TAŞIYICI YÜZEYLERİN GENETİK ALGORİTMA İLE ENİYİLEMESİ

Osman Mirza Demircan¹ İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul Prof. Dr. M. Adil Yükselen² İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ÖZET

Taşıyıcı yüzeylerin aerodinamik incelemesi ve eniyilemesini konu alan bu çalışmada, hava araçlarının aerodinamik tasarımına hızlı ve güvenilir bir yöntem geliştirilmesi amaçlanmıştır. Genetik algoritma kullanılarak hazırlanan bir eniyileme çerçevesine girdap-kafes yönteminin entegre edilmesiyle birlikte, belli performans kriterlerini sağlayan en uygun hava aracını arayan bir eniyileme yöntemi geliştirilmiştir. Geliştirilen yöntem, rastgele oluşturulan bir hava aracı popülasyonu üzerinde Darvinci evrim teorisinin prensiplerini evrimsel döngüler içerisinde uygulamaktadır. En güçlü bireyler eniyileme hedefleri gözetilerek yazılan uygunluk fonksiyonları vasıtasıyla bulunmaktadır. Bu çerçevede, MATLAB programlama diliyle yazılan bir bilgisayar programı öncelikle doğrulama testlerine tabi tutulmuş ve kullanılan yöntemin farklı eniyileme problemlerinin çözümündeki kabiliyeti uygulamalı bir şekilde incelenmiştir. Tek ve çok elemanlı taşıyıcı yüzeylerin aerodinamik eniyilemesinden elde edilen sonuçlar değerlendirilerek, geliştirilen yöntemin karmaşık eniyileme problemlerini çözmedeki yetkinliği incelenmiştir.

GİRİŞ

Günümüzde taşıyıcı yüzeylerin aerodinamik incelemesinde uygulanan en gelişmiş yöntem olan hesaplamalı akışkanlar dinamiği (CFD) çözümleri, gerek çözümün maliyeti gerekse ön işlem sırasında sarf edilen zaman dolayısıyla ön tasarım aşamalarında tercih edilmemektedir. Onun yerine akış alanıyla ilgili bazı yaklaşımlarda bulunarak problemi basitleştiren ve süreci hızlandıran yöntemler kullanılmaktadır. Potansiyel akış çözümleri bu açıdan daha uygundur ve yaygın kullanıma sahiptir. 1918 yılında Ludwig Prantl'ın ortaya koyduğu Prandtl taşıyıcı çizgi (PLL) teorisi üzerine geliştirilen ve sonlu kanatların sayısal incelemesinde kullanılan girdap-kafes yöntemi (VLM), potansiyel akış çözümleri arasında en popüler yöntemlerden biridir [DeYoung, 1976]. PPL birden fazla yüzeyden oluşan kanatların incelemesinde kullanılamazken [Katz ve Plotkin, 2001], VLM çok elemanlı taşıyıcı yüzey sistemlerinin çeşitli konfigürasyonlarda incelenmesine olanak sağlaması sebebiyle geniş bir kullanım alanına sahiptir.

Hesaplamalı aerodinamik inceleme yöntemlerinden olan girdap-kafes yönteminde, taşıyıcı yüzey sistemi öncelikle elemanlarına ayrılır. Her bir yüzey elemanı veter ve açıklık boyunca panellere bölünür ve her panel üzerine birer atnalı girdabı ve kontrol noktası çeyrek-üççeyrek kuralı gözetilerek yerleştirilir [DeYoung, 1976]. Atnalı girdaplarının kaçma kolları bağlı olduğu yüzeyin firar kenarına kadar yüzeyi takip edip, bu noktadan sonra serbest akımı takip edecek şekilde sonsuza (yeterince uzağa) uzanmaktadır [Yükselen, 2012].

¹ Yüksek Lisans, Uçak ve Uzay Müh. Böl., E-posta: demircano16@itu.edu.tr

² Öğretim Üyesi, Uçak Müh. Böl., E-posta: yukselen@itu.edu.tr



Şekil 1: Çok elemanlı kanat yüzeyi için girdap-kafes modeli [DeYoung, 1976]

Taşıyıcı yüzeylerin eniyilemesi problemi, söz konusu değişken sayısı ve bu değişkenlerin birbirleriyle etkileşimi sebebiyle oldukça karmaşık bir hale gelmektedir. Herhangi bir amaç için kullanılabilecek genel bir eniyileme yönteminin seçilmesi de bir o kadar zor olmaktadır. Her bir değişkenin belirlenmesi başlı başına bir eniyileme çalışmasını gerektirmektedir ve bu sebeple, bazı araştırmacılar belli hedefler doğrultusunda problemi sınırlandıran yerel arama yöntemlerine yönelmişlerdir. Bir diğer yaklaşım ise probleme daha geniş bir açıdan yaklaşan global arama yöntemleridir.

Doğanın genetik mekanizmalarını açıklayan Darvinci evrim teorisi, taşıyıcı yüzey sistemleri gibi yapay sitemlerin de eniyilemesinde etkin bir şekilde kullanılabilmektedir. Kendi kendini onarma, geliştirme ve etkinleştirme özellikleri biyolojik sistemlerin kuralıdır [Goldberg, 1989]. Genetik algoritmalar (GA) da bu teorinin prensiplerini yapay sistemlere uygulayan global arama yöntemleridir. 1975 yılında John H. Holland tarafından temelleri atılan GA doğanın genetik mekanizmalarından ilham alır [Chong ve Zak, 2013] ve Darvinci evrim teorisindeki "en güçlünün hayatta kalması" prensibini rastgele oluşturulan popülasyona ait bireyler üzerinde uygular. GA'nın temel özelliği dayanıklı bir arama yöntemi olmasıdır [Goldberg, 1989]. Ayrıca, diğer arama algoritmaları gibi tasarım uzayındaki türevin varlığı, süreklilik vb. kısıtlayıcı kabullerden yoksundur. GA'nın bu özellikleri karmaşık eniyileme problemlerinde kullanımının yaygınlaşmasını sağlamıştır.



Şekil 2: Genetik algoritmalar için genel akış çizelgesi

Bu bildiri kapsamında, çok elemanlı taşıyıcı yüzey sistemlerinin VLM ile incelenmesi ve bu sistemlerin belirlenen aerodinamik hedefler doğrultusunda GA aracılığıyla eniyilemesi çalışmaları yapılmıştır. MATLAB diliyle yazılan bir bilgisayar programı öncelikle PLL çözümleriyle doğrulama çalışmaları yapıldıktan sonra tek yüzeyli ve çok yüzeyli taşıyıcı yüzeylerin eniyilemesi uygulamaları gerçekleştirilmiştir.

...

YÖNTEM

Çok Elemanlı Taşıyıcı Yüzey Sistemleri için Girdap-Kafes Yöntemi

Açıklık ve veter boyunca panellere bölünen bir taşıyıcı yüzey ele alalım. Her bir *j* paneli üzerindeki Γ_j şiddetine sahip atnalı girdabının herhangi bir *i* paneli üzerinde belirtilmiş olan bir kontrol noktasında yarattığı dikey hız $A_{ij}\Gamma_j$ olmak üzere *i* kontrol noktasında tüm panellerin yarattığı hızlarla serbest akımın dikey hız bileşeni toplanarak sıfıra eşitlenmesi suretiyle bir denklem takımı elde etmek mümkündür:

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} \Gamma_j = \vec{U}_{\infty} \cdot \vec{n}_i \qquad (i = 1, 2, \dots, N)$$
⁽¹⁾

(1) Denklemdeki indisleme çok elemanlı taşıyıcı yüzey sistemleri için uygun değildir. Bu sebeple, farklı yüzeylere ait parametreler k indisi ile gösterilerek denklem takımı aşağıdaki gibi düzenlenir:



Şekil 3: Taşıyıcı yüzey sisteminde bir atnalı girdabının bir kontrol noktası üzerindeki etkisi

(2) Denklemdeki indislerin altında yer alan *C* indisi kontrol noktasına ait olduğunu, *V* indisi ise atnalı girdabına ait olduğunu işaretlemek üzere kullanılmaktadır. Kontrol noktası indislemesi alt-indis olarak, girdaplara ait indislemeler ise üst-indis olarak gösterilmiştir. Buna göre $\Gamma^{(i_V, j_V, k_V)}$ büyüklüğü k_G indisli taşıyıcı yüzey üzerindeki (i_V, j_V, k_V) indisli atnalı girdabının şiddetini belirtmektedir. $A^{(i_V, j_V, k_V)}_{(i_C, j_C, k_C)}$ büyüklüğü (i_V, j_V, k_V) girdabının (i_C, j_C, k_C) kontrol noktasında birim girdap şiddeti için indüklediği hızın dik bileşenidir. Atnalı girdaplarının indüklediği hızların hesabında Biot-Savart kanunu kullanılarak hesaplanır. $R_{(i_C, j_C, k_C)}$ büyüklüğü ise (i_C, j_C, k_C) kontrol noktasında serbest akımın panel normali doğrultusundaki hız bileşenidir.

Oluşturulan denklem takımının çözümüyle atnalı girdaplarının şiddetleri elde edilir. Kutta-Joukowski taşıma kanunu kullanılarak taşıyıcı yüzeyler üzerine etkiyen toplam aerodinamik kuvvet hesaplanır. Bu kuvvetin serbest akım doğrultusundaki bileşeni indüklenmiş sürüklemeyi verirken, dikey doğrultudaki bileşeni ise taşıma kuvvetini verir.

Bu çerçevede yazılan bir VLM çözücüsü, Tablo 1'de belirtilen NACA 0012 profilli düz kanat geometrisini farklı hücum açılarında incelemek için kullanılmıştır. Girdap-kafes modelinde kanadın açıklık ve veter boyunca 10'ar panel kullanılmıştır. Aynı kanat açıklık boyunca eşit aralıklarla yerleştirilen 20 istasyonla PLL yöntemi kullanılarak da incelenmiş ve her iki yöntemden elde edilen sonuçlar Şekil 4'de görüldüğü gibi karşılaştırılmıştır. Görüldüğü üzere, geliştirilen VLM çözücüsü PLL ile karşılaştırıldığında, farklı hücum açılarındaki taşıma ve indüklenmiş sürükleme katsayılarının değişimi için oldukça benzer sonuçlar vermiştir.



Tablo 1: VLM çözücüsü doğrulama testinde kullanılan kanat özellikleri

Şekil 4: Doğrulama testi sonucu PLL ve VLM sonuçlarının karşılaştırması

Tablo 1'de tanımlı kanat Şekil 5'de gösterildiği gibi simetrik ve ters açılı eşiyle birlikte aralarında belli bir uzaklık olacak şekilde incelenmiştir. Bu şekilde, bir kanadın üzerinde yer etkisi birden fazla yüzey kullanılarak modellenen çok elemanlı bir taşıyıcı yüzey sisteminin incelenmesiyle gerçekleştirilebilmiş olur.

Hücum açısı 5 ve -5 derece olacak şekilde yerleştirilen yüzeyler, aralarındaki *h* uzaklığı 0 – 60 metre aralığında değiştirilerek incelenmiştir. Taşıma ve indüklenmiş sürükleme üzerinde yer etkisiyle birlikte görülen değişim Şekil 6'da görüldüğü gibidir. Şekil 6'dan da görüldüğü üzere, uygulanan VLM formülasyonu çok elemanlı taşıyıcı yüzeyler için de doğru sonuçlar vermektedir.



Şekil 5: Bir çift taşıyıcı yüzey ile yer etkisi arayüzü





Taşıyıcı Yüzey Sistemi Eniyilemesi için Darvinci Evrim Teorisi

Darvinci evrim teorisinde, biyolojik sistemlerin genlerinin nesilden nesile nasıl taşındığı anlatılmaktadır. Bu süreç 3 temel prensip ile açıklanır: kalıtım, değişim ve seçilim [Shiffman, 2012]. Kalıtım prensibi bir nesle ait bireylerin özelliklerinin bir sonraki nesle aktaracağı bir işlemin bulunması gerektiğini, değişim prensibi nesle ait kalıtsal özelliklerin değişkenlik göstermesi gerektiği veya bunu sağlayacak bir mekanizmanın bulunması gerektiğini, seçilim prensibi ise güçlü bireylerin zayıf bireylere göre daha yüksek bir oranla genlerini sonraki nesillere aktarabilmesi gerektiğini açıklar.

Yapay bir sistemin GA ile eniyilemesi öncesinde, bu sistem parametreleri her bir alt-sisteme ait kromozomların genleri olarak tanımlanmalı ve geliştirilen koda tanıtılmalıdır. Sisteme ait genlerin tümüne genotip adı verilir ve sisteme ait genotipin dışa vurumuna da fenotip denir (Şekil 7).



Şekil 7: Taşıyıcı yüzey sistemi için genotip ve fenotip gösterimi (sayılar temsilidir)

Bu çalışmada, her bir yüzey elemanına bir kromozom tanımlanmıştır. Taşıyıcı yüzeylere ait kesit profili, üst-görünüm alanı, açıklık oranı, sivrilme oranı, oturma açısı, burulma açısı, ok açısı, dihedral açısı, referans noktası, uzay yerleşim vektörü (Şekil 8), veter ve açıklık boyunca panel sayısı, simetriklik durumu gibi özellikleri ise yüzeye ait kromozomun genleri olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$y \ddot{u}zey\{s\} = \left\{ profil_s, S_s, AR_s, \lambda_s, \alpha_{in_s}, \alpha_{tw_s}, \alpha_{sw_s}, \alpha_{di_s}, H_s, R_s, n_{i_s}, n_{j_s}, ss_s \right\}$$
(3)



Şekil 8: Panellere bölünmüş bir taşıyıcı yüzeyin uzaydaki yerleşimi gösterimi

(3) Denkleminde belirtilen genlerden kalıtsal (değişken) olarak belirlenenler için sınırlar verildikten sonra, belli sayıda bireye sahip bir taşıyıcı yüzey popülasyonu oluşturulur. Bu popülasyon Şekil 9'de gösterilen evrimsel döngülere sokulur.

Her bir neslin başlangıcında, popülasyona ait bireyler VLM ile incelenir ve uygunluk fonksiyonları yardımıyla değerlendirilir. Ardından oluşturulan bir gen havuzunda, çarkı-çevir yöntemi kullanılarak güçlü bireyler seçilir ve eşleştirilir. Eşleştirilen bireylerin genotipleri çaprazlama ve mutasyon evrelerinden geçirilerek bir sonraki nesle ait çocuk bireyler oluşturulur. Darvinci evrim kriterleri sağlandığı sürece bu döngüler devam ettirilir.

(4)



Şekil 9: Taşıyıcı yüzey sistemlerinin GA ile eniyilemesi için akış çizelgesi

UYGULAMALAR

İlk olarak, seyir uçuşu yapan bir kanadın taşıma katsayısının 0.40 olacağı ve indüklenmiş sürükleme katsayısının minimize edileceği eniyileme problemi incelenmiştir. Bu problemde, NACA 4412 kesit profiline ve Tablo 2'deki özelliklere sahip tek yüzeyli kanat tanımlanmıştır.

Γablo	2:	Kanat	eniy	yilemes	i için	verilen	kanadın	özellikleri
-------	----	-------	------	---------	--------	---------	---------	-------------

Parametre	Değer		
Kanat alanı	10		
Açıklık oranı	7		
Sivrilme oranı	1		
Oturma açısı	2°		
Burulma açısı	-1°		
Ok açısı	0°		
Dihedral açısı	0°		

Verilen eniyileme problemi için ise aşağıdaki uygunluk fonksiyonu ile minimum taşıma ve indüklenmiş sürükleme katsayıları için maksimum uygunluk değerine ulaşılması amaçlanmıştır:

$$uygunluk = \frac{1}{C_L C_{D_i}}$$

Ancak (4) denklemi, 0.40 seyir uçuşu için taşıma katsayısı hedefine uygun değildir. Bu sebeple uygunluk hesabı yapılırken, eğer taşıma katsayısı bu değerden küçük hesaplanırsa o bireyin

uygunluğu sıfırlanarak popülasyondan çıkarılmıştır. Sonuç olarak Şekil 10'daki gibi bir uygunluk grafiği elde edilmektedir.



Şekil 10: Kanat eniyilemesi için uygunluk fonksiyonu grafiği

Bu eniyileme probleminde, Tablo 2'de verilen değerler (3) denklemindeki gibi düzenlenerek, Tablo 3'de verilen değişim aralıkları göz önünde bulundurularak rastgele oluşturulan bir popülasyona eklenmiştir.

Parametre	Minimum Değer	Maksimum Değer		
Açıklık oranı	5	10		
Sivrilme oranı	0	1		
Oturma açısı	0°	5°		
Burulma açısı	-5°	0°		
Ok açısı	0°	10°		

Tablo 3: Kanat eniyilemesi için verilen değişim aralıkları

Evrimsel döngüler sırasında, popülasyon 20 bireyle sabit ve sınırlı tutularak çocuk bireylerin zayıf bireylerin yerini alması sağlanmıştır. Evrimsel döngüler 14 iterasyonun sonunda Darvinci evrim teorisinin değişim prensibini daha fazla sağlayamadığından durdurulmuştur (Şekil 11).



Şekil 11: Kanat eniyilemesinde elde edilen uygunluk grafiği

Eniyileme sonucu elde edilen kanada ait özellikler Şekil 12'de görüldüğü gibi elde edilmiştir.

		Parametre	Orijinal Kanat	Eniyilenmiş Kanat
		profil	4412	4412
		S	10	10
		AR	7	9.55
		λ	1	0.95
		$\begin{array}{ccc} \alpha_{in} & 2^{\circ} \\ \alpha_{tw} & -1^{\circ} \\ \alpha_{sw} & 0^{\circ} \end{array}$	2°	1.59°
	TİP		-1.53°	
	Ö		0°	
	Ξ	α_{di}	0° 0° 0° 0°	
	0	Н	0	0
		<i>R</i> [0 0 0	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
~		n_i	10	10
		n_j	10	10
		SS	0	0
	\/I M	C_L	0.4372	0.4081
		C_{D_i}	0.0082	0.0054
	GA	uygunluk	1298	2120

Şekil 12: Kanat eniyilemesi sonuçları (kesikli çizgi orijinal kanadı gösterir)

Tek yüzeyli kanat eniyilemesinin ardından, eniyilenen kanadın arkasına yerleştirilen bir yatay kuyruk yüzeyi ile oluşturulacak olan kanat-kuyruk sisteminin eniyilemesi ele alınmıştır. Aynı hedefler doğrultusunda yürütülecek olan bu eniyileme probleminde ek olarak yunuslama momentinin sıfır olması şartı eklenmiştir. Bu şart aşağıdaki uygunluk fonksiyonu ile popülasyon üzerinde uygulanabilir. Yine taşıma katsayısı şartını sağlamayan bireyler popülasyondan çıkartılmıştır.

$$uygunluk = \frac{1}{C_L C_{D_i} C_{M_y}} \tag{4}$$

Kanadın 5 metre kadar gerisine yerleştirilen NACA 0012 kesit profilli kuyruk yüzeyine ait özellikler Tablo 4'de belirtildiği gibi girilmiştir.

Tablo 4: Kanat-kuyruk sistemi eniyilemesi için verilen kuyruğun özellikleri

Parametre	Değer		
Kanat alanı	3		
Açıklık oranı	6		
Sivrilme oranı	0.5		
Oturma açısı	0°		
Burulma açısı	0°		
Ok açısı	10°		
Dihedral açısı	0°		

Kanat-kuyruk sistemi eniyilemesinde kanat ve kuyruk yüzeyleri için farklı değişim aralıkları verilebilir. Kuyruk yüzeyleri kanat yüzeylerine göre genel olarak farklı özelliklere sahiptirler. Bu durum göze alındığında Tablo 5'de verilen değişim aralıkları kuyruk yüzeyi için uygulanırken kanat için bir önceki uygulamadaki değişim aralıkları kullanılmıştır.

Parametre	Minimum Değer	Maksimum Değer		
Açıklık oranı	1	8		
Sivrilme oranı	0	1		
Oturma açısı	-5 °	0 °		
Burulma açısı	0 °	5 °		
Ok açısı	0 °	20 °		

Evrimsel döngüler bu sefer Şekil 13'de gösterilen uygunluk grafiğini vererek, Şekil 14'de verilen sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil 13: Kanat-kuyruk sistemi eniyilemesinde elde edilen uygunluk grafiği

		Parametre	Orijinal Kanat	Orijinal Kuyruk	Eniyilenmiş Kanat	Eniyilenmiş Kuyruk		
		profil	4412	0012	4412	0012		
		S	10	3	10	3		
		AR	9.55	6	8.49	5.55		
		λ	0.95	0.5	0.76	0.39		
~	_	α_{in}	1.59°	0°	1.98°	-2.65°		
	DTIF	α_{tw}	-1.53°	0°	-0.05°	2.19°		
		α_{sw}	0°	10°	9.10°	18.71°		
	Ū	α_{di}	0°	0°	0°	0°		
The second second second second second second second second second second second second second second second s				Н	0	0	0	0
			R	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$	
		<i>n_i</i> 10 10	10	10				
		n_j	10	10	10	10		
		SS	1	1	1	1		
		C_L	0.3	737	0.4	168		
	VLM	C_{D_i}	0.0	043	0.0	074		
		C_{M_y}	-0.0	0120	\cong 0.	0000		
	GA	uygunluk		0	7.2 >	< 10 ⁷		



SONUÇ

Bu çalışmada çok elemanlı taşıyıcı yüzey sistemlerinin girdap-kafes yöntemi kullanılarak incelemesi için bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. MATLAB programlama diliyle yazılan bilgisayar programı, öncelikle Prandtl'ın taşıyıcı çizgi teorisi ile tek yüzeyli düz bir kanat geometrisi için karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Çok yüzeyli taşıyıcı sistemler için bir doğrulama çalışması, ters açılı yerleştirilmiş bir çift kanat geometrisi kullanılarak yapılan bir yer etkisi incelemesi ile gerçekleştirilmiştir.

Doğrulanan VLM yazılımı genetik algoritma kullanan bir eniyileme çerçevesine entegre edilerek, çok elemanlı taşıyıcı yüzey sistemleri için bir eniyileme yöntemi geliştirilmiştir. Bu eniyileme yöntemi, probleme bağlı olarak değiştirilebilen uygunluk fonksiyonlarıyla farklı hedefler doğrultusunda eniyileme problemlerini çözebilmekte olup, genetik algoritmaların bütün üstün özelliklerine sahiptir.

Geliştirilen yöntemin testi için örnek bir kanat geometrisinin eniyilemesi ve eniyilenen kanadın arkasına eklenen kuyruk geometrisi ile elde edilen çok yüzeyli kanat-kuyruk sisteminin eniyilemesi problemleri incelenmiştir. İlk uygulamada eniyilenen kanadın, kuyruğun da eklenmesiyle yeniden şekil değiştirerek belirlenen hedefler doğrultusunda yine kendini yenilemesi durumu gözlemlenmiştir.

Bu çalışmada çözüm yöntemi olarak kullanılan girdap-kafes yöntemi, popülasyon bünyesindeki her nesle ait bireyin incelenmesi göz önünde bulundurulduğunda, hızlı ve etkin bir aerodinamik inceleme yöntemi olarak karşımıza çıkmaktadır. Ancak bu çalışmada, non-lineer veya viskoz etkiler inceleme sırasında göz ardı edilmiştir. Yüksek hücum açılarındaki taşıyıcı yüzeylerin aerodinamik incelemesinde kullanılan non-lineer yöntemlerin kullanıma ve viskoz sürüklemenin dışarıdan bilgisayar programına girilmesiyle de bu gibi sorunlar da giderilebilir.

Kaynaklar

Chong, E. K. P. ve Zak, S. H., 2013. An introduction to Optimization. John Wiley & Sons.

DeYoung, J., 1976. Vortex-lattice utilisation. Virginia: NASA Raporu (Rapor No. 405).

Goldberg, D. E., 1989. *Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Katz, J. ve Plotkin, A., 2001. Low-speed aerodynamics. Cambridge University Press.

Shiffman, D., 2012. *The Nature of Code: Simulating Natural Systems with Processing*. Retrieved from http://natureofcode.com/

Yükselen, M. A., 2012. *Hesaplamalı aerodinamik ders notları*. Retrieved from http://web.itu.edu.tr/yukselen/UCK419/UCK419_Index.html