

STANDART ADI METODUNUN VE BLOK ARAYÜZÜNDE KAPALI(İMLİCİT) SINIR KOŞULLARININ CFL3D AÇIK KAYNAK KODUNA UYGULANMASI VE HİPERSONİK HIZLARDA YAKINSAMA ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Melikşah KOCA¹

Orta Doğu Teknik Üniversitesi/Havacılık ve
Uzay Mühendisliği, Ankara

Sinan EYİ²

Orta Doğu Teknik Üniversitesi/Havacılık ve
Uzay Mühendisliği, Ankara

ÖZET

Bu makalede CFL3D açık kaynak koduna kapalı(İng. implicit) metotlardan olan yaklaşık çarpanlara ayırma yöntemlerinden Standart ADI(Alternating direction implicit) metodu ve blok ara yüzlerinde kapalı sınır koşulları eklenmiş ve farklı akış durumlarında yakınsama özellikleri incelenmiştir. Analizler Apollo kapsülü, süpersonik difüzör ve sıkıştırma rampası geometrileri üzerinde yapılmıştır. Çoklu çözüm ağı uygulamalarında tekli çözüm ağlarına göre oldukça hızlı sonuçlar alındığı gözlemlenmiştir. Fakat blok sayısı arttıkça Standart ADI metodu için blok ara yüzlerinde Jacobian matrisinin bütünlüğünün bozulduğu, bazı katsayıların ihmal edildiği ve kapalılığın bozulduğu görülmüştür. Bu bozulma yakınsama performansını oldukça düşürmektedir. Bu durumun telafisi için blok ara yüzlerinde kapalı sınır koşulları uygulanmış ve blok sayısı ne kadar artarsa artsın yakınsama performansından kayıp olmadığı görülmüştür. Standart ADI metodunun çok bloklu çözüm ağlarıyla kullanılacağı zaman blok ara yüzlerinde kapalı sınır koşullarının muhakkak kullanılması gerektiğine kanaat getirilmiştir.

GİRİŞ

Hesaplamalı akışkanlar dinamiğinde, Navier-Stokes (N-S) denklemlerini çözen sayısal algoritmalar iki yöntem içerir: mekansal ayrıklaştırma ve zaman-ilerleme prosedürü. Mekansal ayrıklaştırma, mekansal doğruluk ve çözünürlük ile ilişkilidir, zaman entegrasyonu ise hatalarla başa çıkma yeteneği ve hesaplama verimliliği ile yakından ilişkilidir. Tipik zaman adımlaması yöntemleri iki ana kategoriye ayrılmaktadır. Çok aşamalı Runge-Kutta yöntemi [Jameson, 1983] tarafından temsil edilen açık(İng. explicit) algoritmalar, yüksek mertebeden doğruluk sağlar, ancak yüksek Reynolds sayılı, duvarla sınırlı simülasyonlarda ince sınır katmanlarını çözmek için son derece küçük zaman adımları gerektirir (Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) koşulundan dolayı). Buna karşılık, kapalı (implicit) zaman entegrasyon şemaları, koşulsuz kararlı özelliği, verilebilen büyük zaman adımları nedeniyle daha verimli alternatiflerdir. Tamamen kapalı zaman entegrasyonu şemaları yönetici denklemlerin çözümü esnasında oluşan Jacobian matrisinin büyük olması sebebiyle her ne kadar yakınsama özelliği olarak en iyi yöntem olsa da bilgisayarlı olarak masraflı olarak görülmektedir. Jacobian matrisi yaklaşık çarpanlara ayırma yöntemleri kullanılarak tridiagonal matrislere

¹ Araştırma Görevlisi, Havacılık ve Uzay Müh. Böl., E-posta: melikshah@metu.edu.tr

² Profesör, Havacılık ve Uzay Müh. Böl., E-posta: seyi@metu.edu.tr

çevrilip Thomas algoritması ile çözülmektedir. Yaklaşık çarpanlara ayırma yöntemi ilk olarak R. Beam ve R.F. Warming tarafından Standart ADI yöntemi olarak tanıtılmıştır[Beam ve Warming, 1976]. Daha sonrasında Diyagonal dominant ADI olarak J. Bardina ve C.K. Lombard [Bardina ve Lombard, 1987] ve Diyagonalize Diyagonal Dominant olarak G.H. Klopfer tarafından geliştirilmiştir[Klopfer, 1998]. Geliştirilen bu metodlar T.H. Pulliam, R.W. MacCormack ve S. Venkateswaran tarafından karşılaştırılmıştır[Pulliam, MacCormack ve Venkateswaran, 1998].

CFL3D (Hesaplamalı Akışkanlar Laboratuvarı - 3D) açık kaynak kodu 1980'li yılların başında NASA Langley Araştırma Merkezi ve Bilim ve Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Enstitüsü'nü (ICASE) hesaplamalı akışkanlar mekaniğinde ve sayısal metotlarda önde gelen bilim adamlarının birlikte çalışması sonucunda oluşturulmuştur[Rumsey, Bierdon ve Thomas, 1997]. CFL3D, Reynolds ortalama Navier-Stokes denklemlerinin zamana bağlı korunum yasası formunu çözer. Mekansal ayrıklaştırma, yarı ayrık bir sonlu hacim yaklaşımını içerir. Konvektif ve basınç terimleri için tek taraflı sonlu farklar (*İng. Upwind-biased*) kullanılırken, kesme gerilimi ve ısı transferi terimleri için merkezi fark kullanılır. Kapalı zaman entegrasyonu vardır ve daimi veya daimi olmayan akışları çözebilir. Yakınsama hızlandırması için çoklu grid(*İng. Multigrid*) ve ağ sıralaması (*İng. Mesh sequencing*) mevcuttur. Çok sayıda türbülans modeli sağlanmıştır. CFL3D herhangi bir grid oluşturma yazılımı içermez. Gridler dışarıdan temin edilmelidir[Krist, Rumsey, Bierdon ve Thomas, 1998].

CFL3D zaman adımlaması alt kodlarında kodun yazarları tarafından özellikle transonik hızlarda olmak üzere birçok hız aralığında en iyi sonucu verdiği tespit edilen zaman terimlerinin Jacobian matrisine diagonal olarak eklenmesiyle elde edilen yaklaşık çarpanlara ayırma yöntemini kullanmaktadır[Thomas, 1991]. CFL3D kodu transonik akışlar için yazılmış olup hipersonik hızlarda denendiği tek bir makale bulunmaktadır[Richardson ve diğerleri, 1989]. Yaklaşık çarpanlara ayırma metodlarının yakınsama özelliklerinin probleme göre değişkenlik göstermektedir. Bazı yaklaşık çarpanlara ayırma metodlarında diyagonal dominantlığa göre kapalı sınır koşullarına ihtiyaç duyulmamaktadır. Standart ADI metodu koşulsuz stabil olsa da çok bloklu çözüm ağlarında yakınsama performansının düştüğü gözlemlenmiş ve bu problemi aşmaya yönelik çalışmalar yapılmıştır. CFL3D zaman adımlaması alt kodlarına yöntem kısmında detaylı derivasyonları verilen yöntemler uygulanıp gerekli karşılaştırmalar yapılmıştır.

YÖNTEM

Yönetici Denklemler:

Çözümü yapılacak denklemler sıkıştırılabilir zamana bağlı tam Reynolds-ortalama Navier-Stokes denklemleri genelleştirilmiş koordinatlarda aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{F} - \hat{F}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\hat{G} - \hat{G}_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\hat{H} - \hat{H}_v)}{\partial \zeta} = 0 \quad (1)$$

$$J \frac{\partial Q}{\partial t} + R(Q) = 0, \quad J = \frac{\partial(x, y, z, t)}{\partial(\xi, \eta, \zeta, t)} \quad \text{ve} \quad \hat{Q} = JQ = J \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$R(Q) = \frac{\partial(\hat{F} - \hat{F}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\hat{G} - \hat{G}_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\hat{H} - \hat{H}_v)}{\partial \zeta} \quad (3)$$

J matrisi koordinat transformasyon matrisidir ve çözüm ağındaki hücrelerin hacmini temsil etmektedir.

$$J \frac{\partial Q^{m+1}}{\partial t} + R(Q^{m+1}) = 0 \quad (4)$$

$R(Q^{m+1})$ Taylor serisi ile doğrusallaştırılması ve yüksek dereceli terimlerin ihmal edilmesiyle aşağıdaki denklem elde edilir.

$$R(Q^{m+1}) = R(Q^m) + \left. \frac{\partial R}{\partial Q} \right|^m \Delta Q^{m+1} + O(\|Q^{m+1}\|^2) \quad (5)$$

4 numaralı denklemden elde edilen denklemin 3 numaralı denkleme koyulmasıyla aşağıdaki eşitlik elde edilmiş olur.

$$\left(\frac{J}{\Delta t} I + \left. \frac{\partial R}{\partial Q} \right|^m \right) \Delta Q^{m+1} = -R(Q^m) \quad (6)$$

$\left. \frac{\partial R}{\partial Q} \right|^m$ terimi akı Jacobianı temsil etmektedir. 3 numaralı denklemin 6 numaralı denkleme yerine koyulmasıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\{I + J^{-1} \Delta t (\delta_{\xi} A_{\xi} + \delta_{\eta} B_{\eta} + \delta_{\zeta} C_{\zeta})\} \Delta Q^{m+1} = -J^{-1} \Delta t R(Q^m) \quad (7)$$

A_{ξ} , B_{η} ve C_{ζ} aşağıda verilmiştir. δ_{ξ} , δ_{η} ve δ_{ζ} merkezi fark operatörüdür.

$$A_{\xi} = \frac{\partial(\hat{F} - \hat{F}_v)}{\partial Q}, B_{\eta} = \frac{\partial(\hat{G} - \hat{G}_v)}{\partial Q} \text{ and } C_{\zeta} = \frac{\partial(\hat{H} - \hat{H}_v)}{\partial Q} \quad (8)$$

7 numaralı denklemden eşitliğin sol tarafındaki Jacobian matrisi aşağıdaki Standart ADI yöntemiyle tridiagonal forma çevrilmiştir.

Standart ADI Yöntemi:

7 numaralı denklemin yaklaşım olmadan çözmek kodlama ve hesaplama açısından maliyetli ve zordur. Dolayısıyla Standart ADI yöntemi kullanarak eşitliğin sol tarafındaki matrisi tridiagonal matrislere bölmek ve her bir yön için denklemler sistemini ayrı ayrı çözmek daha verimli olacaktır. 7 numaralı denklemindeki eşitliğin sol tarafındaki toplam aşağıdaki gibi çarpım olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \{I + J^{-1}\Delta t\delta_{\xi}A_{\xi}\} * \{I + J^{-1}\Delta t\delta_{\eta}B_{\eta}\} * \{I + J^{-1}\Delta t\delta_{\zeta}C_{\zeta}\}\Delta Q^{m+1} \\ & = -J^{-1}\Delta tR(Q^m) \end{aligned} \quad (9)$$

Yaklaşım sal çarpanlara ayırma yönteminin uygulanmasının ardından 9 numaralı denklem 3 yönde çözülebilir.

$$\{I + J^{-1}\Delta t\delta_{\xi}A_{\xi}\}q_{\xi} = -J^{-1}\Delta tR(Q^m) \quad (10)$$

$$\{I + J^{-1}\Delta t\delta_{\eta}B_{\eta}\}q_{\eta} = q_{\xi} \quad (11)$$

$$\{I + J^{-1}\Delta t\delta_{\zeta}C_{\zeta}\}q_{\zeta} = q_{\eta} \quad (12)$$

$$q_{\zeta} = \Delta Q^{m+1} \quad (13)$$

ΔQ^{m+1} teriminin elde edilmesinin ardından Q^{m+1} terimi güncellenebilir.

$$Q^{m+1} = Q^m + \Delta Q^{m+1} \quad (14)$$

Uygulanan Standart ADI yaklaşık çarpanlara ayırma yöntemi 7 numaralı denklemdeki eşitliğin sol tarafındaki toplamı 9 numaralı denklemdeki gibi çarpım olarak yazmasından kaynaklanan hata terimleri oluşmaktadır. Bu terimler 9 numaralı denklemde 7 numaralı denklemin çıkarılmasıyla aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \varepsilon = & J^{-1}\Delta t\delta_{\xi}A_{\xi} * J^{-1}\Delta t\delta_{\eta}B_{\eta} * J^{-1}\Delta t\delta_{\zeta}C_{\zeta} + J^{-1}\Delta t\delta_{\xi}A_{\xi} * J^{-1}\Delta t\delta_{\eta}B_{\eta} \\ & + J^{-1}\Delta t\delta_{\xi}A_{\xi} * J^{-1}\Delta t\delta_{\zeta}C_{\zeta} + J^{-1}\Delta t\delta_{\eta}B_{\eta} * J^{-1}\Delta t\delta_{\zeta}C_{\zeta} \end{aligned} \quad (15)$$

Daha önce bahsedildiği gibi J matrisi çözüm ağındaki hücrenin hacmine denk gelmektedir. Dolayısıyla pseudo zaman adımlaması terimi olan $J^{-1}\Delta t$ terimi yüksek CFL sayısı değerleri için oldukça büyük olmaktadır. Bu durumda hata sayısını oldukça yükseltmektedir. Standart ADI metodu için hata terimlerinin derecesi $(J^{-1}\Delta t)^3$ olmaktadır.

Blok Arayüzlerinde Kapalı(implicit) Sınır Koşulları:

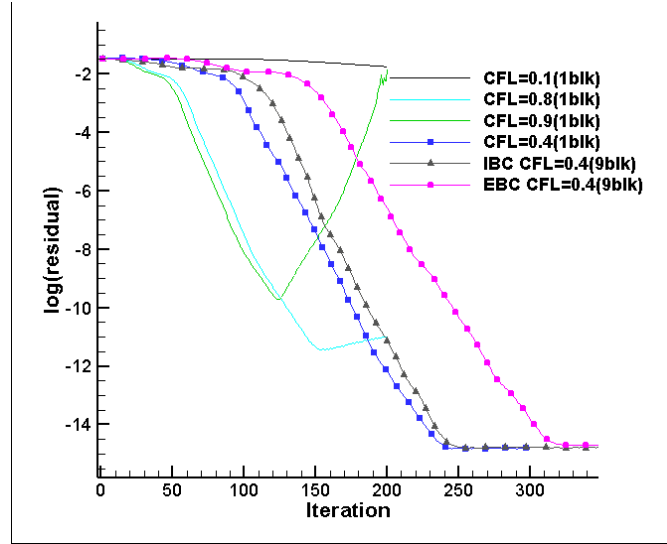
Çok bloklu çözüm ağlarında blokların her bir bilgisayar çekirdeğine paylaştırılması ve bloklar arasında açık sınır koşulu kullanılması ve ayrı ayrı Thomas algoritmasıyla çözülmesi sebebiyle bloklar arası kapalılık bozulmaktadır[Jin, Liao ve Cai, 2020][Moon, Hong, You, 2020]. Örneğin 16 numaralı denklemde görüldüğü üzere çözüm ağı bloklara bölündüğünde 10, 11 ve 12 numaralı denklemlerin sol tarafındaki Jacobian matrisi noktalı çizgilerle ifade edildiği gibi bölünmekte ve a_1^1 ve c_N^0 terimleri açık sınır koşulları kullanılmasıyla ihmal edilmektedir.

UYGULAMALAR VE DEĞERLENDİRME

CFL3D açık kaynak koduna yöntem kısmında detaylıca anlatılan algoritmalar uygulanmıştır. Sıkıştırma rampası, difüzör ve apollo geometrisinde akışkan analizleri yapılmıştır. Bütün analizlerde akı farkı bölmesi (*İng. Flux difference splitting*) ve 3. dereceden tek taraflı Roe şeması (*İng. Upwind-biased third order Roe's scheme*) kullanılmıştır. Viskoz duvar sınır koşullarına sahip olan çözüm ağı içinde türbülans modeli olarak Spalart Almaras türbülans modeli kullanılmıştır. Analizlerde uygulanan değişiklikler sonucunda yapılan analizlerde elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Sıkıştırma Rampası:

Sıkıştırma rampasının rampa açısı 20 derece olarak belirlenmiş ve viskoz olmayan çözüm ağı oluşturulmuştur. Mach sayısı 10 olarak belirlenmiş ve viskoz olmayan Euler denklemleri çözülmüştür. Tek bloklü çözüm ağı ve 9 bloklü çözüm ağı için sonuçlar alınmış ve yakınsama özellikleri karşılaştırılmıştır.



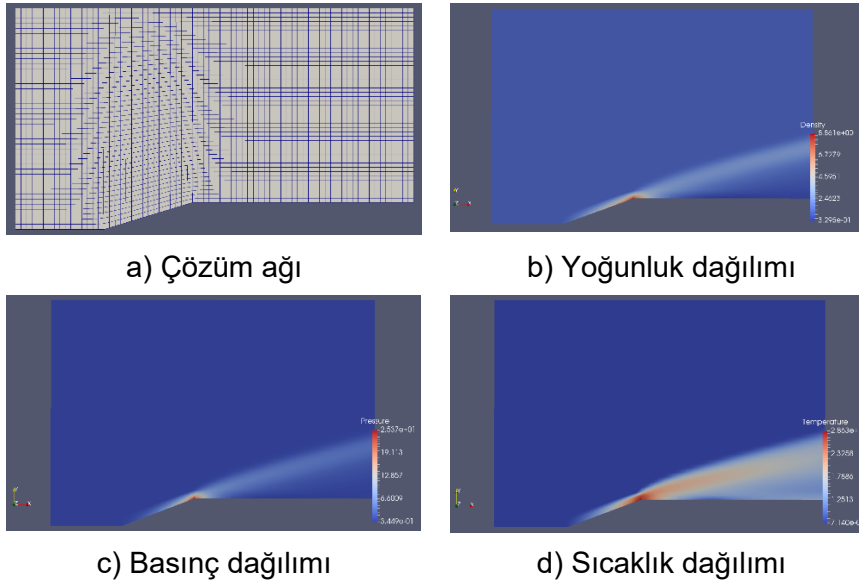
Şekil 1: ADI yöntemiyle sıkıştırma rampası analizinin yakınsama grafiği (Mach sayısı:10.0, Reynolds sayısı: $0.00558 * 10^6$)

Şekil 1'de sıkıştırma rampası için ADI metoduyla yapılan akışkan analizinin yakınsama grafiği görülmektedir. İdeal CFL sayısını bulmak için CFL çalışması yapılmış ve ideal CFL sayısının 0.4 olduğuna kanaat getirilmiştir. Şekilde görüldüğü üzere tek bloklü çözüm ağının çok bloklü çözüm ağına dönüştürülmesi yakınsama performansında düşüşe sebep olmaktadır. Aynı CFL değerinde blok ara yüzlerinde açık sınır koşullarının kullanıldığı 9 bloklü çözüm ağının tek bloklü çözüm ağına göre ve kapalı sınır koşullarının kullanıldığı 9 bloklü çözüm ağına göre daha geç yakınsadığı görülmektedir. Kapalı sınır koşullarının kullanıldığı çok bloklü çözüm ağında yakınsama performansının tek bloklü çözüm ağına oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 1: ADI yöntemiyle sıkıştırma rampası analizinin yakınsama süreleri (Mach sayısı:10.0, Reynolds sayısı: $0.00558 * 10^6$)

Metot	Yaklaşım için gereken zaman (s)	Toplam zaman (s)	Hücre ve yineleme başına düşen zaman(μ s)	Hücre sayısı	Toplam yineleme	Fazlalık yenileme
ADI (1 blk,CFL=0,4)	4,202064	5,04	5,29	3168	300	50
EBC ADI(9blk,CFL=0,4)	0,8092864	1	0,86	3168	400	70
IBC ADI(9blk,CFL=0,4)	0,714592	1,09	0,79	3168	400	150

Tablo 1’de sıkıştırma rampası için yapılan analizlerin yakınsama süreleri verilmiştir. Toplam analiz süresinden yakınsamanın yeterli olduğu kısımdan sonraki yineleme süreleri çıkarılmıştır. Yakınsamadan sonraki fazlalık süre hücre ve yenileme başına düşen sürenin, hücre sayısının ve fazlalık yineleme sayısının çarpılmasıyla elde edilebilir. Tabloda gözüktüğü üzere tek bloklu çözüm ağları çok bloklu çözüm ağlarına göre oldukça geç sonuç vermektedir. Çözüm ağını bloklara bölüp farklı işlemcilerde ayrı ayrı çözdürmenin önemli ölçüde zaman kazandırdığı görülmektedir. Buna ek olarak bloklara bölmeden kaynaklı blok ara yüzlerinde oluşan hatanın ortadan kaldırılması toplam analiz süresini daha da düşürmektedir.



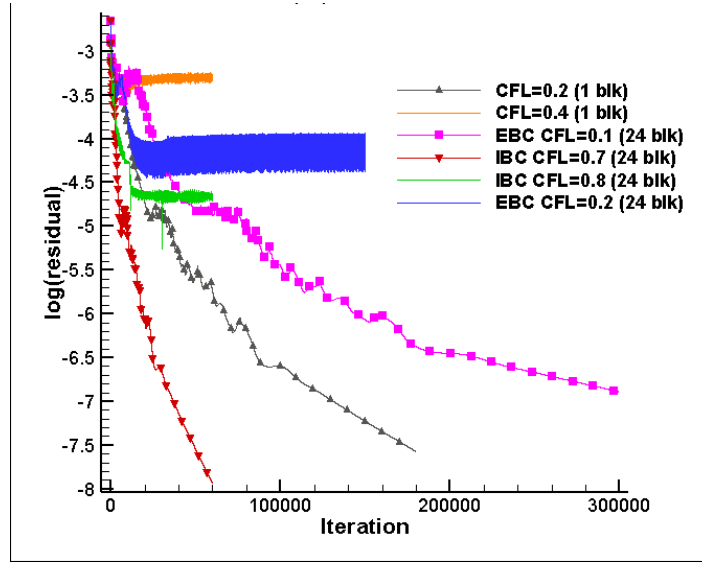
Şekil 2: Sıkıştırma rampası için oluşturulan a) çözüm ağı, b) yoğunluk dağılımı, c) basınç dağılımı ve d) sıcaklık dağılımı

Şekil 2’de sıkıştırma rampası için oluşturulan ve viskoz olmayan çözüm ağı görülmektedir. Ayrıca analiz sonucunda elde edilen yoğunluk, basınç ve sıcaklık dağılımları verilmiştir. Mach sayısının oldukça yüksek olması sebebiyle oluşan şok katmanının sıkıştırma rampasına çok yakın olduğu görülmektedir.

Difüzör:

Difüzör geometrisinin akış analizinde sıkıştırma rampasından farklı olarak difüzör duvar sınır koşullarında viskoz olarak belirlenmiştir. Türbülans modeli olarak Spalart-Allmaras türbülans modeli kullanılmıştır. Giriş alanının boğaza alanına oranı 1.4 çıkış alanının boğaz alanına oranı 1.5 olarak ayarlanmıştır. Girişteki toplam durgunluk basıncı 19.5 psia çıkıştaki statik basınç ise 16.05 olarak

belirlenmiştir. Boğazda zayıf bir şok oluşması sağlanmıştır. Tek bloklu ve 24 bloklu çözüm ağları kullanılarak sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil 3: ADI yöntemiyle difüzör geometrisi analizinin yakınsama grafiği (Mach sayısı:1.0, Reynolds sayısı: $0.937 * 10^6$)

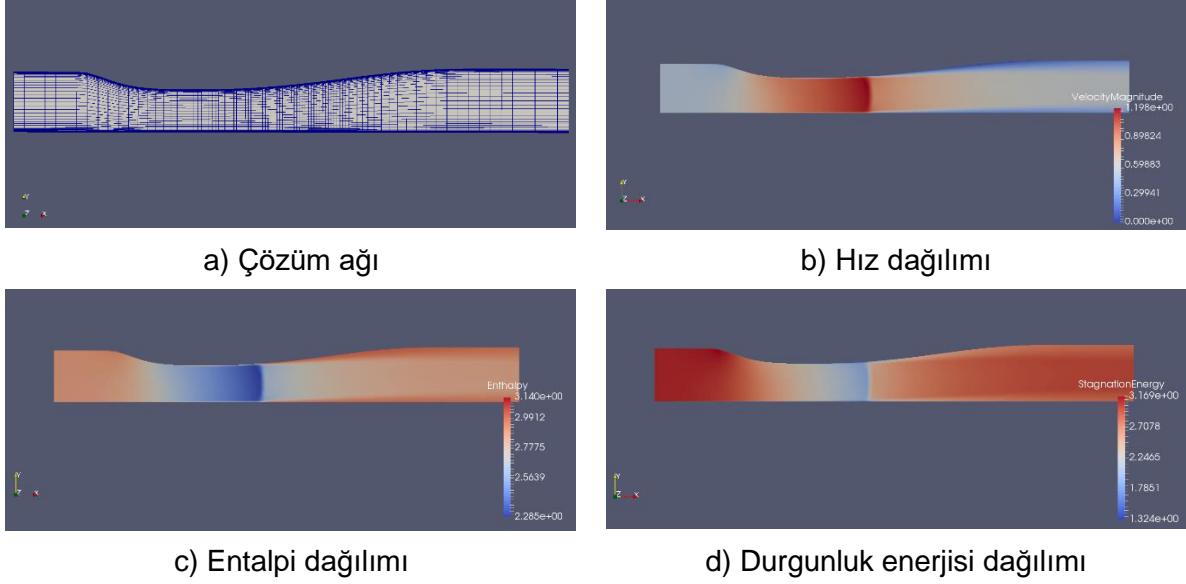
Şekil 3 difüzör analizinde ADI metoduyla elde edilen yaklaşım grafiğini göstermektedir. Tek bloklu çözüm ağını çok bloklu çözüm ağlarına bölmek ve her bloğu ayrı ayrı çözmek performansı oldukça yavaşlatmıştır. Çok bloklu çözüm ağlarında blok ara yüzlerinde açık sınır koşullarının kullanılmasının sebep olduğu performans düşüşü difüzör analizinde daha da çok göze batmaktadır. Kapalı sınır koşullarının ise oldukça fark yarattığı görülmektedir. Tek bloklu çözüm ağında ideal CFL değeri 0.2 iken 24 bloklu açık sınır koşullarının kullanıldığı çözüm ağında ise ideal CFL sayısı 0.1 olmaktadır. Kapalı sınır koşullarının kullanıldığı 24 bloklu çözüm ağında ise ideal CFL sayısı 0.7 olarak belirlenmiştir.

Tablo 2: ADI yöntemiyle difüzör analizinin yakınsama süreleri (Mach sayısı:1.0, Reynolds sayısı: $0.937 * 10^6$)

Metot	Yaklaşım için gereken zaman (s)	Toplam zaman (s)	Hücre ve yineleme başına düşen zaman(μ s)	Hücre sayısı	Toplam yineleme	Fazlalık yenileme
ADI (1 blk, CFL=0,2)	12190,0	2034	11,02	6144	30000	-150000
EBC ADI (24 blk, CFL=0,1)	721,0	74	0,39	6144	30000	-270000
IBC ADI (24 blk, CFL=0,7)	358,8	180	0,97	6144	30000	-30000

Tablo 2'de Difüzör geometrisi için analizlerde yaklaşım için gereken süreler verilmiştir. Yaklaşım sağlanana kadar 30000 yenileme sayısı kullanılmış yetmediği takdirde analiz aynı koşullarla kaldığı yerden devam ettirilmiştir. Bu sebeple fazlalık yineleme sayısı negatif bir değer olarak gösterilmiştir ve tekrarlanan yinelemeler hücre ve yineleme başına düşen süreyle çarpılıp toplam süreye eklenmiştir. Fazladan yapılan işlemler ve haberleşme sebebiyle kapalı sınır koşullarının 30000

yinelemeyi tamamlaması açık sınır koşullarına göre daha uzun sürse de Difüzör analizlerinde yakınsama süresi baz alındığında beklenildiği gibi en iyi sonucu 358,8 saniye ile 24 blokluk ve kapalı sınır koşullarının kullanıldığı çözüm ağı vermiştir. Difüzör analizinde kapalı sınır koşullarının analiz performansına etkisi sıkıştırma rampası analizine göre daha çok belirgin olarak gözükmektedir. 24 blokluk kapalı sınır koşullarının kullanıldığı çözüm ağı 60000 yineleme sayısında yeterli yaklaşım derecesine ulaşsa da açık sınır koşullarının kullanıldığı 24 blokluk çözüm ağı 300000 yineleme sonrasında bile aynı yakınsama derecesine ulaşamamış olarak görünmektedir.

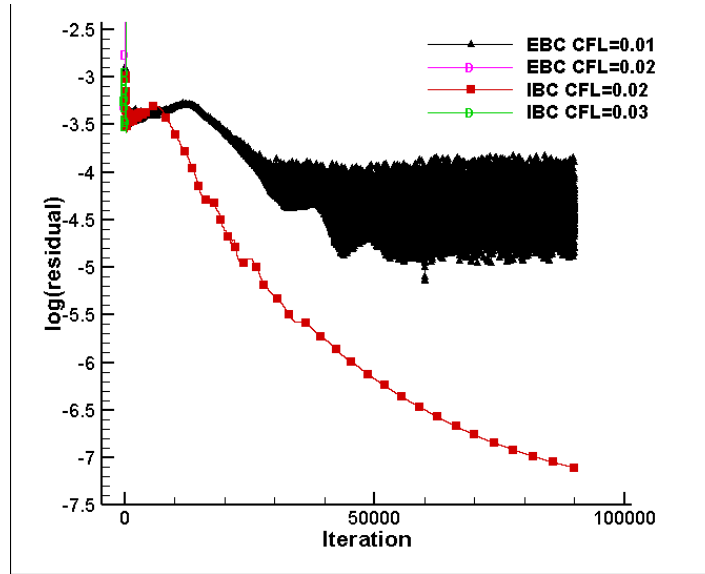


Şekil 4: Sıkıştırma rampası için oluşturulan a) çözüm ağı, b) yoğunluk dağılımı, c) basınç dağılımı ve d) sıcaklık dağılımı

Şekil 4'te difüzör için oluşturulan ve viskoz olan çözüm ağı görülmektedir. Ayrıca analiz sonucunda elde edilen hız, entalpi ve durgunluk enerjisi dağılımları verilmiştir. Akış hızının boğazda en yüksek hıza ulaştığı ve sonrasında şok olduğu gözlemlenmiştir.

Apollo 11 Geometrisi:

Apollo 11 geometrisi için viskoz 6 blokluk çözüm ağı oluşturulmuştur ve Mach sayısı 10.18, Reynolds sayısı ise 1.0×10^6 olarak belirlenmiştir. Elde edilen sonuçla deneysel veriler karşılaştırılmıştır. Türbülans modeli olarak Spalart-Almaras türbülans modeli kullanılmıştır.



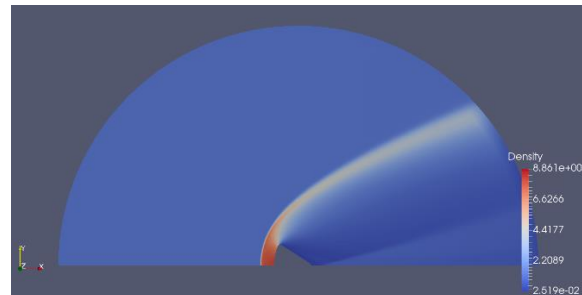
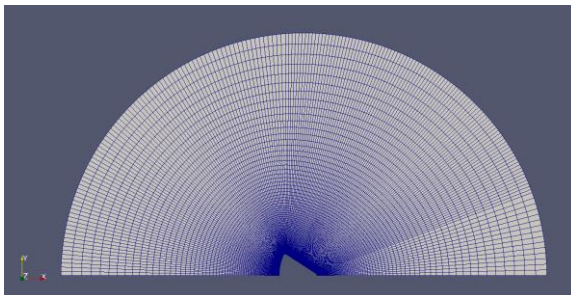
Şekil 5: ADI yöntemiyle Apollo 11 geometrisi analizinin yakınsama grafiği (Mach sayısı:10.18, Reynolds sayısı: 1.0×10^6)

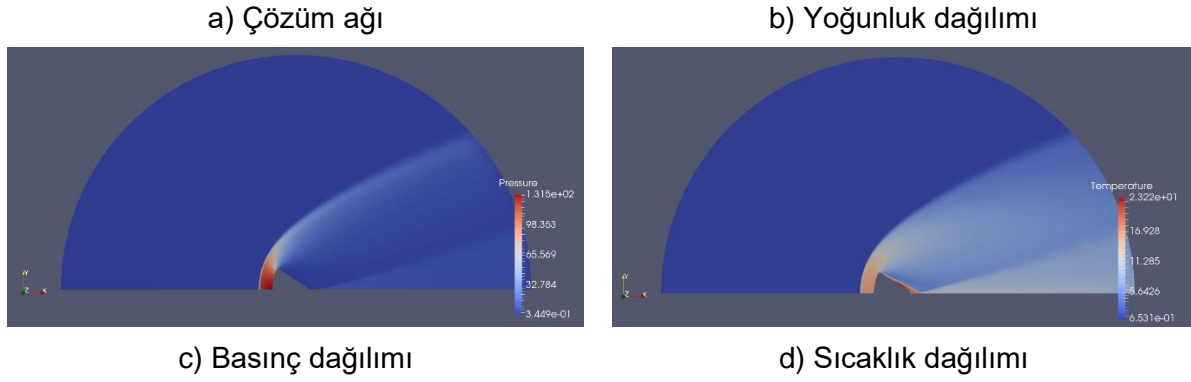
Şekil 5'te görüldüğü üzere açık sınır koşulları kullanılan 6 bloklu çözüm ağının yakınsamadığı gözlemlenmiştir. Bloklar arasında açık sınır koşulları kullanılması sebebiyle oluşan hata Apollo 11 analizi için uzaksamaya sebep olacak seviyededir. Bu analiz için blok ara yüzlerinde kapalı sınır koşulları olmadan sonuç almaya çalışmak zaman kaybı niteliğindedir. Kapalı sınır koşullarının kullanıldığı 6 bloklu çözüm ağının yakınsadığı gözlemlenmiştir.

Tablo 3: ADI yöntemiyle Apollo 11 analizinin yakınsama süreleri (Mach sayısı:10.18, Reynolds sayısı: 1.0×10^6)

Metot	Yaklaşım için gereken zaman (s)	Toplam zaman (s)	Hücre ve yineleme başına düşen zaman(μ s)	Hücre sayısı	Toplam yineleme	Fazlalık yenileme
EBC ADI (CFL=0,01)	Uzaksadı	-	-	-	-	-
IBC ADI (CFL=0,02)	6039	2013	2,73	24576	30000	-60000

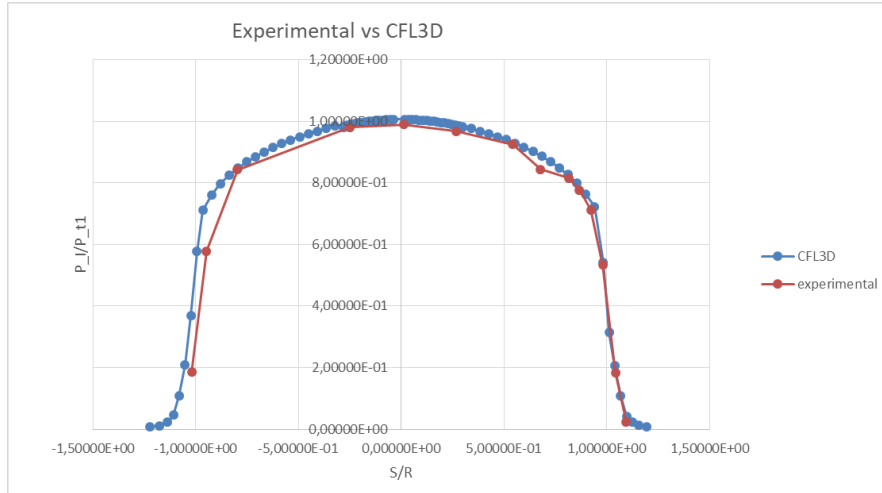
Tablo 3'te görüldüğü üzere açık sınır koşulları uzaksarken kapalı sınır koşulları yakınsamayı başarabilmiştir. Apollo 11 analizinde bloklar arası kapalı sınır koşullarının muhakkak kullanılması gerektiğine kanaat getirilmiştir.





Şekil 6: Apollo 11 için oluşturulan a) çözüm ağı, b) yoğunluk dağılımı, c) basınç dağılımı ve d) sıcaklık dağılımı

Şekil 6'da Apollo 11 için oluşturulan ve viskoz olan çözüm ağı görülmektedir. Ayrıca analiz sonucunda elde edilen yoğunluk, basınç ve sıcaklık dağılımları verilmiştir. Mach sayısının oldukça yüksek olması sebebiyle oluşan şok katmanının oldukça güçlü ve Apollo 11 geometrisinin hemen önünde olduğu gözlemlenmiştir.



Şekil 7: CFL3D analiz sonuçları ve deneysel verilerin karşılaştırılması
(Mach sayısı: 10.18, Reynolds sayısı: 10^6 , $\alpha = 0.0$)

CFL3D akış çözücüsünün mekânsal ayrıklaştırma anlamında yeterli doğrulukta olup olmadığını görmek adına 3 boyutlu Apollo geometrisi sonuçlarıyla deneysel veriler karşılaştırılmıştır. CFL3D açık kaynak kodundan elde edilen Apollo 11 geometrisi üzerindeki basınç değerlerinin deneysel verilerle örtüştüğü Şekil 7'te gözlenmektedir.

SONUÇ

Bu makalede yapılan çalışmalar sonucunda ve elde edilen sonuçlar doğrultusunda ADI metodu ile birlikte çok bloklu çözüm ağları kullanılırken blok ara yüzlerinde açık sınır koşullarının kullanılmasının ve blokların ayrı ayrı Thomas algoritmasıyla çözülmesinin Jacobian matrisinde bazı katsayıların ihmal edilmesine, bütünlüğün ve kapalılığın bozulmasına sebep olduğu gözlemlenmiştir. Dolayısıyla blok ara yüzlerine kapalı sınır koşulları uygulanması gerektiğine kanaat getirilmiştir. Blok ara yüzlerinde kapalı sınır koşulları algoritmasının kurulabilmesi için bloklar arasında veri alışverişinin sağlanması MPI kütüphanesiyle sağlanmıştır. Gerekli verilerin alışverişinden sonra denklemin sağ tarafına atılmış ve oluşan hata ortadan kaldırılmıştır. Sıkıştırma

rampası analizlerinde fark az olsa da difüzör ve Apollo 11 analizlerinde ciddi performans farkları gözlemlenmiştir. CFL3D açık kaynak kodunun deneysel datalarla örtüşecek seviyede mekânsal ayrıklaştırmaya sahip olduğu görülmüştür. Yaklaşık çarpanlara ayırma metodlarından Standart ADI metodu çok bloklu çözüm ağları ile kullanılırken blok ara yüzlerindeki kapalı sınır koşulunun performansı oldukça önemli ölçüde iyileştirdiği sonucuna varılmıştır.

Kaynaklar

- Bardina, Jorge., Lombard, C.K., 1987. *Three dimensional hypersonic flow simulations with the CSCM implicit upwind Navier-Stokes method*, AIAA, California, 14 Kasım
- Beam, Richard M., Warming R.F., 1978. *An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations*, AIAA, California, Nisan
- Jameson, A., 1983. *Numerical solution of Euler equation for compressible inviscid fluids*, Numerical Methods for the Euler Equations of Fluid Dynamics, Princeton/New Jersey U.S.A
- Jin, Yao., Liao Fei., Cai, Jinsheng., 2020. *Convergence acceleration for subiterative DDADI/D3ADI using multiblock implicit boundary condition*, Journal of Computational Physics, Xi'an/China, 14 Kasım.
- Klopper, G., Hung C., Van Der Wijngaart., Onufer J., , *A diagonalized diagonal dominant alternating direction implicit (D3ADI) scheme and subiteration correction*, AIAA, Reston, Virginia,
- Krist, Sherrie L., Biedron, Robert T., Rumsey, Christopher L., 1998. *CFL3D User's Manual (Version 5.0)*, NASA Langley Research Center, Cilt.2, s.1-233
- Moon, Hojun., Hong, Seungpyo., You, Donghyun., 2020, *Application of parallel diagonal dominant algorithm for the incompressible Navier-Stokes equations*, Journal of Computational Physics, Pohang/Korea, 17 Ağustos.
- Pulliam, T. H., MacCormack, R. W., Venkateswaran, S., 1998, *Convergence characteristics of approximate factorization methods*, Springer-Verlag, Cilt.1, s409-414
- Thomas, L. James., 1991 *An implicit multigrid scheme for hypersonic strong-interaction flowfields*, Communications in Applied Numerical Methods, Hampton, Virginia, Mayıs
- Richardson, Pamela F., McClinton, Charles R., Bittner, Robert D., Dilley, A. Douglas., Edwards, Kelvin W., Eppard, W. Marc., Morrison, Joseph H., Riggins, David R., Switzer, George F., Parlette, Edward B., 1989, *Hypersonic CFD Applications for the National Aero-Space Plane*, SAE International, s1653-1663
- Rumsey, Christopher L., Biedron, Robert T., Thomas, James L., 1997, *CFL3D: Its History and Some Recent Applications*, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, Mayıs