VII. ULUSAL HAVACILIK VE UZAY KONFERANSI **UHUK-2018-111**
12-14 Eylül 2018, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun

ESNEK UZAY ARACI YÖNELİM DİNAMİĞİNİN DOĞRUSAL DEĞİŞEN PARAMETRE YAKLAŞIMI İLE MODELLENMESİ

Utku GÜRCÜOĞLU[1]
ROKETSAN Roket San. ve Tic. A.Ş., Ankara

ÖZET

Esnek bir uzay aracının zamana-bağlı ve doğrusal olmayan yönelim modeli, doğrusal değişen parametre modeli formunda temsil edilmiştir. Parametre kümesi eşleştirme yöntemi uygulanarak, doğrusal değişen parametre modelinin karmaşıklığı azaltılmıştır. Elde edilmiş olan düşük karmaşıklığa sahip doğrusal değişen parametre modelinin doğruluğu, birincil bileşenler analizi yönteminin uygulanması sayesinde korunmuştur. Böylece, düşük karmaşıklıklı olarak elde edilen doğrusal değişen parametre modeli formundaki esnek uzay aracı yönelimi dinamik modelinin, kazanç-düzenlemeli ve zamanla değişmeyen doğrusal kontrolör ile kontrol edilmesi mümkün kılınmıştır.

GİRİŞ

Doğrusal değişen parametre (linear parameter varying – LPV) yaklaşımıyla modelleme, parametreye bağımlı esnek uzay aracı yönelim dinamiğine ait durum-uzayı modelinin doğrusallaştırmaya gerek duyulmadan direkt olarak doğrusal olmayan dinamik modelden türetilmesini mümkün kılar. Bu yaklaşım ile pratikte uygulanabilir kazanç-düzenlemeli kontrolcü tasarımı gerçekleştirilebilir [Apkarian, Biannic, Gahinet, 1993].

Bu çalışmada, uzay aracının doğrusal olmayışı ve esnek kipleri nedeniyle ortaya çıkan parametre varyasyonu, esnek uzay aracı yönelim modelinde LPV yaklaşımı benimsenerek kapsanmıştır. Bu çalışmanın neticesinde, esnek uzay aracı çalışma noktalarının uzay aracı görevi doğrultusunda belirlenmiş olup tüm operasyonel yönelim kontrol manevralarına tekabül eden belirli bir parametre kümesi içerisinde sınırlandığı göz önüne alınarak, belirli bir frekans-domeninde tanımlı performans gereksinimlerini sağlayan kazanç-düzenlemeli kontrolcü kararlı ve gürbüz surette tasarlanabilecektir.

ESNEK UZAY ARACI YÖNELİM DİNAMİĞİ MODELİ

Esnek uzantılara sahip bir uzay aracı dinamik modeline [Bilgin, Salamcı, 2014] ait durum vektörü, dördey (*quaternion*) ile temsil edilerek aşağıdaki gibi geliştirilmiştir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}(\mathfrak{q})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{1}$$

Yukarıda $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{15}$ durum vektörünü belirtmekte olup elemanları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

- Yönelim döneyi $\mathfrak{q} = (\boldsymbol{q}, q_4) \in \mathbb{H}$ uzay aracının atalet eksen takımına göre yönelimini belirtmekte olup $\boldsymbol{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^\intercal$ olarak tanımlanmıştır.
- Açısal hız vektörü $\boldsymbol{\omega} = [p \quad q \quad r]^\intercal$ uzay aracının kendi yapısına sabit gövde ekseni etrafında açısal hızını temsil eder.

[1] Uzay Sistemleri Tasarım Sorumlusu, İleri Teknolojiler ve Sistemler Grubu, E-posta: utku.gurcuoglu@roketsan.com.tr

— Kipsel yerdeğiştirme vektörü $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^4$ uzay aracının esnek uzantılarına ilişkin esnek serbestlik dereceleri doğrultusunda salınımları temsil eder.

— Kipsel hız vektörü $\dot{\boldsymbol{\eta}} \in \mathbb{R}^4$ uzay aracının esnek uzantılarına ilişkin esnek serbestlik derecelerini doğrultusunda salınımının zamana göre birinci türevini temsil eder.

Böylece durum vektörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{q} \quad q_4 \quad \boldsymbol{\omega} \quad \boldsymbol{\eta} \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}]^{\mathsf{T}}. \tag{2}$$

Reaksiyon tekerleklerince uzay aracına etki ettirilen tork, giriş vektörü $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ aracılığı ile gövde ekseninde aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\boldsymbol{u} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3]^{\mathsf{T}}. \tag{3}$$

Çıkış vektörü $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$, yönelim hatasını “kalan döney” (*to-go quaternion*) formatında aşağıdaki gibi atalet eksen takımında ifade eder:

$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{t} \quad t_4]^{\mathsf{T}}. \tag{4}$$

Kalan döney, $\mathcal{t} = (\boldsymbol{t},\ t_4) \in \mathbb{H}$ ile ifade edilip, doğrultusu $\boldsymbol{t} = [t_1 \quad t_2 \quad t_3]^{\mathsf{T}}$ ile ifade edilmiştir.

(1) denklemindeki $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{15\times15}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{3\times15}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{4\times15}$ ve $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{4\times3}$ matrisleri sırasıyla sistem matrisini, giriş matrisini, çıkış matrisini ve ileribesleme matrisini ifade etmektedir. Uzay aracının ileribeslemeye sahip olmadığı kabul edileceğinden $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$'dır. $\boldsymbol{A}$ sistem matrisi ise aşağıdaki gibi, uzay aracı yöneliminin dinamik davranışını temsil eder ve doğrusal olmayan zaman-bağımlı (*time-variant*) terimler içerir:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_q(\boldsymbol{\omega}) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{\omega}^{\times}\boldsymbol{J}_{sc} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{\omega}^{\times}\boldsymbol{\delta}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{K}_f & -\boldsymbol{D}_f \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Yukarıda $\boldsymbol{I}$ birim matris olup, $\boldsymbol{A}_q(\boldsymbol{\omega})$ uzay aracı açısal hız vektörünün elemanlarına (p, q, r) bağımlı bir zaman-bağımlı matristir. $\boldsymbol{A}_q(\boldsymbol{\omega})$ matrisi, uzay aracının anlık yönelim döneyini uzay aracının yönelim döneyinin zamana göre türevi $\dot{\mathcal{q}}$ ile aşağıdaki gibi ilişkilendirir:

$$\dot{\mathcal{q}} = \boldsymbol{A}_{\mathcal{q}}(\boldsymbol{\omega})\mathcal{q}. \tag{6}$$

(6) ifadesi aşağıdaki gibi daha açık yazılabilir:

$$\boldsymbol{A}_{\mathcal{q}}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & r & 0 & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix}.$$

Aykırı-simetrik bir $\boldsymbol{\omega}^{\times}$ matrisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\boldsymbol{\omega}^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}.$$

(5) ifadesindeki $\boldsymbol{J}_{sc} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ uzay aracının eylemsizlik momentini gövde ekseninde ifade eder. Bağlaşım (*coupling*) matrisi $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^{4\times4}$ uzay aracının katı cisim dinamiği ile esnek uzantılar nedeniyle ortaya çıkan esnek kip dinamiği arasındaki bağlaşımı temsil eder. Sırasıyla direngenlik matrisi ve sönümleme matrisi $\boldsymbol{K}_f \in \mathbb{R}^{4\times4}$ ve $\boldsymbol{D}_f \in \mathbb{R}^{4\times4}$ esnek kiplerin serbestlik dereceleri doğrultusunda yaylanmaya ve enerji kaybına neden olup aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$\boldsymbol{K}_f = \mathrm{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \omega_4^2),$$
$$\boldsymbol{D}_f = \mathrm{diag}(2\zeta_1\omega_1, 2\zeta_2\omega_2, 2\zeta_3\omega_3, 2\zeta_4\omega_4),$$

Yukarıda $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ve ω_4 esnek kiplerin doğal frekansları olup, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ ve ζ_4 ise esnek kiplerin sönümlenme katsayılarıdır.

Giriş matrisi $\boldsymbol{B}$ sabit olup aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Çıkış matrisi zaman-bağımlı olup, “hedef yönelim döneyine” ait elemanları içerir. Hedef yönelim döneyi $\mathcal{d} = (\boldsymbol{d}, d_4) \in \mathbb{H}$ ve doğrultusu $\boldsymbol{d} = [d_1 \quad d_2 \quad d_3]^\intercal$, atalet eksen takımına göre erişilmek istenen yönelimi temsil eder. Hedef yönelim döneyi, uzay aracının “anlık yönelim döneyi” $\mathcal{q}$’yu, kalan döney $\mathcal{t}$ ile aşağıdaki gibi ilişkilendirir:

$$[\boldsymbol{t} \quad t_4]^\intercal = \boldsymbol{C}(\mathcal{d})[\boldsymbol{q} \quad q_4]^\intercal. \tag{8}$$

(8) denklemindeki $\boldsymbol{C}(\mathcal{d})$ matrisi daha açık ifadeyle aşağıdaki gibidir:

$$\boldsymbol{C}(\mathcal{d}) = \begin{bmatrix} -d_4 & d_3 & -d_2 & d_1 \\ -d_3 & -d_4 & d_1 & d_2 \\ d_2 & -d_1 & -d_4 & d_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}.$$

(1) denklemindeki $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{\mathbf{15\times15}}$ bağlaşım matrisi uzay aracının esnek kipleri ve katı cisim kipleri arasında bağlaşımı ifade edip aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{J}_{sc} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\delta}^\intercal \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\delta} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

DOĞRUSAL DEĞİŞEN PARAMETRE YAKLAŞIMI İLE YÖNELİM DİNAMİĞİ MODELİ ELDESİ

LPV yaklaşımı, esnek uzay aracının parametre-bağımlı durum-uzayı modelinin elde edilmesine imkân verir. Esnek uzay aracına ait parametre-bağımlı durum-uzayı modeli aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}(t))\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{u}(t). \end{aligned} \tag{10}$$

Yukarıda, $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta_1} \quad \boldsymbol{\theta_2} \quad \dots \quad \boldsymbol{\theta_l}]^\intercal$ zaman-bağımlı model parametreleri vektörü olup aynı zamanda $\boldsymbol{\rho(t)} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{k}}$ düzenleme sinyalinin sürekli bir fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\rho}), \\ \boldsymbol{f}&: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l. \end{aligned} \tag{11}$$

Düzenleme sinyali, sistemin dâhili sinyallerinden, $\boldsymbol{\rho_i}$, ve sistemin haricî sinyallerinden, $\boldsymbol{\rho_e}$ aşağıdaki gibi meydana gelir:

$$\boldsymbol{\rho} = [\boldsymbol{\rho}_i \quad \boldsymbol{\rho}_e]^\intercal. \tag{12}$$

Eğer düzenleme sinyali hiçbir dâhili sinyal içermiyorsa, yani sistemin kendi dinamiklerine bağlı değil de yalnızca haricî girdilere bağlı ise bu tip bir sistem, LPV sistemler sınıfına girer; aksi halde sistem LPV-benzeri sistemler sınıfına girer.

Parametre Kümesi

Tüm zaman-bağımlı model parametreleri vektörleri, $\boldsymbol{\mathcal{P}_\theta}$, parametre kümesini aşağıdaki gibi oluşturur.

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_\theta \subset \mathbb{R}^l: \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_\theta, \forall t > 0. \tag{13}$$

Parametre Kümesinin Dışbükeyliği

Parametrelerin alt sınırları, $\underline{\boldsymbol{\theta}_i}$, ve üst sınırları, $\overline{\boldsymbol{\theta}_i}$, düzenleme sinyali tarafından belirlenir. Alt ve üst sınırların tüm kombinasyonları, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{2^l}$ olmak üzere, $\boldsymbol{\mathcal{P}_\theta}$ parametre kümesinin köşelerini $(\boldsymbol{\theta_{v1}}, \boldsymbol{\theta_{v2}}, \dots, \boldsymbol{\theta_{vL}} \epsilon \mathbb{R}^{\boldsymbol{k}}$)meydana getirmektedir.

Örneğin; yalnızca iki parametre, $\boldsymbol{\theta_1}$ ve $\boldsymbol{\theta_2}$, tanımlanmış olsun. Bu parametrelerin üst sınırları ve alt sınırları sırasıyla $\overline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{1}}$, $\overline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{2}}$ ve $\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{1}}$, $\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{2}}$ olsun. Bu durumda parametre kümesinin köşeleri aşağıdaki gibi gerçekleşir:

$$\boldsymbol{\theta}_{v1} = \begin{bmatrix} \underline{\theta}_1 \\ \underline{\theta}_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\theta}_{v2} = \begin{bmatrix} \overline{\theta}_1 \\ \underline{\theta}_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\theta}_{v3} = \begin{bmatrix} \underline{\theta}_1 \\ \overline{\theta}_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\theta}_{v4} = \begin{bmatrix} \overline{\theta}_1 \\ \overline{\theta}_2 \end{bmatrix}.$$

■

LPV sistemlerde, $\boldsymbol{\mathcal{P}_\theta}$ parametre kümesi, dışbükey bir kabuk ya da zarf şeklinde bir politop olup köşeleri $\boldsymbol{\theta_{v1}}, \boldsymbol{\theta_{v2}}, \ldots, \boldsymbol{\theta_{vL}}$ olarak tanımlanır. Dolayısıyla tanım gereği, herhangi bir zaman-bağımlı $\boldsymbol{\theta_i}$ parametresi, derli toplu bir $\boldsymbol{\mathcal{P}_\theta}$ parametre kümesi içerisinde tekâmül edip, yine bu $\boldsymbol{\mathcal{P}_\theta}$ parametre kümesini asla terk etmez.

LPV Modelinin İlgin (*Affine*) Nitelikleri

Herhangi bir parametre vektörü $\boldsymbol{\theta(t)}$'nın konumu, dışbükey koordinat vektörü $\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha_1} \quad \boldsymbol{\alpha_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha_L}]^\mathsf{T}$ kullanılarak aşağıdaki gibi tespit edilebilir:

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \sum_{i=1}^{L} \alpha_i \boldsymbol{\theta}_{vi}, \qquad \alpha_i > 0 \text{ and } \sum_{i=1}^{L} \alpha_i = 1. \tag{14}$$

Parametre vektörünün (14)'teki gibi tespit edilmesine benzer şekilde, parametre-bağımlı durum-uzayı modelleri de dışbükey politopun köşelerine tekabül eden zamanla değişmeyen doğrusal (linear time-invariant – LTI) sistemlerin "ilgin kombinasyonları" olarak aşağıdaki gibi tespit edilebilir:

$$\boldsymbol{S}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big) = \sum_{i=1}^{L} \alpha_i \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}_{vi}), \qquad \alpha_i > 0 \text{ and } \sum_{i=1}^{L} \alpha_i = 1. \tag{15}$$

Yukarıda $\boldsymbol{S}\big(\boldsymbol{\theta(t)}\big)$ parametre-bağımlı durum-uzayı modelini temsil etmekte olup, daha açık biçimde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\boldsymbol{S}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big) & \boldsymbol{B}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big) \\ \boldsymbol{C}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big) & \boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big) \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Doğrusal Değişen Parametreli Modelin Elde Edilmesi

Esnek uzay aracı modelinde $\boldsymbol{\rho}$ düzenleme sinyali, açısal hızlar ve hedef yönelim döneyi bileşenlerinden oluşan bir vektör olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\boldsymbol{\rho} = [p \quad q \quad r \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4]^\mathsf{T}. \tag{17}$$

Hedef yönelim döneyi, haricî sinyaldir. Açısal hızların birer dahilî sinyal olması nedeniyle, esnek uzay aracı modeli LPV-benzeri sistemdir.

$\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{\theta(t)}\big)$, $\boldsymbol{B}\big(\boldsymbol{\theta(t)}\big)$, $\boldsymbol{C}\big(\boldsymbol{\theta(t)}\big)$, $\boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{\theta(t)}\big)$ **ve** $\boldsymbol{M}\big(\boldsymbol{\theta(t)}\big)$ matrislerinin incelenmesi sonucu, asgari sayıda zaman-bağımlı parametre sunan $\boldsymbol{f(\rho)}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\rho}. \tag{18}$$

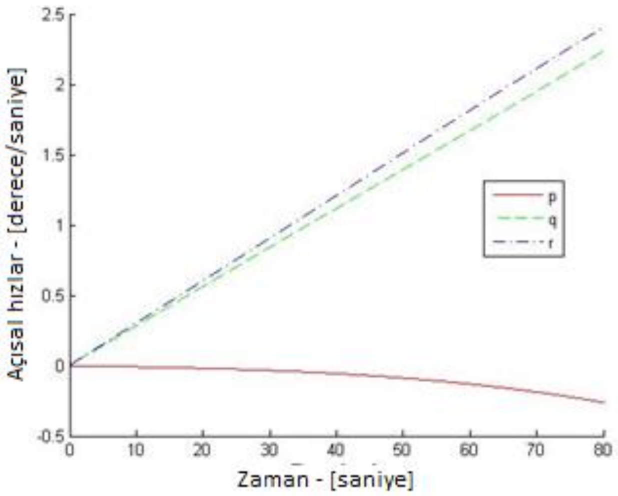
Böylece, parametre vektörü düzenleme sinyaline denk olarak seçilmiştir. Bunun sonucunda, $\boldsymbol{k = l = 7}$ olup, parametre kümesi köşelerinin miktarı $\boldsymbol{L = 2^l = 128}$ adet olmaktadır. $\boldsymbol{L = 128}$ oldukça yüksek mertebede bir miktar olup elde edilecek LPV modelinin kontrolcü sentezinde kullanılmasını yapılabilirlikten uzaklaştırmaktadır. Büyük $\boldsymbol{L}$ sayıları ile kontrolcü sentezlenememesinin altında, yüksek hesaplama gücü ihtiyacı ve elde edilecek kontrolcünün karmaşıklığı nedeniyle gerçek-zamanlı uygulamalarda pratik olarak kullanılamayacak olması yatmaktadır. Bu nedenle, parametre adedinde düşüş sağlanması, esnek uzay aracı yönelim kontrolcüsü tasarımınının LPV modeline dayanarak gerçekleştirilmesini mümkün kılacaktır.

Parametre Adedinin Azaltılması

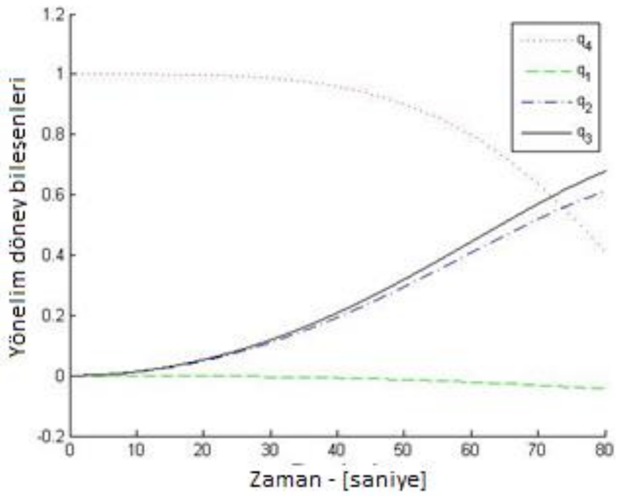
Parametre adedi düşürülürken aynı zamanda azaltılmış parametre vektörünün esnek uzay aracına ilişkin gerçek dinamikleri temsil edebilme kabiliyetinin de korunması gerekmektedir. Birincil bileşenler analizi (*principal components analysis* – *PCA*) bu gereksinimi karşılayabilir. PCA, esnek uzay aracının yönelim dinamiklerini temsil eden en anlamlı parametrelerin tespitini sağlar. PCA uygulamasını takiben uygulanacak parametre kümesi eşleştirme (*parameter set mapping* – *PSM*) yöntemi ile en anlamlı parametrelerin azaltılmış parametrelere projeksiyonu sağlanabilir.

Birincil Bileşenler Analizi

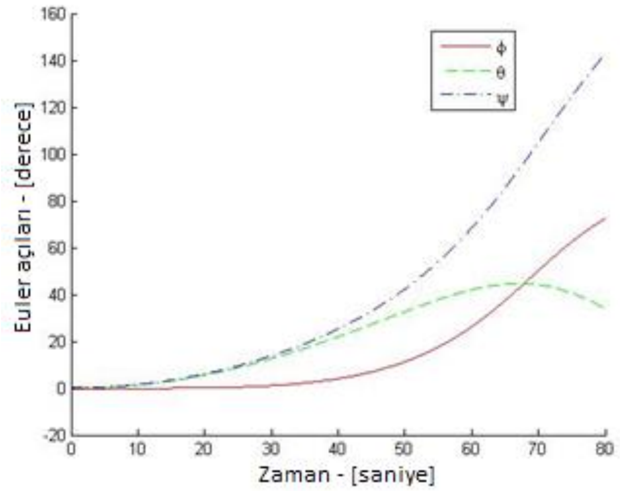
PCA uygulamasına girdi olmak üzere, düzenleme sinyallerine ilişkin tipik yörüngeler türetilmelidir. Tipik düzenleme sinyali yörüngelerini elde etmek için, tepki tekerlekleri tarafından esnek uzay aracına uygulanan torklar sonucu tekamül eden (1) denklemindeki modele ait durum vektörü, benzetim yoluyla elde edilmiştir. Tepki tekerlekleri için tipik spesifikasyonlar [De Weck, 2001] referansına göre belirlenip Tablo 1'de verilmiştir. Bu amaçla giriş vektörü $\boldsymbol{u} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0.25} \quad \mathbf{0.3}]^{\mathsf{T}}$ N olarak seçilmiştir.



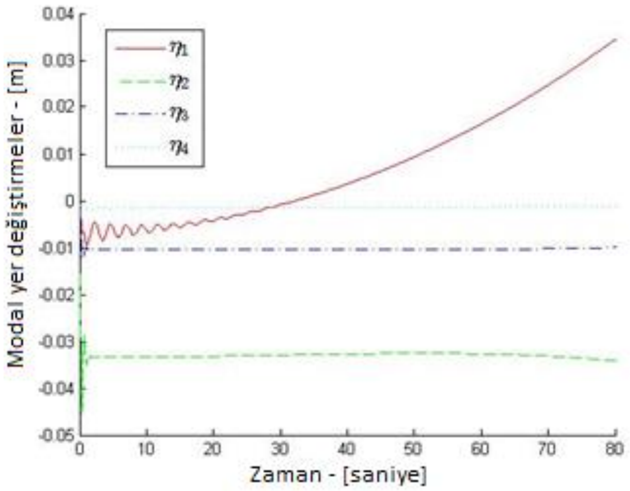
Şekil 1: Açısal Hızların Tipik Yörüngesi



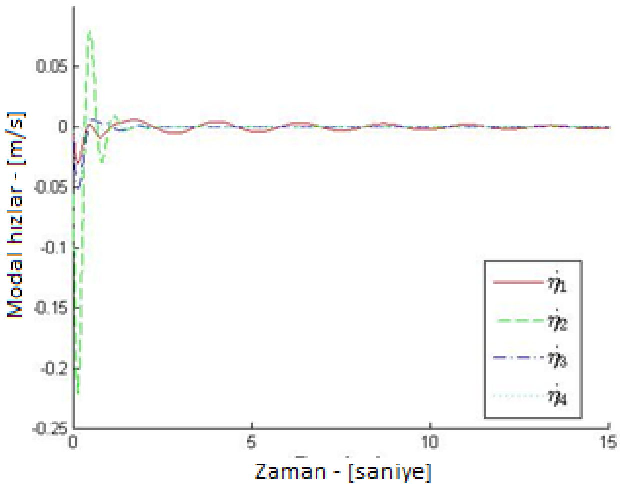
Şekil 2: Yönelim Döneylerinin Tipik Yörüngeleri



Şekil 3: Euler Açılarının Tipik Yörüngeleri



Şekil 4: Esnek Kiplere İlişkin Yer Değiştirmelerin Tipik Yörüngesi



Şekil 5: Esnek Kiplere İlişkin Hızların tipik Yörüngesi

Tablo 1: Tepki Tekerlekleri için Tipik Spesifikasyonlar

Çalışma Aralığı	:	$\pm$6000 RPM
Açısal Momentum @ 2000 RPM	:	1.3 Nms
Açısal Momentum @ 6000 RPM	:	4.0 Nms
Tepki Torku	:	0.020 - 0.3 Nm

(1) denklemindeki modele ait durum vektörünü meydana getiren açısal hızlar, yönelim döneyleri, Euler açıları, esnek kiplere ilişkin yer değiştirmeler ve esnek kiplere ilişkin hızlar sırasıyla Şekil 1'de, Şekil 2'de, Şekil 3'te, Şekil 4'te ve Şekil 5'te görülmektedir.

Elde edilen tipik yörüngeler kullanılarak $\mathbf{\Theta}$ veri matrisi aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$\mathbf{\Theta} = [\boldsymbol{\theta}(0) \quad \boldsymbol{\theta}(T_s) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\theta}(kT_s) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\theta}(NT_s)]. \tag{19}$$

Yukarıda, $\boldsymbol{k}$ örnekleme indisidir. Örnekleme periyodu $\boldsymbol{T_s} = \mathbf{0.01}$ saniyedir. Veri noktalarının adedi $\boldsymbol{N} = \mathbf{8001}$ olup toplam benzetim süresi $\boldsymbol{NT_s} = \mathbf{80}$ saniyedir.

Dikkat edilirse, (19) ifadesindeki veri matrisinin her bir satırı, parametrelerden birinin yörüngesidir. En anlamlı parametrelerin aranması kapsamında, parametreleri eşit ağırlıklandırmak için veri matrisinin her bir satırı sıfır ortalamaya ve birim standart sapmaya sahip olacak şekilde normalize edilmelidir. Normalizasyon operatörü $\boldsymbol{\mathcal{N}}(\cdot)$ olmak üzere, normalize veri matrisi $\mathbf{\Theta}^{\boldsymbol{n}}$ aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\mathbf{\Theta}^n = \mathcal{N}(\mathbf{\Theta}).$$

Normalize veri matrisindeki en anlamlı doğrultuları tespit etmek üzere, normalize veri matrisi aşağıdaki gibi tekil değer ayrışımına (*singular value decomposition – SVD*) tabi tutulur.

$$\mathbf{\Theta}^n = [\boldsymbol{U}_s \quad \boldsymbol{U}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} [\boldsymbol{V}_s^\intercal \quad \boldsymbol{V}_n^\intercal].$$

Yukarıda, $\mathbf{\Sigma}_s = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_m)$ ve $\mathbf{\Sigma}_n = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\sigma}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_l)$ sırasıyla anlamlı tekil değer matrisini ve anlamsız tekil değer matrisini belirtmektedir. En anlamlı tekil değerlerin adedi $\boldsymbol{m}$ olmak üzere $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{l}$ eşitsizliğini sağlayan yaklaşık veri matrisi, $\widehat{\mathbf{\Theta}}^{\boldsymbol{n}}$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\widehat{\mathbf{\Theta}}^n = \boldsymbol{U}_s \mathbf{\Sigma}_s \boldsymbol{V}_s^\intercal \approx \mathbf{\Theta}^n.$$

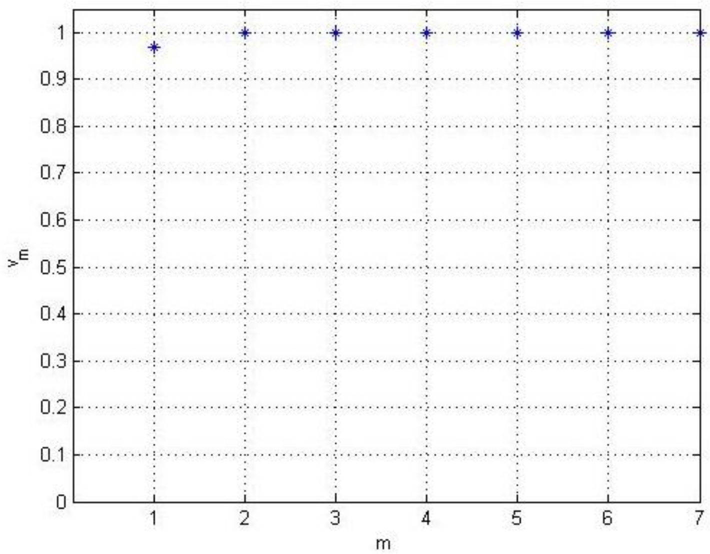
$\boldsymbol{m}$ değerinin seçimi, yaklaşık veri matrisinin barındırdığı bilgi miktarı ve elde edilen basitleştirilmiş LPV modelinin karmaşıklığı arasında bir getiri-götürüye dayanır. Getiri-götürü aşağıdaki $\boldsymbol{v_m}$ değeri üzerinden yapılabilir:

$$v_m = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{l} \sigma_i^2}.$$

$\boldsymbol{m = 1, 2, \dots, 7}$ için $\boldsymbol{v_m}$ değerleri Tablo 2'de verilmiş olup değerler ayrıca Şekil 6'da görselleştirilmiştir. $\boldsymbol{m = 3}$ değerinden büyük değerler için etkin bir iyileştirme olmadığı görülmektedir. Parametre sayısı $\boldsymbol{m = 3}$ olarak seçilebilir.

Tablo 2: $\boldsymbol{v_m}$ ile $\boldsymbol{m}$ Arasında Getiri-Götürü Tablosu

$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{v_m}$
1	0.96914022908
2	0.99838128371
3	**0.99999808773**
4	0.99999968188
5	0.99999997906
6	0.99999999996
7	0. 99999999999



Şekil 6: $\boldsymbol{v_m}$ ile $\boldsymbol{m}$ Arasında Getiri-Götürü

Parametre Kümesi Eşleştirme

LPV modelinin elde edilmesinde son aşama, düzenleme sinyalinin parametre vektörüne projeksiyonuna benzer şekilde, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ yaklaşık parametre vektörünün aşağıdaki gibi hesaplanmasıdır:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \widehat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\rho}). \tag{20}$$

Yukarıda $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = [\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1 \quad \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2 \quad \dots \quad \widehat{\boldsymbol{\theta}}_l]^\intercal$ olarak tanımlanmıştır. Kısaltılmış parametre vektörü $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ tanımlanarak aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{U}_s^\intercal \boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\theta}). \tag{21}$$

Yukarıda $\boldsymbol{\mathcal{N}}(\cdot)$ normalizasyon operatörünü temsil etmektedir. Denklem (21) kullanılarak, herhangi bir an için zaman-bağımlı model parametreleri vektörünü yaklaşıklayan yaklaşık parametre vektörü $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ hesaplanabilir.

Kısaltılmış parametre vektörünün yaklaşık parametre vektörüne dönüşümü, aşağıdaki gibi veri matrisine ait anlamlı sütun uzayının tabanı $\boldsymbol{U_s}$ ile sol çarpım ve ardından normalizasyon operatörünün tersi $\boldsymbol{\mathcal{N}^{-1}}(\cdot)$ ile ölçeklendirme gerçekleştirilerek hesaplanır:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\mathcal{N}^{-1}}\big(\boldsymbol{U}_s \boldsymbol{U}_s^\intercal \boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\theta})\big) = \boldsymbol{\mathcal{N}^{-1}}(\boldsymbol{U}_s \boldsymbol{\varphi}). \tag{22}$$

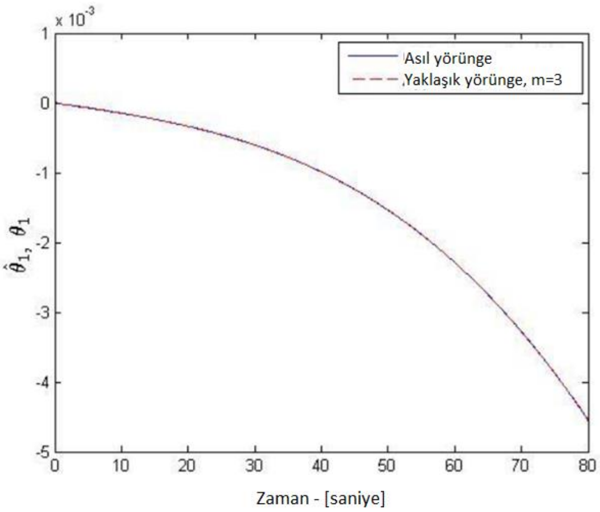
Kısaltılmış parametre vektörü, $\boldsymbol{\varphi}$, kullanılarak, (16) denkleminde verilen modeli yaklaşıklayan yaklaşık LPV modeline ait durum uzayı gösterimi $\widehat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}))$ aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\widehat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})) = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{A}}(\varphi(t)) & \widehat{\boldsymbol{B}}(\varphi(t)) \\ \widehat{\boldsymbol{C}}(\varphi(t)) & \widehat{\boldsymbol{D}}(\varphi(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t)\right) & \boldsymbol{B}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t)\right) \\ \boldsymbol{C}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t)\right) & \boldsymbol{D}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t)\right) \end{bmatrix}. \tag{23}$$

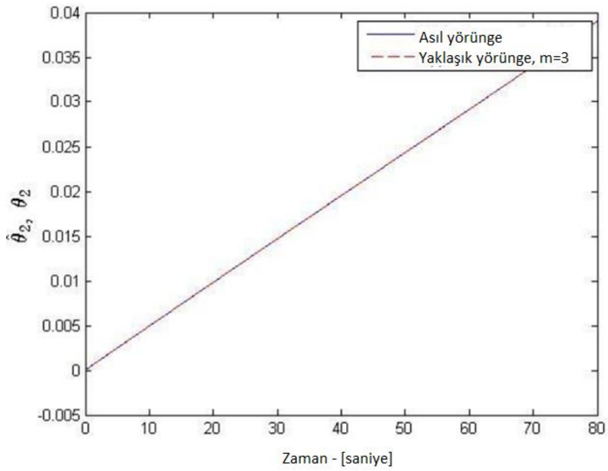
Parametre-bağımlı durum-uzayı yaklaşık modeli $\widehat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}))$, 3 adet parametreye sahip olduğundan daha düşük karmaşıklığa haizdir. Dolayısıyla bu model temel alınarak sentezlenen kontrolcünün gerçek-zamanlı uygulamalarda kullanımı yapılabilir olacaktır. Sonuç olarak, model karmaşıklığı düşürülmüştür, fakat elde edilen yaklaşık model esnek uzay aracının yönelim dinamiklerini yeterli doğrulukla yansıtmaktadır.

BENZETİM SONUÇLARI

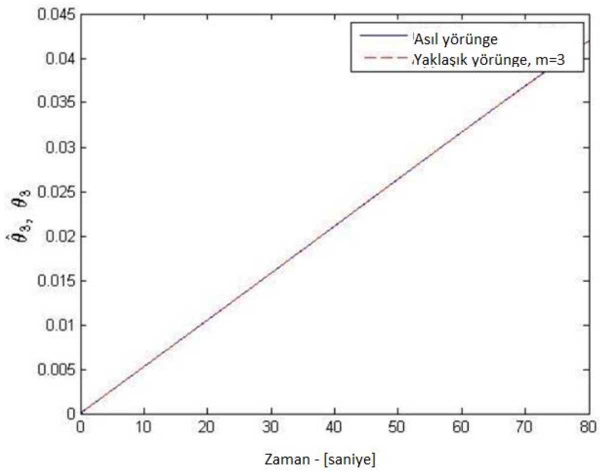
LPV formunda elde edilen yaklaşık esnek uzay aracı modelinin doğruluğunun gösterilmesi amacıyla (1) denklemi ile verilen asıl modele ait benzetim sonuçları ve (23) denklemi ile verilen yaklaşık modele ait benzetim sonuçları, parametre yörüngeleri üzerinden sırayla Şekil 7'de, Şekil 8'de, Şekil 9'da, Şekil 10'da, Şekil 11'de, Şekil 12'de ve Şekil 13'de karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar (22) denklemi ile hesaplanan yaklaşık parametrelere ait $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = [\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}} \quad \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}} \quad \dots \quad \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{l}}]^{\mathsf{T}}$ yörüngeleri ve (18) denklemi ile verilen $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{1}} \quad \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{2}} \quad \dots \quad \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{l}}]^{\mathsf{T}}$ asıl parametre yörüngeleri arasında gerçekleştirilmiştir. Şekil 7 – Şekil 13'te görüleceği üzere yaklaşık parametre yörüngeleri ile asıl parametre yörüngeleri örtüşmektedir.



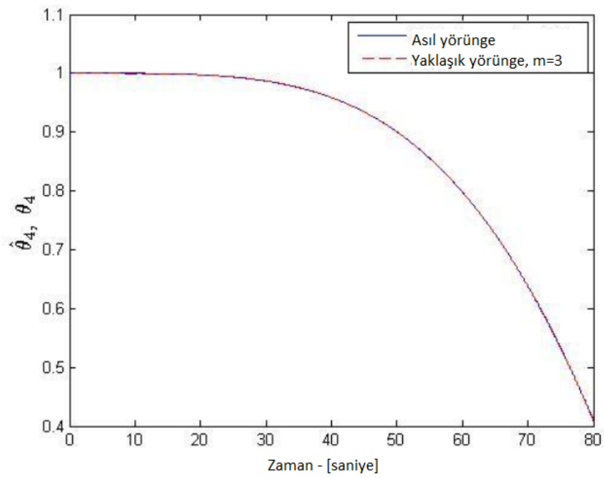
Şekil 7: $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{1}}$ ve $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}}$ Arasında Karşılaştırma



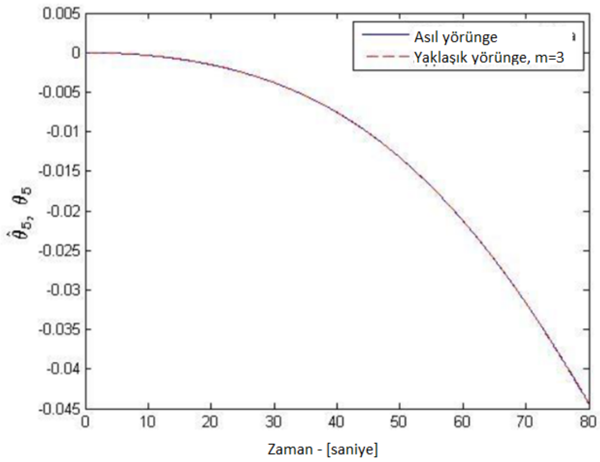
Şekil 8: $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{2}}$ ve $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}}$ Arasında Karşılaştırma



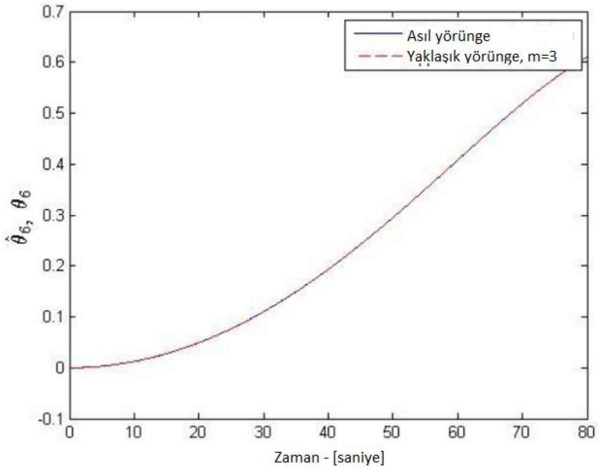
Şekil 9: $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{3}}$ ve $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{3}}$ Arasında Karşılaştırma



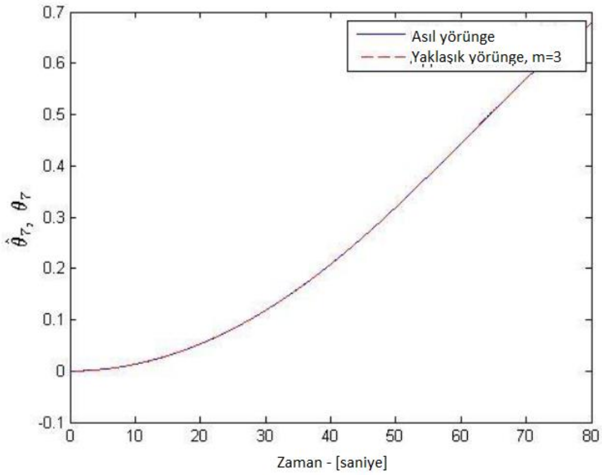
Şekil 10: $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{4}}$ ve $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{4}}$ Arasında Karşılaştırma



Şekil 11: $\boldsymbol{\theta_5}$ ve $\boldsymbol{\widehat{\theta}_5}$ Arasında Karşılaştırma



Şekil 12: $\boldsymbol{\theta_6}$ ve $\boldsymbol{\widehat{\theta}_6}$ Arasında Karşılaştırma



Şekil 13: $\boldsymbol{\theta_7}$ ve $\boldsymbol{\widehat{\theta}_7}$ Arasında Karşılaştırma

SONUÇ

Zaman-bağımlı doğrusal olmayan esnek uzay aracı modeli, LPV sistemi formunda temsil edilmiştir. LPV modelinin karmaşıklığı PSM yöntemi kullanılarak düşürülmüştür. PCA yöntemi uygulanarak yaklaşık LPV modelinin doğruluğu korunmuştur.

Elde edilen yaklaşık LPV modeli $\boldsymbol{m} = \mathbf{3}$ adet parametreye sahip olup dışbükey parametre kümesinin $\boldsymbol{L} = \mathbf{2}^{\boldsymbol{m}} = \mathbf{8}$ adet köşesine karşılık 8 adet LTI sistem bulunmaktadır. Böylece esnek uzay aracı yönelim kontrolü için kazanç-düzenlemeli LTI kontrolcü tasarımı yapılabilir ve pratik olarak uygulanabilir hale gelmiştir. Devam eden çalışmalarda bahsedilen kontrolcü sentezinin gerçekleştirilmesi ve başarımının benzetim ile gösterilmesi hedeflenmektedir.

Kaynaklar

Apkarian, P., Biannic, J., Gahinet, P., 1993. *Self-scheduled H∞ control of a missile via linear matrix inequalities*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Cilt. 18, No. 3, s. 532–538

Apkarian, P., Gahinet, P., Becker, G., 1995. *Self-scheduled H∞ control of linear parameter-varying systems: a design example*, Automatica, Cilt.31, No.9, s.1251–1261

Bilgin, B., Salamci, M.U., 2014. *Sliding mode control design for nonlinear systems without reaching phase and its applications to a flexible spacecraft*, 12th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, s.1–9, 20

De Weck, O.L., 2001. *Attitude Determination and Control (ADCS), Lecture slides of 16.684 Space Systems Product Development*, Dept. of Aeronautics and Astronautics, MIT, 2001.