VII. ULUSAL HAVACILIK VE UZAY KONFERANSI **UHUK-2018-122**
12-14 Eylül 2018, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun

AKIŞKAN-YAPI ETKİLEŞİMİ PROBLEMLERİNİN SAYISAL SİMULASYONU İÇİN PARALEL MONOLİTİK BİR YÖNTEM

Ali Eken*
Samsun Üniversitesi
Samsun

Mehmet Şahin†
İstanbul Teknik Üniversitesi
İstanbul

ÖZET

Bu çalışmada akışkan-yapı etkileşimi (FSI) problemlerinin paralel tam bağlaşık bir çözüm yaklaşımıyla simülasyonuna yönelik özgün bir sayısal algoritma geliştirilmiştir. Problemin akışkan kısmi için daimi olmayan, sıkıştırılamaz Naviar-Stokes denklemleri, Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formda kullanılmıştır. Akışkan için ALE tabanlı bu hareket denklemleri, yapısal olmayan bir sonlu hacimler yaklaşımı ile ayrıklaştırılmıştır. Bu ayrıklaştırmada birincil değişkenler kenar-merkezli bir sema ile konumlandırılmıştır. Bu konumlandırmada, hız vektörü komponentleri her hücre yüzünün orta noktasında tanımlanmışken, basınç ise eleman merkezinde tanımlanmaktadır. Akışkan bölgesinde zaman integrasyonu için ikinci mertebeden geri farklar formülü kullanılmaktadır. Çözüm ağı deformasyonu algoritması için verimli cebirsel bir yöntem uygulanmıştır. Yapı bölgesinin deformasyonu Saint Venant-Kirchhoff malzeme modelinin uygunluk denklemlerine dayanmaktadır. Bu yöntem yapının büyük elastik deplasman gösterdiği geometrik doğrusal olmayan problemlere uygulanabilmektedir. Yapı bölgesi hareket denklemlerinin ayrıklaştırması Lagrangian bir çerçevede klasik Galerkin sonlu hacimler yöntemine dayanmaktadır. Yapı bölgesi denklemlerinin zaman integrasyonunda ise genelleştirilmiş-α yöntemi uygulanmıştır. Akışkan ve yapı bölgelerine ait denklemlerin çözümü tam bağlaşık bir yaklaşıma dayanmaktadır. Bu yaklaşımda, akışkan ve yapı denklemleri tek bir denklem sistemi oluşacak şekilde inşa edilmektedir ve bu denklem sistemi her zaman adımında tam bağlaşık şekilde çözülmektedir. Akışkan ve yapı bölgeleri arasında bağlaştırma, akışkan-yapı ara yüzü boyunca birbirine uyumlu akışkan ve yapı çözüm ağları kullanılmasıyla basitleştirilmiştir. Geliştirilen bu FSI çözücünün doğruluğunu test etmek ve önerilen algoritmanın ölçeklenme karakterini incelemek amacıyla, mevcut yöntem literatürde sıklıkla adres edilen birçok FSI test problemine uygulanmıştır. FSI çözücüsünün doğrulanması amacıyla yapılan sayısal deneylerden sonra, mevcut algoritma kardiyovasküler akışkan-yapı etkileşiminde sıklıkla karşılaşılan gerçekçi bir problemin çözümünde kullanılmıştır.

*Dr. Öğr. Üyesi, Uçak ve Uzay Müh. Böl., E-posta: ali.eken@omu.edu.tr
†Doç. Dr., Uzay Müh. Böl., E-posta: msahin@itu.edu.tr

YÖNTEM

Yapı Denklemleri

Yapı bölgesinin dinamik davranışı Lagrange koordinat sisteminde aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial \mathrm{t}^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \rho \mathbf{b} \tag{1}$$

burada ρ yapının yoğunluğu, $\mathbf{d}$ deplasman vektörü, $\boldsymbol{\sigma}_s$ Cauchy gerilme tensörü, $\mathbf{b}$ ise bünye kuvvetlerini ifade etmektedir. St. Venant-Kirchhoff malzeme modelinde stress tensorü aşağıdaki ifade ile tanımlanır:

$$\mathbf{S} = \lambda \mathrm{trace}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \tag{2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^\top \mathbf{F} - \mathbf{I}) \tag{3}$$

burada $\mathbf{S}$ ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tensörü, $\mathbf{F}$ deformasyon gradyanı, $J = det(\mathbf{F})$ deformasyon gradyanının determinantı, $\mathbf{E}$ ise the Green-Lagrange birim şekil değiştirme tensörü, λ ve μ ise malzemenin Lame sabitleridir. Yapı hareket denklemi deforme olmamış başlangıç konfigürasyonda, birinci Piola-Kirchhoff gerilme tensörü $\boldsymbol{\Pi}$ ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial \mathrm{t}^2} = \nabla_0 \cdot \boldsymbol{\Pi}^\top + \rho_0 \mathbf{b} \tag{4}$$

burada ρ_0 katının deforme olmamış birim hacmine göre tanımlanan yoğunluğu, and ∇_0 ise referans konfigürasyona göre tanımlanmış gradyan operatörüdür.

Akışkan Denklemleri

Sıkıştırılamaz viskoz Navier-Stokes denklemlerinin integral formu hareketli bir kontrol hacmi $\Omega(t)$ ve kontrol hacmi sınırları $\partial\Omega(t)$ için kartezyen koordinat sisteminde boyutlu halde aşağıdaki şekilde verilebilir.

Momentum denklemi:

$$\rho_f \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \mathbf{u} dV + \rho_f \oint_{\partial\Omega} [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} - \dot{\mathbf{x}})] \mathbf{u} dS = \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} dS \tag{5}$$

Süreklilik denklemi:

$$-\oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, dS = 0 \tag{6}$$

Bu denklemlerde, V kontrol hacmi, S kontrol hacmi yüzey alanı, $\mathbf{n}$ alan normal vektörü, ρ_f akışkan yoğunluğu, $\mathbf{u}$ yerel akışkan hız vektörü, $\dot{\mathbf{x}}$ grid hızı ve $\boldsymbol{\sigma}_f$ akışkan gerilme tensörüdür. Sıkıştırılamaz ve Newtonian bir akışkan için akışkan gerilme tensörü uygunluk denklemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -p\mathbf{I} + \mu_f(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\top) \tag{7}$$

burada p akışkan basıncı ve μ_f akışkan dinamik viskozitesidir.

Arayüz Koşulları

Akışkan-yapı bağlaştırma şemalarının temel şartı akışkan-yapı arayüzünde dinamik ve kinematik sürekliliğin bütün zamanlarda sağlanmasıdır. Arayüzde kinematik sınır koşulları hızın sürekliliği ile verilir, başka bir değişle akışkan ve yapı hızları arayüzde eşit olmak zorundadır.

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{d}} \tag{8}$$

Dinamik sınır şartı ise akışkan-yapı arayüzünde yüzey gerilme dengesinin kurulmuş olmasını gerektirir.

$$\boldsymbol{\sigma}_s \boldsymbol{n}_s = -\boldsymbol{\sigma}_f \boldsymbol{n}_f \tag{9}$$

burada $\boldsymbol{n}_s$ ve $\boldsymbol{n}_f$ arayüzde sırasıyla yapı ve akışkan yüzeylerinden dışarı doğru yönlenen birim normal yüzey vektörleridir. $\boldsymbol{\sigma}_s$ yapı bölgesinin Cauchy gerilme tensörünü ve $\boldsymbol{\sigma}_f$ ise sıkıştırılamaz ve Newtonian akışkan için gerilme tensörünü ifade etmektedir.

Tam Bağlaşık Denklem Sistemi

Akışkan ve yapı denklemleri arayüz koşulları ve grid deformasyon algoritması ile bağlaştırıldığında aşağıdaki lineer olmayan denklem sistemi elde edilir.

$$\left[\begin{array}{cc|c|cc|c} A_{uu} & A_{uu_\Gamma} & A_{uq} & 0 & 0 & A_{up} \\ 0 & A_{u_\Gamma u_\Gamma} & 0 & 0 & A_{u_\Gamma d_\Gamma} & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{qq} & 0 & A_{qd_\Gamma} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_{dd} & A_{dd_\Gamma} & 0 \\ A_{d_\Gamma u} & A_{d_\Gamma u_\Gamma} & 0 & A_{d_\Gamma d} & A_{d_\Gamma d_\Gamma} & A_{d_\Gamma p} \\ \hline A_{pu} & A_{pu_\Gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{u}_\Gamma \\ \hline \delta\mathbf{q} \\ \hline \delta\mathbf{d} \\ \delta\mathbf{d}_\Gamma \\ \hline \delta p \end{array}\right] = - \left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_{1\Gamma} \\ \hline r_2 \\ \hline r_3 \\ r_{3\Gamma} \\ \hline r_4 \end{array}\right] \tag{10}$$

Blok yapıda verilen bu sistemde ilk satır, akışkan-yapı kinematik bağlaştırma koşulları ile birlikte akışkan momemtum denklemini ifade etmektedir. Satırın ilk kısmı akışkan taşınım-yayınım, ikinci kısmı ALE grid hareketi, üçüncü kısmı kinematik sınır koşulları ve son kısmı ise basınç gradyanından oluşmaktadır. İkinci satır ise grid deformasyonunu ifade etmektedir. Burada A_{qq} bloğu cebirsel grid deformasyonu yöntemi kullanıldığında bir birim matristir. Üçüncü satırım ilk bloğu arayüzde akışkan vizkoz yüklerini, üçüncü bloğu lineer olmayan yapı denklemlerini, son blok ise basınç yüklerini içermektedir. Son satır ise akışkan kütle korunum denkleminden kaynaklanmaktadır. Bu değişkenler birbirleriyle diagonal-dışı bloklar ile bağlaşık durumdadırlar.

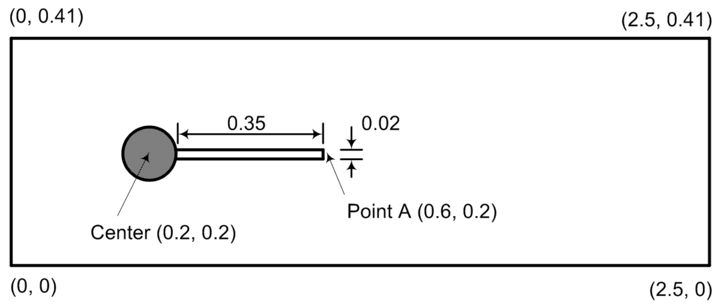
Geliştirilen monolitik FSI çözücü, ortaya çıkan tam bağlaşık denklem sisteminin çözümünde, ön-koşulu bir Krylov alt uzay metodu kullanmaktadır. Hızın diverjansinin sıfır olması koşulu nedeniyle oluşan sıfır blok diyagonal, bütün sitem için verimli ön-koşullandırıcıların uygulanmasını zorlaştırmaktadır. Mevcut yöntemde ise, orijinal sistemdeki sıfır blok yerine ölçeklenmiş bir ayrık Laplacian oluşturan bir üst üçgen sağ ön-koşullandırıcı uygulanmaktadır. Bu ön-koşullandırma, matris-matris çarpımları nedeniyle sıfır olmayan eleman sayısında belirgin bir artışa neden olduğu için, ön-koşullandırıcının sıfır olmayan bloğu hesaplama açısından daha az pahalı bir matris ise değiştirilmektedir. Momentum denkleminde basınç gradyanlarina olan katkı, hız vektörlerinin ayrıklaştırıldığı ortak eleman yüzeyini paylasan sağ ve soldaki elemanlardan olduğundan, kullanılan bu matris sadece bu katkılardan kaynaklanan terimleri içermektedir. Bu yaklaşım iteratif çözücünün yakınsama karakterini çok belirgin şekilde etkilemese de, özellikle 3-boyutlu hesaplamalarda, hesaplama zamanı ve hafıza gereksinimlerinde ciddi azamlar sağlamaktadır. Mevcut tek seviye iteratif çözüm yaklaşımı, sistemin simetrik olmayan doğası gereği, kısıtlı aditif Schwarz ön-koşullu esnek GMRES(m) (restricted additive Schwarz preconditioned flexible GMRES) Krylov alt uzay algoritmasına dayanmaktadır. Sistemin her alt bölgesinde blok ILU faktorizasyonu uygulanmıştır. Algebrik denklemlerin doğasından kaynaklanan doğrusal olmama durumu nedeniyle, yeterince tatmin edici bir yakınsama kriterine ulaşıncaya kadar her zaman adımında alt-iterasyonlar uygulanmıştır. Mevcut ön-koşullu Krylov alt uzay algoritması, matris-matris çarpımları ve kısıtlı aditif Schwarz ön-koşullandırıcı uygulaması için PETSc (Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation) (Balay ve diğerleri [2017]) kütüphanesi kullanılmıştır. Bu kütüphane, doğrusal ve doğrusal olmayan denklem çözücülerinin paralel impilementasyonu için oluşturulmuş veri yapıları ve rutinleri içermektedir. Bütün akışkan-yapı ara yüzünün yapısal olmayan çözüm ağı, METIS kütüphanesi kullanılarak alt parçalara ayrılmıştır. Bu kütüphane, yapısal olmayan grafik ve çözüm ağlarının paralel programlamaya yönelik parçalanması için geliştirilmiş programlar içeren bir kütüphanedir.

Akışkan ve yapı denklemlerinin ayrıklaştırılması ve tam bağlaşık denklem sisteminin kurulması ile ilgili detaylı bilgilere Eken, Sahin [2016, 2017]'den ulaşılabilir.

UYGULAMALAR

Rijit Silindir Arkasına Yerleştirilmiş Elastik Kiriş

Geliştirilen monolitik FSI çözücüsü literaturde verilen birçok FSI test konfigürasyonuna uygulanarak doğruluğu ve paralel çözüm verimliliği test edilmiştir Eken, Sahin [2016]. Bu konfigürasyonlardan oldukça popüler olan 2-boyutlu bir FSI problemi Turek ve Hron [2006]'de önerilmiştir. Bu problem rijit dairesel bir engel arkasına yerleştirilmiş elastik bir kirişin girdap kaynaklı periyodik hareketini incelemektedir (Şekil 1).



Şekil 1: 2-boyutlu test problemi geometrisi.

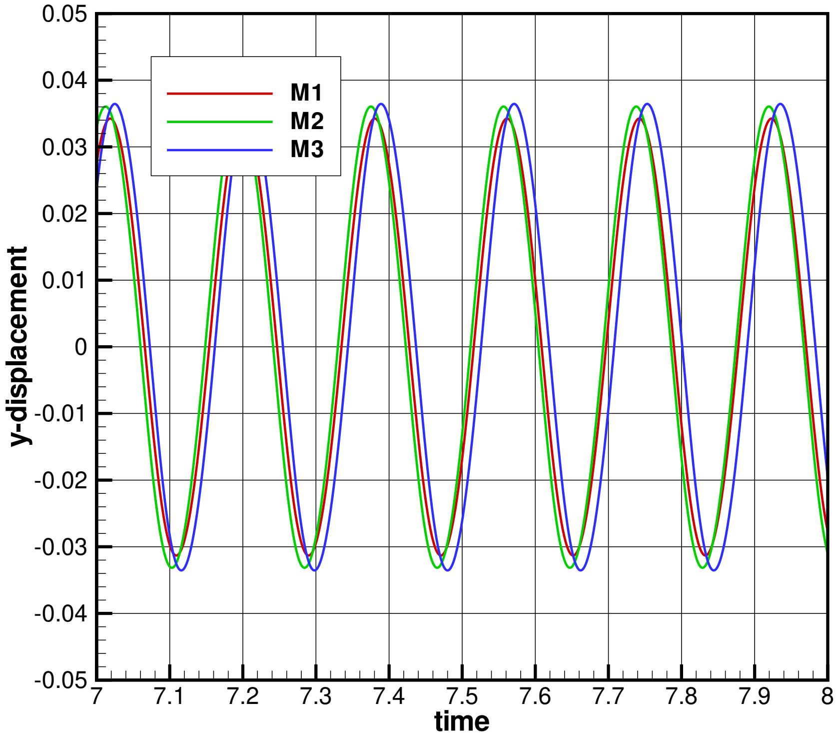
Silindir-eleastik kiriş iki paralel duvar arasında asimetrik olarak yerleştirilmiştir ve silindir arkasından kopan girdaplar elastik kiriş üzerine periyodik bir hareket indüklemektedir (Şekil 2,3). Çözücünün paralel çözüm verimliliğinin testi açısından üç farklı grid çözünürlüğü (M1, M2 ve M3) uygulanmıştır. Bu farklı grid çözünürlükleri için A noktasının $(Re = 200)$ 'de yakınsamış çözümleri literaturdeki çözümler ile karşılaştırmalı olarak Tablo 1'de verilmiştir.

Beyin Arteri Anevrizması

Bu FSI problemi bir hastanın beyin arterindeki çatallanmada ortaya çıkmış bir anevrizmanın akışkan-yapı etkileşiminin incelendiği gerçekçi bir problemdir (Şekil 4). Anevrizma geometrisi Marchandise ve diğerleri [2012]'den alınmıştır. Bu problem için oluşturulan grid tamamen altı-yüzlü elemanlardan oluşmaktadır ve toplamda 7,101,969 serbestlik derecesine sahiptir. Bu grid için çözücünün performası farklı işlemci sayıları için Tablo 2'de listelenmiştir. Aynı seviye ILU

Tablo 1: A noktasında deplasmanlar $(Re = 200)$. "ref." değeri yazarların M3 gridinin çözümüne karşı gelmektedir.

	DOF	d_x [m][$\times 10^{-3}$]	d_y [m][$\times 10^{-3}$]
Present (M1)	54,656	-2.573 ± 2.449	1.473 ± 32.777
Present (M2)	206,352	-2.823 ± 2.671	1.453 ± 34.603
Present (M3)	800,444	-2.882 ± 2.722	1.452 ± 34.995
Turek ve diğerleri [2010]	ref.	-2.88 ± 2.72	1.47 ± 34.99
Chabannes ve diğerleri [2013]	95,427	-2.88 ± 2.75	1.35 ± 34.72



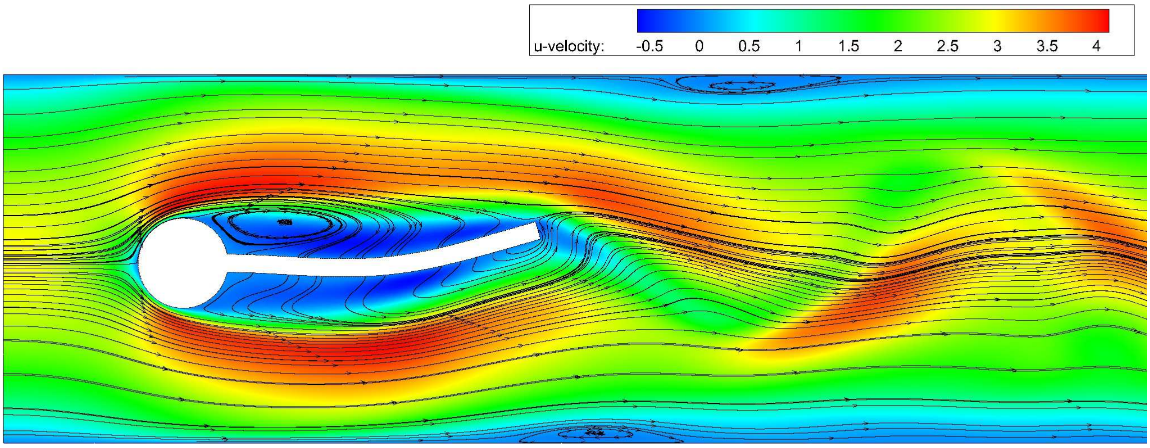
(a)

Şekil 2: A noktasında düşey deplasmanın zamanla değişimi, $Re = 200$.

onkoşullandırıcı seçenekleri için çözücünün ölçeklenme karakterinin oldukça iyi olduğu görülmektedir. Şekil 5'te duvar kayma gerilmeleri ve akım çizgileri $t = 2.16s$ için verilmektedir.

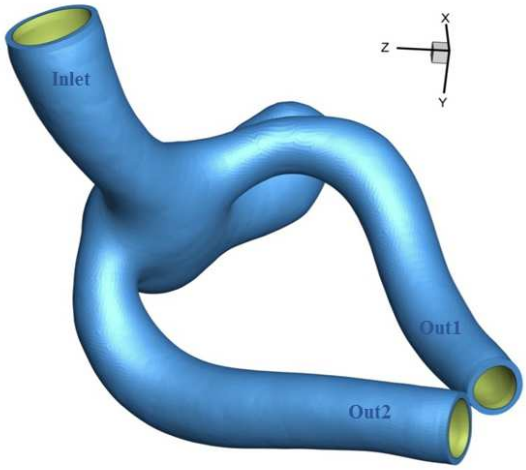
Tablo 2: Arter anevrizması problemi için yakınsama ve ölçeklenme karakteri (Intel Xeon 5550).

DOF	Method	CPUs	ASM overlap	Outer	FGMRES Outer	Total time [s]
7,101,969	ILU(2)	128	1	3.1	38.2	231.9
7,101,969	ILU(1)	128	1	3.1	60.8	105.2
7,101,969	ILU(1)	64	1	3.1	58.9	194.0
7,101,969	ILU(2)	64	1	3.1	36.0	415.7



(a)

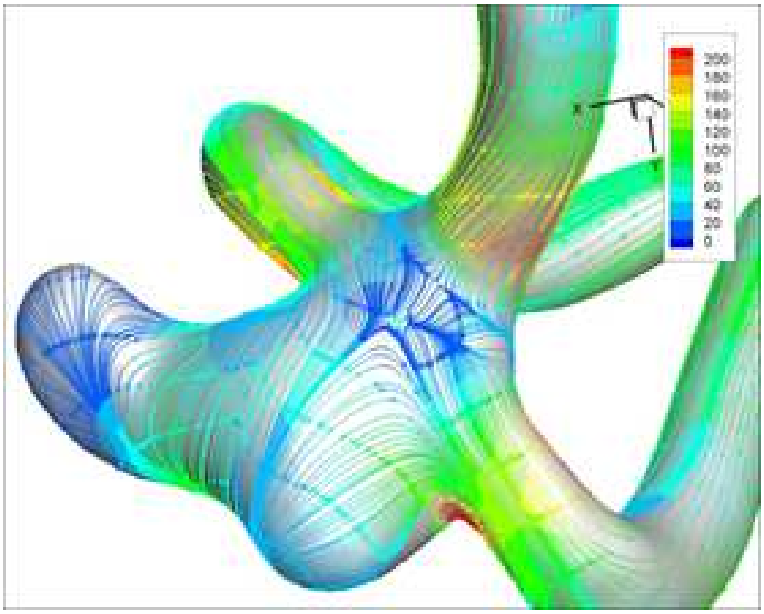
Şekil 3: Hesaplanan $u-$hız vektörü konturları ve akım çizgileri, $t = 8.072\,\text{s}$ (a), $t = 8.117\,\text{s}$ (b), $Re = 200$.



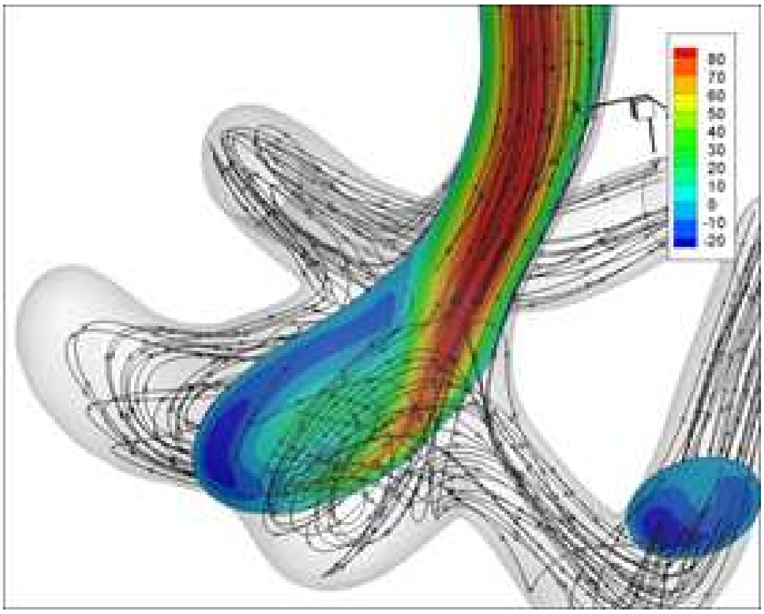
Şekil 4: Anevrizma geometrisi

SONUÇ

Büyük ölçekli akışkan-yapı etkileşimi problemlerinin verimli bir şekilde paralel ve tam bağlaşık olarak çözülmesine yönelik, ALE tabanlı bir sonlu hacimler akışkan çözücüsü ile sonlu elemanlar yöntemine dayalı bir yapı çözücüsünün monolitik olarak bağlaştırılmasına dayanan bir FSI çözücüsü geliştirilmiştir. Geliştirilen FSI çözücüsü literatürde karşılaşılan birçok test problemi için denenmiş ve doğruluğu kanıtlanmıştır. Geliştirilen bu çözücü daha sonra hastaya özgü bir beyin arter anevrizmasında akışkan-yapı etkileşimi problemine uygulanmıştır. İlerleyen çalışmalarda esnek membran kanatlı mikro hava araçlarında akışkan yapı-etkişleşimi problemlerine uygulanması hedeflenmektedir.



(a)



(b)

Şekil 5: Duvar kayma gerilme çizgileri (a) ve 3-boyutlu akım çizgileri ile düşey hız komponentleri (b) $t = 2.16s$.

Kaynaklar

Balay, S., Abhyankar, S., Adams, M. F., Brown, J., Brune, P., Buschelman, K., Dalcin, L., Eijkhout, V., Gropp, W. D., Kaushik, D., Knepley, M. G., McInnes, L. C., Rupp, K., Smith, B. F., Zampini, S., Zhang, H., and Zhang, H. (2017). *PETSc users manual* ,Technical Report ANL-95/11 - Revision 3.8, Argonne National Laboratory.

Chabannes, V., Pena, G. and Prud'homme, C. (2013). *High-order fluid-structure interaction in 2D and 3D application to blood flow in arteries*, J. Comput. Appl. Math., 246:1–9.

Eken, A., Sahin, M., 2016. *A Parallel Monolithic Algorithm for the Numerical Simulation of Large-Scale Fluid-Structure Interaction Problems*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 80:687-714.

Eken, A., Sahin, M., 2017. *A Parallel Monolithic Approach for Fluid-Structure Interaction in a Celabral Aneurysm*, Computer and Fluids, 153:61-75.

Marchandise, E., Crosetto, P., Geuzaine, C., Remacle, J.F. and Sauvage, E. (2012). *Quality open source mesh generation for cardiovascular flow simulations* ,Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Turek, S. and Hron, J., (2006). *Proposal for Numerical Benchmarking of Fluid-Structure Interaction between an Elastic Object and Laminar Incompressible Flow*, , H.J. Bungartz and M. Schäfer, editors, Fluid-Structure Interaction, volume 53 of Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer Berlin Heidelberg, 53:371–385.

Turek, S., Hron, J., Madlik, M., Razzaq, M., Wobker, H. and Acker, J.F. (2010). *Numerical simulation and benchmarking of a monolithic multigrid solver for fluid-structure interaction problems with application to hemodynamics.*, In: Bungartz HJ., Mehl M., Schäfer M. (eds) Fluid Structure Interaction II. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol 73. Springer, Berlin, Heidelberg.