 2018].



Şekil 15: Baştan Sona Dikey Kalkış ve Dikey İnişli İki Kademeli Yeniden Kullanılabilir Fırlatma Aracının Dinamik Basınç Kısıtı altında Yörünge Eniyilemesi

Referans çalışmada iniş azami kütlesi 22.1 ton olarak bulunmuş ve çalışmamızda aynı sonuca ulaşılarak doğrulanmıştır.

SONUÇ

Pseudospectral Optimal Kontrol'e dayalı birimsel, çok-zincirli ve uyarlanabilir ağ yapısına sahip bir yazılım geliştirilerek GPOPS ve DIDO gibi akademi ve endüstri dünyasında kendini kanıtlamış ve standartlaşmış yazılımlarla karşılaştırılmış ve doğrulanmıştır. Bu yazılım havacılık ve uzay endüstrisinde karşılaşılan herhangi bir yörünge tasarımı, gerçek zamanlı optimal kontrolü ve gözlemci tasarımı için uygulanabilir olmakla birlikte, birimsel oluşu yeni modüllerin geliştirilmesini, bunların test edilmesini, doğrulanmasını kolaylaştırmakta ve en önemlisi özel uçuş kodlarının geliştirilmesini mümkün kılmaktadır.

Bu çalışma duruma ve kontrole bağlı gecikme dinamiklerinin katılması, stokastik problemlerin çözülebilmesi için Polynomial Chaos Expansion (PCE) spektral metoduna dayalı belirsizlik analizlerinin dahil edilmesi, kovaryans kontrolü, olasılığa dayalı kısıtlar ve duruma bağlı geçişken koşulların eklenmesiyle geliştirilecektir.

Kaynaklar

- Bedrossian, N., Bhatt, S., Lammers, M., Nguyen, L., Zhang, Y., 2007. *First ever flight demonstration of zero propellant maneuver attitude control concept*, AIAA-2007-6734
- Benson, D., 2012. *A Gauss Pseudospectral Transcription for Optimal Control*, Eylül
- Betts, J.T., 2010. *Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming*, Society for Industrial and Applied Mathematics
- Fahroo, F., Ross, M.I., 2008. *Pseudospectral Methods for Infinite-Horizon Optimal Control Problems*, Journal of Guidance Control and Dynamics
- Garrido, J.V., Sagliano, M., 2021. *Ascent and Descent Guidance of Multistage Rockets via Pseudospectral Methods*, AIAA Scitech 2021 Forum
- Gong, Q., Ross, I.M., Kang, W., Fahroo, F., 2007. *Connections Between the Covector Mapping Theorem and Convergence of Pseudospectral Methods for Optimal Control*, Computational Optimization and Applications
- Li, Y., Chen, W., Zhou, H., Yang, L., 2020. *Conjugate Gradient Method with Pseudospectral Collocation Scheme for Optimal Rocket Landing Guidance*, Aerospace Science and Technology, Volume 104, Eylül
- Ma, L., Wang, K., Shao, Z., Song, Z., Biegler, L.T., 2018, *Direct Trajectory Optimization Framework for Vertical Takeoff and Vertical Landing Reusable Rockets: Case Study of Two-Stage Rockets*, Engineering Optimization
- Moshman, N.D., Proulx, R.J., 2014. *Range Improvements in Gliding Reentry Vehicles from Thrust Capability*, Journal of Spacecraft and Rockets
- Rao, A.V., et al., 2010. *Algorithm 902: GPOPS, A MATLAB Software for Solving Multi-phase Optimal Control Problems using the Gauss Pseudospectral Method*, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 37
- Sagliano, M., Seelbinder, D., Theil, S., 2021. *SPARTAN: Rapid Trajectory Analysis via Pseudospectral Methods*, ICATT 2021
- Trefethen, L. N., 2000, *Spectral Methods in MATLAB*, SIAM, Philadelphia, PA
- Wang, X., Liu, J., Peng, H., 2021, *Symplectic Pseudospectral Methods for Optimal Control, Theory and Applications in Path Planning*, Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering, Springer