

TEKİL BİR KÜTLEYE SAHİP NARİN UZAY ARACININ TİTREŞİM VE DİNAMİK KARARSIZLIK ANALİZİ

Melahat Cihan*
Samsun Üniversitesi, Samsun

ÖZET

Bu çalışmada narin esnek bir uzay aracının tekil bir kütleyle sahip olması durumundaki dinamik kararsızlığı incelenmiştir. Sabit itki kuvvetine ve spin hızına maruz kalan uzay aracı dairesel kesit alanına sahip ince-cıdarlı kompozit kirişler teorisi ile modellenmiştir. İtke ve jirooskopik kuvvetler altındaki roketin diverjans kararsızlığı sunulmuştur. Çevresel üniform katılık konfigürasyonu kullanılarak eğilme-eğilme-kayma bağlaşıklık hareketi gösterilmiştir. Özdeğer problemi Extended Galerkin yöntemi kullanılarak verilmiştir. Sonuçlar farklı elyaf açılarına sahip kirişler için tekil kütleyle sahip olma/olmama durumları göz önünde bulundurularak sunulmuştur. Değişen itki kuvvetinin roketin diverjans ve flutter kararsızlığına etkisi incelenmiştir.

GİRİŞ

Fırlatma araçlarının dinamik kararsızlık problemleri, itki kuvvetine maruz kaldıklarında ve ağır bir faydalı yük taşıdıkları durumda literatürdeki pek çok çalışmada Euler kiriş teorisi kullanılarak çözülmüştür. Wu sabit itki altında tekil bir kütle taşıyan esnek bir füzeyi serbest bir kiriş modellemesi kullanarak kararsızlık davranışını incelemiştir [Wu, 1976]. Park ve Mote tekil kütle taşıyan serbest kirişin maksimum kontrollü itici yük altındaki kararsızlığını çalışmışlardır [Park ve Mote, 1985]. Ayrıca Pradhan ve Datta serbest kiriş olarak modelledikleri füze yapılarının dinamik kararsızlık karakteristiklerini belirlemişlerdir [Pradhan ve Datta, 2006]. Bunlara ek olarak Sugiyama ve arkadaşları serbest ve ankastre olarak modelledikleri itki kuvvetine maruz kalan tekil bir kütleyle sahip olan roketleri incelemiş, teorik ve deneysel olarak kararsızlık problemini farklı çalışmalarında sunmuşlardır [Sugiyama ve ark., 1995, 1995/2, 2000].

Narin ve esnek uzay araçlarının, roketler ve füzelerin dinamik kararsızlık problemleri Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak da farklı çalışmalarda karşımıza çıkmaktadır. Örnek olarak, Kim ve Choo sabit olmayan bir itkiye maruz kalan ve tekil bir kütle taşıyan serbest bir kirişin dinamik kararsızlığını Timoshenko kirişi ile modelleyerek çözmüşlerdir [Kim ve Choo, 1998]. Başka bir çalışmada Yoon ve Kim sabit olmayan bir itkiye maruz kalan ayrıca spin hızına sahip bir roketin

*Dr. Öğr. Üyesi, Uçak ve Uzay Müh. Böl., E-posta: melahat.cihan@omu.edu.tr

farklı lokasyonlarına yerleştirilen tekil kütle için kararsızlık problemini ortaya koymuşlardır [Yoon ve Kim, 2002]. Yine Sohrabian ve arkadaşları ankastre olarak modelledikleri tekil kütleyle sahip ve itki altındaki bir kirişin flutter kararsızlığını incelemişlerdir [Sohrabian ve ark., 2016].

Literatürde şimdiye kadar Euler ve Timoshenko kiriş teorileri ile incelenen roketlerin dinamik kararsızlığı problemi bu çalışmada ince-cıdarlı kompozit kirişler teorisi kullanılarak modelleneyecektir. İnce-cıdarlı kompozit kirişler ile kararsızlık problemleri Librescu ve arkadaşları tarafından çeşitli çalışmalarda ortaya konmuştur [Librescu ve ark., 2001, 2002, 2000]. Bu çalışmada itki kuvveti, spin hızı, tekil kütle konfigürasyonları ve elyaf açısı değişimleri ile roketin kararsızlığının nasıl değiştiği gösterilmiştir.

Sistem Hareket Denklemleri

Çevresel üniform katılık konfigürasyonuna (CUS) sahip kesme etkili ince-cıdarlı kompozit kirişlerin hareket denklemlerini elde etmek için Hamilton prensibi kullanılmış, denklemler aşağıdaki şekilleriyle verilmiştir [Librescu ve Song, 2006]:

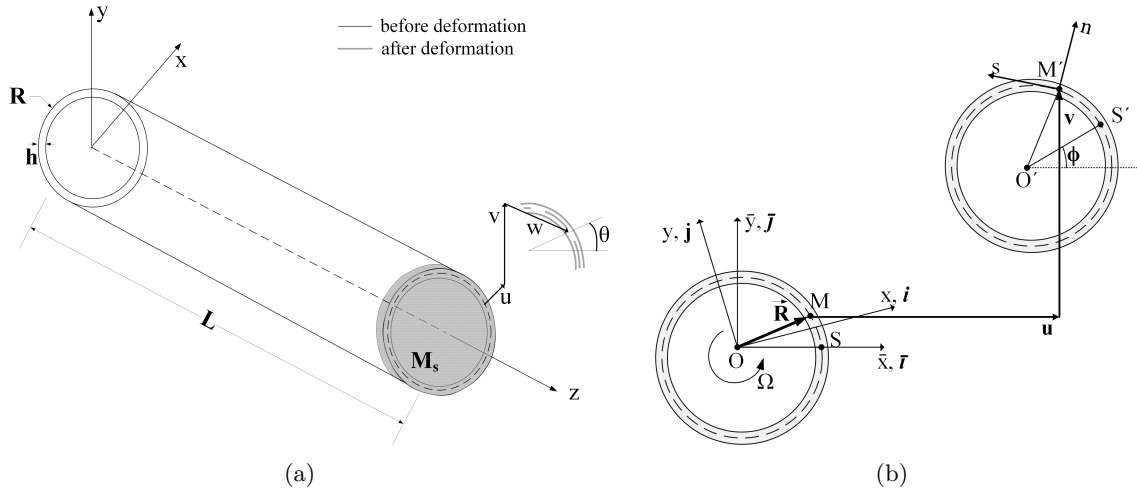


Figure 1: (a) Deformasyon öncesi ve sonrası kiriş geometrisi, (b) Kesit alanı geometrisi ve kinematik değişkenler

$$\begin{aligned}
 a_{34}\theta''_x + a_{44}(u''_0 + \theta'_y) - Pu''_0 &= b_1\ddot{u}_0 - 2b_1\Omega\dot{v}_0 - b_1u_0\Omega^2 \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\ddot{u}_0 - r_m\ddot{\theta}_x) \delta_D(z - z_i) \\
 a_{25}\theta''_y + a_{55}(v''_0 + \theta'_x) - Pv''_0 &= b_1\ddot{v}_0 + 2b_1\Omega\dot{u}_0 - b_1v_0\Omega^2 \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} m_i (\ddot{v}_0 - r_m\ddot{\theta}_y) \delta_D(z - z_i) \\
 a_{33}\theta''_x + a_{34}(u''_0 + \theta'_y) - a_{55}(v'_0 + \theta_x) - a_{25}\theta'_y &= (b_4 + b_{14})\ddot{\theta}_x \\
 a_{22}\theta''_y + a_{25}(v''_0 + \theta'_x) - a_{44}(u'_0 + \theta_y) - a_{34}\theta'_x &= (b_5 + b_{15})\ddot{\theta}_y
 \end{aligned} \tag{1}$$

$z = 0$ 'da ankastre kiriş için sınır koşulları:

$$\begin{aligned}
u_0 &= 0 \\
v_0 &= 0 \\
\theta_x &= 0 \\
\theta_y &= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

$z = L$ 'da ankastre giriş için sınır koşulları:

$$\begin{aligned}
a_{34}\theta'_x + a_{44}(u'_0 + \theta_y) - Pu'_0 + m_n(\ddot{u}_0 - r_m\ddot{\theta}_y) &= 0 \\
a_{25}\theta'_y + a_{55}(v'_0 + \theta_x) - Pv'_0 + m_n(\ddot{v}_0 - r_m\ddot{\theta}_x) &= 0 \\
a_{33}\theta'_x + a_{34}(u'_0 + \theta_y) - m_i r_m \ddot{v}_0 &= 0 \\
a_{22}\theta'_y + a_{25}(v'_0 + \theta_x) - m_i r_m \ddot{u}_0 &= 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Bu problem için kütle, sönümleme ve katılık matrisleri şu şekilde elde edilmiştir:

$$M_B = \int_0^1 \begin{bmatrix} b_1 N_u N_u^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 N_v N_v^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b_5 + b_{15}) N_y N_y^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b_4 + b_{14}) N_x N_x^T \end{bmatrix} d\eta \tag{4}$$

$$M_{mS} = \int_0^1 \begin{bmatrix} m_s N_u N_u^T & 0 & -m_s r_m N_y N_y^T & 0 \\ 0 & m_s N_v N_v^T & 0 & -m_s r_m N_x N_x^T \\ 0 & -m_s r_m N_v N_v^T & I_{yy} N_y N_y^T & 0 \\ -m_s r_m N_u N_u^T & 0 & 0 & I_{xx} N_x N_x^T \end{bmatrix} d\eta \tag{5}$$

$$M_S = M_B + M_{mS} \tag{6}$$

$$C_S = \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 & -2b_1 \Omega N_u N_v^T & 0 & 0 \\ 2b_1 \Omega N_v N_u^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\eta \tag{7}$$

$$K_S = \int_0^1 \begin{bmatrix} a_{44} N'_u N'^T_u & 0 & a_{44} N'_u N_y^T & a_{34} N'_u N_x^T \\ -P N'_u N'^T_u & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 \Omega^2 N_u N_u^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{55} N'_v N'^T_v & a_{25} N'_v N_y^T & a_{55} N'_v N_x^T \\ 0 & -P N'_v N'^T_v & 0 & 0 \\ -b_1 \Omega^2 N_v N_v^T & 0 & 0 & 0 \\ a_{44} N_y N_u^T & a_{25} N'_y N'^T_v & a_{22} N'_y N_y^T & a_{25} N'_y N_x^T \\ 0 & 0 & +a_{44} N_y N_y^T & +a_{34} N_y N_x^T \\ a_{34} N'_x N'^T_u & a_{55} N_x N_v^T & a_{34} N'_x N_y^T & a_{33} N'_x N_x^T \\ 0 & 0 & +a_{25} N_x N_y^T & +a_{55} N_x N_x^T \end{bmatrix} d\eta \tag{8}$$

$$q_S = \{q_u \ q_v \ q_y \ q_x\}^T \tag{9}$$

SONUÇLAR

Bu bölümde tekil bir kütleyle sahip narin bir uzay aracının dinamik kararlılık analizlerinin sonuçları verilmiştir. Narin uzay aracı olarak tanımlanan roket dairesel kesite sahip ince-cıdarlı kompozit kirişler teorisi ile modellenmiştir. Sayısal sonuçlar için seçilen modelin malzeme ve geometrik özellikleri Tablo 1 ve [Librescu ve ark, 2001]'da verilmiştir. İtki kuvvetinin, spin hızının ayrıca elyaf açısının değişiminin kirişin dinamik kararsızlığı üzerine etkileri incelenmiş, sonuçlar tekil kütle katkısını dahil edecek şekilde sunulmuştur.

Öncelikle doğal frekans sonuçlarının bütün elyaf açıları için boyutsuz parametreler ile gösterildiğini belirtmek gerekir; $\omega_i = \omega/\omega_0$. Aynı şekilde itki kuvveti olarak tanımlanan eksenel yük $P_i = PL^2/a_{22}$ eşitliği ile boyutsuz olarak gösterilmiştir. Burada referans frekansı ω_0 ; sıfır derecedeki elyaf açısı için eksenel yüklemenin ve spin hızının olmadığı durumda hesaplanmıştır ve $\omega_0 = \omega|_{\theta=0, \Omega=0, P=0}$ şeklinde gösterilir. Burada: θ elyaf açısı, Ω spin hızı, P eksenel yüküdür.

CUS konfigürasyonu göz önünde bulundurulduğunda sıfır olmayan katılık katsayıları a_{22} , a_{33} , a_{44} , a_{55} , a_{25} ve a_{34} 'tür. Bunlar sırasıyla; yatay eğilme, dikey eğilme, yatay enine kesme, dikey enine kesme, yatay eğilme-enine kesme bağlaşımı ve dikey eğilme-enine kesme bağlaşımıdır. Bu konfigürasyondaki ince-cıdarlı kirişlerin dinamik davranışlarını değerlendirmek için elastik katsayıların elyaf açıları ile değişimi Şekil 2'de gösterilmiştir. Bu grafikten açıkça anlaşılacağı gibi dairesel kesit alanının simetrisinden kaynaklı olarak a_{33} ve a_{44} tamamıyla aynıdır. Benzer şekilde a_{44} ve a_{55} aynı davranışı göstermektedir. Ayrıca a_{25} eğrisi $\theta = 90^\circ$ civarında a_{34} eğrisi ile simetriktir. Grafik detaylı şekilde incelendiğinde a_{22} ve a_{33} eğrilerinin $\theta = 90^\circ$ 'de en yüksek değerlerine ulaştığı gözlemlenmiştir. a_{44} ve a_{55} eğrileri ise $\theta \approx 75^\circ$ ve $\theta \approx 105^\circ$ 'de lokal maksimumlarına ulaşırlar. Bu sonuçlara ek olarak, en baskın katılık katsayılarının a_{44} ve a_{55} olduğunu, en az baskın olanların ise a_{22} ve a_{33} olduğunu söylemek mümkündür.

Table 1: Roketin malzeme ve geometrik özellikleri

<i>Malzeme özellikleri</i>	
E_{11}	206.8 GPa
$E_{22} = E_{33}$	5.17 GPa
G_{12}	3.10 GPa
$G_{13} = G_{23}$	2.55 GPa
$\nu_{12} = \nu_{31}$	0.00625
ν_{32}	0.25
Yoğunluk, ρ	1528 kg/m ³
<i>Geometrik özellikleri</i>	
Yarıçap, R (m)	0.127
Toplam kalınlık, h (m)	0.01016
Uzunluk, L (m)	2.023
Katman sayısı, N	6
Lay-ups	$[\theta]_N$

Öncelikle kirişin serbest titreşimi eksenel yük ve spin hızının olmadığı durumda $P = 0$ and $\Omega = 0$ bütün elyaf açıları için çalışılmıştır. Bu analiz tekil yükün olduğu ve olmadığı durumlar göz önünde bulundurularak yapılmıştır. Kütle etkisini inceleyebilmek için elyaf açısına göre frekans değişimi Şekil 3'de verilmiştir. Şekil 3(a) ve 3(b) sırasıyla ilk üç ve ikinci üç doğal frekans değişimlerini vermektedir. Burada, kirişin serbest ucunda $x_m = L$, kütlesi $m = 1$ olan bir tekil yükü taşıdığı varsayılmıştır. Düz çizgiler tekil yükün olmadığı durumlardaki doğal frekansları, kesikli çizgiler ise tekil yükün olduğu durumlardaki doğal frekansların değişimini göstermektedir. Şekil 3'den anlaşılacağı üzere, yüksek modeller için tekil kütle katkısı daha önemlidir.

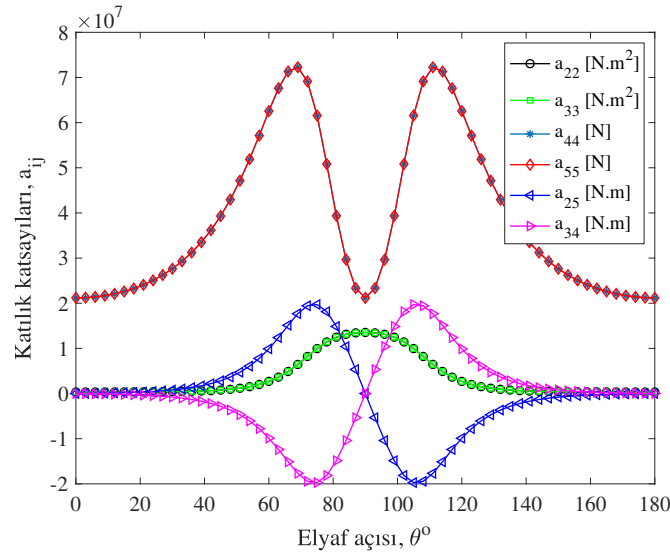


Figure 2: Elyaf açılara göre katılık katsayılarının değişimi.

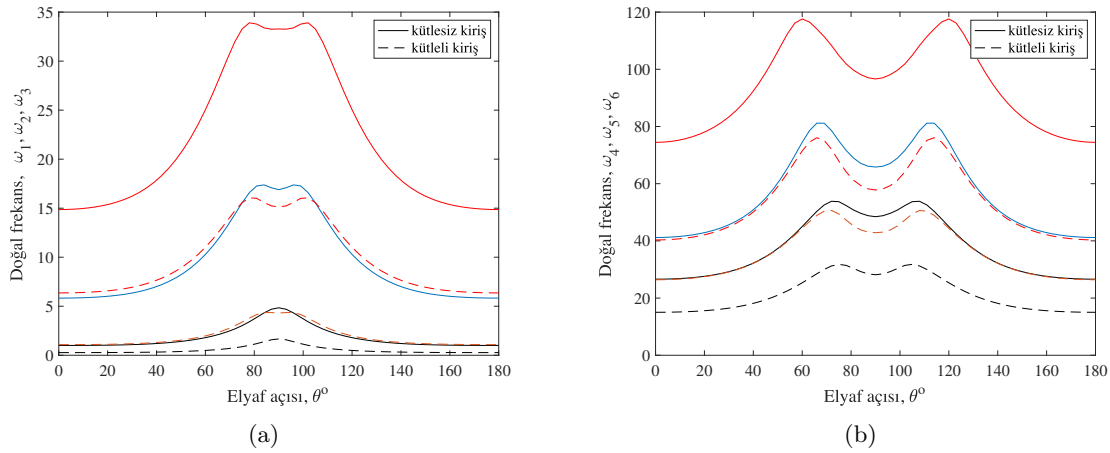


Figure 3: Elyaf açısına göre (a) birinci, ikinci, üçüncü (b) dördüncü, beşinci, altıncı doğal frekansların değişimi.

Analizlerin ilk bölümünde, belli bir itki kuvvetine maruz kalan kirişin diverjans kararsızlığı hesaplanmıştır, $P \neq 0$. Burada, üç farklı elyaf açısı konfigürasyonu için $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ kritik eksenel yüklerin değişimi hesaplanmış ve Şekil 4(a)-4(c)'de gösterilmiştir. Bu şekiller ayrıca eksenel kuvvet değişimi ile birinci doğal frekans üzerindeki tekil kütlenin etkisine vurgu yapmaktadır. Burada spin hızı hesaplamaya dahil edilmemiştir $\Omega = 0$.

Bu bölümde kritik yükler, diverjans eksenel yük olarak belirlenmiştir. Bu sistemde öz frekanslar sıfır olduğu zaman diverjans kararsızlığı oluşmaktadır. Ayrıca bu noktada eksenel baskı yükü kritik değerini alır P_{cr} ve bu yük burkulma yükü olarak tanımlanır. Burada eksenel baskı yükü P_i artarken birinci doğal frekansın azaldığı görülmektedir. Ayrıca grafiklerden görüleceği üzere, elyaf açısı arttıkça kritik diverjans yükü P_{cr} de artmaktadır. Bunlara ek olarak kirişin üzerindeki tekil kütlenin etkisi ile doğal frekansın azaldığı gözlemlenmiştir. Şekil 4'den anlaşılacağı üzere, bütün elyaf açıları için tekil kütlenin etkisi hesaba katıldığında diverjans kritik yükünün değişmediği görülmektedir. Bunun sebebi kirişin dinamik kararsızlığının eksenel yük ve spin oranına bağlı olması, tekil kütlenin varlığı ile değişmemesidir.

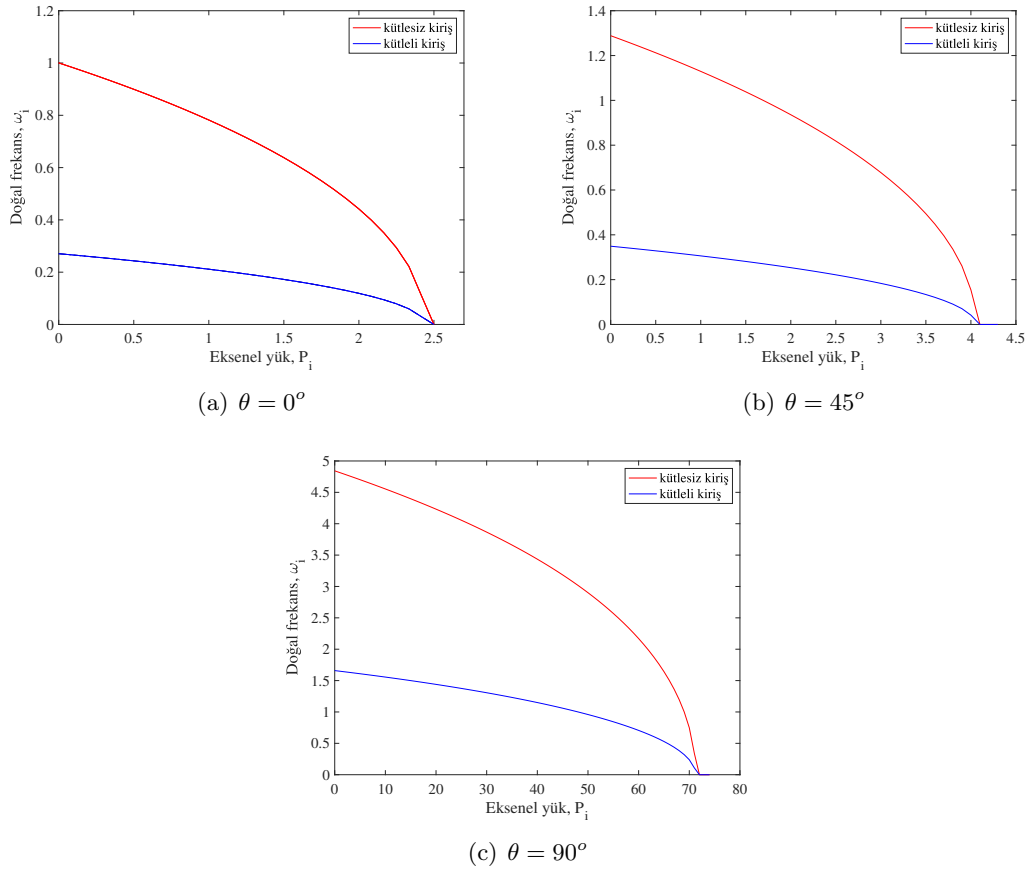


Figure 4: Tekil kütlenin olması ve olmaması durumlarında eksenel kuvvete göre frekansların değişimi.

Analizlerin ikinci bölümünde ise farklı elyaf açıları için spin etkisine maruz kalan kirişin flutter kararsızlığı üzerine tekil yükün etkisi incelenmiş ve Şekil 5'te gösterilmiştir. Burada analizler $m = 1$ olan bir kütlenin kirişin serbest ucunda olduğu durumda $x_m = L$ ve $\Omega = 80$ spin hızı için hesaplanmıştır. Bu grafikten anlaşılaçağı üzere, kritik flutter yükünün düşük elyaf açıları için küçük olduğu fakat $60^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$ için büyük bir değişim gösterdiği görülmüştür. Maksimum $P_{flutter}$ değeri $\theta = 90^\circ$ 'de oluşmaktadır. Son olarak tekil kütlenin olduğu ve olmadığı durumlarda kirişin flutter kararsızlığı $\theta < 75^\circ$ ve $\theta > 115^\circ$ elyaf açıları için farklılık gösterirken $75^\circ \leq \theta \leq 115^\circ$ elyaf açıları için oldukça yakın olduğu sonucuna ulaşmak mümkündür.

Kaynaklar

- [1] Kim, J., Choo, Y., 1998. *Dynamic stability of a free-free Timoshenko beam subjected to a pulsating follower force*, Journal of Sound and Vibration 216 4, s. 623-636.
- [2] Ohshima, T., Sugiyama, Y., 2003. *On simplified mechanical models for rocket-body divergence and flutter*, 44th AIAA/ASME/AHS Structures, Structural Dynamics, and Material Conference.
- [3] Park, Y., Mote, C.J., 1985. *The maximum controlled follower force on a free-free beam carrying a concentrated mass*, Journal of Sound and Vibration 98 2, s. 247-256.
- [4] Pradhan, S., Datta, P.K., 2006. *Dynamic instability characteristics of a free-free missile*

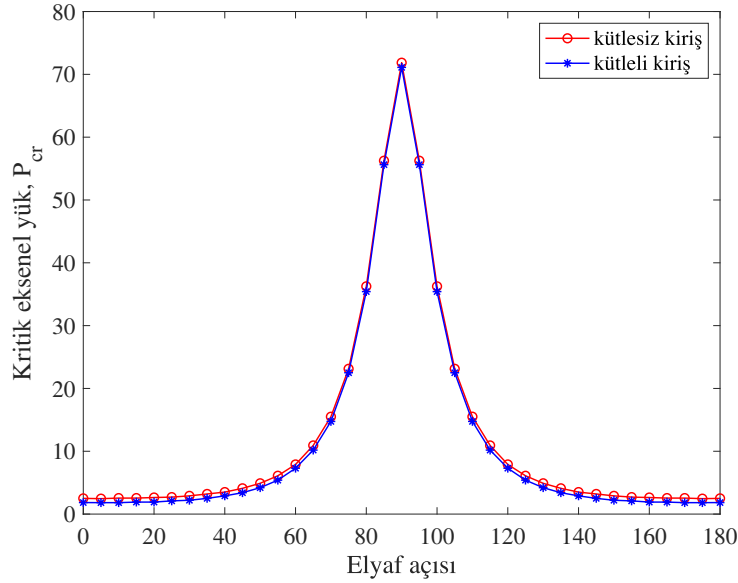


Figure 5: Tekil kütlenin olması ve olmaması durumlarında elyaf açısına göre kritik eksenel kuvvetin değişimi.

structures under a controlled follower force, Aircraft Engineering and Aerospace Technology An International Journal 78 (6), s. 509-514.

- [5] Sohrabian, M., Ahmadian, H., Fahri, R., 2016. *Flutter instability of Timoshenko cantilever beam carrying concentrated mass on various locations*, Latin American Journal of Solids and Structures 13, s. 3005-3021.
- [6] Song, O., Jeong, N.H., Librescu, L., 2001. *Implication of conservative and gyroscopic forces on vibration and stability of an elastically tailored rotating shaft modeled as a composite thin-walled beam*, Journal of Acoustical Society of America, 109, s. 972-981.
- [7] Song, O., Librescu, L., Jeong, N.H., 2002. *Vibration and stability control of smart composite rotating shaft via structural tailoring and piezoelectric strain actuation*, Journal of Sound and Vibration 257 (3), s. 503-525.
- [8] Song, O., Jeong, N.H., Librescu, L., 2000. *Vibration and stability of pretwisted spinning thin-walled composite beams featuring bending-bending elastic coupling*, Journal of Sound and Vibration 237 (3), s. 513-533.
- [9] Sugiyama, Y., Katayama, K., Kinoi, S., 1995. *Flutter of cantilevered column under rocket thrust*, Journal of Aerospace Engineering 8, s. 9-15.
- [10] Sugiyama, Y., Langthjem, M., 2000. *Dynamic stability of columns subjected to follower loads: a survey*, Journal of Sound and Vibration 238 5, s. 809-851.
- [11] Sugiyama, Y., Matsuike, J., Ryu, J.B., Katayama, K., Kinoi, S., Enomoto, N., 1995. *Effect of Concentrated Mass on Stability of Cantilevers Under Rocket Thrust*, AIAA Journal 33, s. 499-503.
- [12] Yoon, S.J., Kim, J.H., 2002. *A concentrated mass on the spinning unconstrained beam subjected to a thrust*, Journal of Sound and Vibration, 254, s. 621-634.
- [13] Wu, J.J., 1976. *Missile stability using finite elements- an unconstrained variational approach*, AIAA Journal, 14, s. 313-319.

- [14] L. Librescu, O. Song, Thin-walled composite beams: Theory and Application, The Netherlands: Springer, 2006.