VII. ULUSAL HAVACILIK VE UZAY KONFERANSI **UHUK-2018-040**
12-14 Eylül 2018, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun

VEKTÖR ALANI İLE EĞRİLERİN TAKİBİ ve SEYRÜSEFER

Hakan Tiftikci*
TAI, Ankara

ÖZET

Bu çalışmada sabit kanat hava araçları için kullanılabilecek vektör alanı güdümü ("vector-field guidance") tasarımları ile çeşitli eğrilerin takibi anlatılmaktadır. Çalışma kapsamında büyük-daire ("great circle") üzerinde düz bacak takibi, parametrik kübik eğrilerin takibi, çember takibi, bacak etrafinda tanımlanmış genel eğrilerin takibi ve noktaya gidiş görevleri için vektör alanlar oluşturulmuş ve yatış açısı temelli ideal bir otopilot ile benzetimleri/testleri yapılmıştır. İvme temelli bir iç döngüye örnek olarak süzülme yolu ("glide path") takibi incelenmiştir. Kararlılık analizinde/kazançların belirlenmesinde Routh kriteri ve kutup yerleşimi ("pole-placement") teknikleri kullanılmıştır. Yanal seyrüseferde iç döngülerin iz açısını tuttuğu durum ele alınmış dolayısıyla bir bozuntu olarak rüzgar etkileri incelenmemiştir.

GİRİŞ

Vektör alanı güdüm tekniğinde, ilgili görev geometrisine/profiline göre, aracın hedef/referans harekete oturmasını sağlayan bir hız vektörü/hareket yönü her bir nokta için tanımlanır. Aracın hız vektörü tasarlanmış olan bu vektör alanına hizalanıp alanı takip ettiğinde, araç hedef eğriye asimtotik oturur. Vektör alanı, hız komutunun önceden komutlandığı durumda, sadece yön bilgisi ile tanımlanabilirken, (süre/yakıt optimizasyonu, görev öncelikleri gibi) kimi senaryolar için sürat bilgiside vektör alanı tasarımına dahil edilebilir. Bu çalışmada sürat bilgisinin kullanıcı tarafından komutlandığı ve uçağın komutlanan hızı tuttuğu kabül edilmiştir.

*Kidemli Uzman Muhendis, E-posta: htiftikci@tai.com.tr

Vektör alan ile doğrultuyu tutmada kullanılan iç döngü (otopilot) araç tipine (roket/uçak/...), hareket eksenine (yatay/dikey) göre değişebilmektedir. Yatay hareket için, roketlerde direk yan kuvvet üreterek dönüş sağlanabilirken ("skid to turn") uçaklarda dönüş genelde yatış ("bank-to-turn") ile sağlanmaktadır. Dikey harekette ise uçaklarda da roketlerde olduğu gibi ivme kontrolcüsü kullanılabilmektedir.

Bu çalışmada basit eğriler için tasarlanan vektör alanı iki bölgeye ayrılmıştır, biri aracı oturma manevrası bölgesi dışında iken hedef eğriye "en kısa" yoldan (dik) yönlendiren vektör alanı, diğeri ise eğrinin etrafında bir uzaklık bandı ile tanımlanmış olan oturuş bölgesinde yer alan aracı hedef eğriye teğet duruma getirecek vektör alanı. Oturma manevrası bölgesi, aracın manevra/otopilot kısıtları dahilinde hedef eğriye oturmak üzere 0 yatış açısı ile giderken dönüşe başlaması gereken mesafe olarak tanımlanmıştır. Bu mesafe, iç döngüde yatış açısı otopilotu kullanılması durumunda maximum yatış açısına karşılık gelen, ivme otopilotu kullanılması durumunda maximum ivmeye karşılık gelen minimum dönüş yarıçapı olarak seçilebilir. Bu çalışmada iç döngü (yatış açısı ve ivme) otopilotları 1.derece sistem ile modellenerek olabilecek en basit seviyeye indirgenmiştir. Uçak/Roket için gerçek transfer fonksiyonlarının daha yüksek derecede olduğu bilinmektedir ve matematik model mevcutsa elde edilebilmektedir de, ancak 1. derece sistem gösterimi karmaşıklığı azaltarak sembolik, dolayısıyla yorumlanabilir, sonuçlar elde edilmesine olanak sağlamaktadır. minimum faz olmayan sıfırlar ("NMP zeros"), vs gibi dış döngüye kısıtlama getirici özel bir neden olmadıkça çok gerçekçi iç döngü modellerinin bu çalışmada olduğu gibi kinematik ağırlıklı bir çalışmada fazla bir getirisi olmayacağı değerlendirilmiştir.

İç döngü (araç + otopilot) dinamiklerinin/sınırlamalarının tasarlanacak vektör alanı üzerinde etkileri mevcuttur ve tasarımda kullanılmaları durumunda performansı iyileştirmesi olağandır. Örneğin iç döngüde yatış açısı otopilotu kullanımında, yatış açısı, komutu belli bir gecikme ile takip edecek, otopilotta komut hız limitlemesi ("rate-limiting") var ise verilen komuta gidişi daha da çok zaman alacaktır, Bu nedenle bacağa yaklaşan aracın basit kinematik ilişkilerle kestirilmiş mesafeden daha önce oturma manevrasına başlaması gerekecektir. İç döngüde Yatış Açısı Otopilotu kullanımı durumunda kritik mesafe hesabı bir alt başlık altında açıklanmıştır..

Takip eden bölümlerde, parametrik kübik eğrilerin izlenmesi kapsamında parametrik polinomların kapalı ifadelerinin elde edilmesi ve gradyan yönleri ile vektör alanlar oluşturulması anlatılmıştır. Büyük Daire Arkı ve gezinme/turlama ("loiter") yörüngeleri için vektör alanlar yukarda açıklandığı gibi oluşturulmuştur. Bacak etrafında tanımlanmış eğrilere ait vektör alanların tasarımı anlatılmış ve genel parametrik eğrilerin kısmen numerik tekniklerle takibiyle ilgili formulasyon ve örnekler verilmiştir.

Literatür Taraması

Havuç-Kovalama ("Carrot-Chasing") [SUJIT,SARIPALLI, 2013] olarak bilinen teknikte, takip edilecek eğri üzerinde ve aynı zamanda hava aracına tasarımla belirlenmiş bir mesafede olan bir nokta belirlenir ve araç bu noktaya yönlendirilir, böylece zahiri hedef noktası eğri üzerinde ve hava aracının önünde yer alıp, belli bir mesafe öteyi hedefleyerek aracın hareketlerine öngörüm yeteneği katar.

Düz bacak için kullanılan vektör alanlara örnek olarak [NELSON, BARBER, 2005] $\chi_d = -\chi_\infty \frac{2}{\pi} \arctan(k_{path} e_y)$ alanı verilebilir. İz açısı bacağa olan uzaklığın e_y fonksiyonu olarak verilmiştir. k_{path} parametresi bacağa oturuşun ne kadar sert olacağını belirlemektedir.

Lyapunov Vektör Alan tasarımında [REGINA, 2011] hedef eğri skalar pozitif bir fonksiyonun $V_F(\mathbf{r}) \geq 0$ sıfır-seviyesi kümesi $C = \{\mathbf{r} | V_F(\mathbf{r}) = 0\}$ ile tanımlanmaktadır, bu tanıma göre V_F zamanla değişimi $\dot{V}_F = \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla_r V_F$ ile verilir. Referans vektör alanı $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \theta)$ ile tanımlandığında ve iz çizgisi bu alanı takip ettiğinde potansiyel değişimi $\dot{V}_F = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \theta) \cdot \nabla_r V_F$ olur. Vektör alan $\mathbf{F} = -(\nabla_r V_F)^\top \mathbf{\Gamma} + S(\mathbf{r})\, \mathbf{\Gamma} > 0$ olarak seçildiğinde, $\dot{V}_F = \left[-(\nabla_r V_F)^\top \mathbf{\Gamma} + S(\mathbf{r})\right] \cdot \nabla_r V_F = -(\nabla_r V_F)^\top \mathbf{\Gamma} \cdot \nabla_r V_F + S(\mathbf{r}) \cdot \nabla_r V_F$ ile Lyapunov kararlılık durumu sağlanır. Kaynaklarda Lyapunov vektör alanlarına verilen örnekler arasında daire [CHEN,CHANG, 2009] ve Cassini Ovali [KAPITANYUK,MARINA, 2017] sıklıkla yer almaktadır.

[ANASTASIOS, 2014] Parametrik kübik eğriler ve Fermat Spiralleri eğrileri ile rota tariflerini incelemiş. Eğri takibi için bir "line-of-sight" güdüm tasarımını vermiştir. [KAPITANYUK,MARINA, 2017] rota takibi hakkında yürütülen çalışmaların tarihçesini özetlemekte ve geliştirdikleri hareketli eğriler üzerine güdüm kanunlarını sunmaktadır. [LIANG,JIA, 2015] 3 boyutta eğrilerin takibi için teğet etrafında tasarladıkları vektör alanı güdüm tekniğini anlatmaktadır. [CHO,KIM, 2014] diferansiyel geometri kullanılarak geliştirilen bir metodu açıklamaktadır.

YÖNTEM

Bu bölümde vektör alan tasarımı ve uçağın vektör alana yönlendirilmesi genel hatlarıyla açıklanmaktadır.

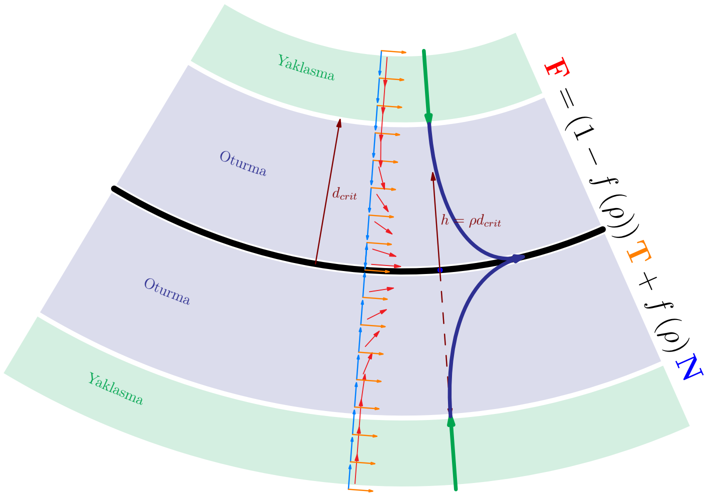
Vektör Alan Tasarımı

Yol takibi için geliştirilen metodlardan ilkinde araca en yakın yol noktasında yola teğet $\mathbf{T}$ ve normal $\mathbf{N}$ yönleri kullanılmaktadır. Araç minimum dönüş mesafesinden daha uzak iken ($\lambda R_{min} = d > R_{min}$) normal yön kullanılmakta $\mathbf{F} = \mathbf{N}$, kritik (minimum dönüş) mesafe aralığına girildiğinde ($\lambda R_{min} = d < R_{min}$) ise teğet ve normal vektörlerin karması yol üzerinde teğete dönüşecek biçimde kullanılmaktadır $\mathbf{F} = (1 - \lambda)\,\mathbf{T} + \lambda \mathbf{N}$. Böylece bu senaryoda vektör alanı yakın ve uzak olarak iki faza ayrılmıştır. Uzak alanda normal yönünde ilerleyerek, izlenecek eğriye en kısa zamanda/en kısa yoldan ulaşılması sağlanmaktadır. Kritik mesafe için minimum dönüş mesafesini kullanarak da hava aracı performans sınırları içerisinde kalınarak rotaya yumuşak oturma şartları sağlanmaktadır.

Gradyan/normal $\mathbf{N}$ ile teğetin $\mathbf{T}$ karması için çeşitli seçenekler mevcuttur. Genel formu $(1 - f(\lambda))\,\mathbf{T} + f(\lambda)\,\mathbf{N}$ olan karmalar $\{\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2\}$ ile, komplex sayıların kullanıldığı bir karma

D_3 ile 3 boyutta kullanıma uygun SLERP enterpolasyonu içeren bir karma $\mathbf{D}_4$ aşağıda verilmiştir. Şekil 1 $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{N}$ yönlerinin karma işlemini ve tipik bir vektör alanı dik mesafe boyunca göstermektedir.

$$\begin{array}{l|r} \mathbf{D}_1 \leftarrow \frac{(1-\lambda)\mathbf{T}+\lambda\mathbf{N}}{|(1-\lambda)\mathbf{T}+\lambda\mathbf{N}|} & \mathbf{D}_2 \leftarrow \cos^p\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)\mathbf{T} + \sin^p\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)\mathbf{N} \\ D_3 \leftarrow N\left(\frac{T}{N}\right)^{1-\lambda} & \mathbf{D}_4 \leftarrow \frac{\sin((1-u)\Omega)}{\sin\Omega}\mathbf{T} + \frac{\sin(u\Omega)}{\sin\Omega}\mathbf{N} \end{array}$$



Şekil 1: mesafe bilgisi kullanılarak vektör alanın oluşturulması

Bahsedilen metotta eğriye/yola olan dik mesafeye ihtiyaç vardır, ancak pek az eğri için en kısa mesafe sembolik çözümünü elde etmek mümkün olabilmektedir. En kısa mesafenin hesaplanamadığı ancak yaklaşık olarak dik doğrultunun belirlenebildiği durumlarda, dik mesafenin yerine kullanılabilecek yaklaşık dik doğrultu yönünde mesafe tanımı kullanılabilir. Örneğin kapalı ifadesi $g(\mathbf{r}) = g(\lambda, \varphi) = 0$ olan bir eğride yaklaşık mesafe $g(\mathbf{r} + t^*\mathbf{N}) = 0$ eşitliğinin t^* için çözülmesinden $d \simeq |t^*\mathbf{N}|$ olarak elde edilir. Kapalı ifadeli eğriler için normal yön eğriye yönelmiş olan gradyan $\mathbf{N} = \nabla g^2 = 2g\nabla g$ veya normalize edilmiş durumu $\mathbf{N} = \frac{\nabla g^2}{|\nabla g^2|} = \operatorname{signum}(g)\,\nabla g$ ifadesinden hesaplanır. Eğer $g(\mathbf{r}) = 0$ eğrisinin aynı zamanda parametrik gösterimi $\gamma(t)$ mevcut ise $\mathbf{r}$ noktasından geçen ve normali γ' olan "düzlem" $(\gamma(t) - \mathbf{r}) \cdot \gamma' = 0$ denkleminin t için çözülmesinden de $d = |\gamma(t) - \mathbf{r}|$ olarak elde edilir. Sadece eğri parametrik gösterimi $\gamma(t) = [\lambda(t), \varphi(t)]$ kullanıldığında ise en yakın nokta $\gamma(t) + d\,\mathbf{N}_\gamma(t) = \mathbf{r}$ veya $(\gamma(t) - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{T} = 0$ denklemlerinin analitik/sayısal metodlar ile çözülmesiyle mümkündür.

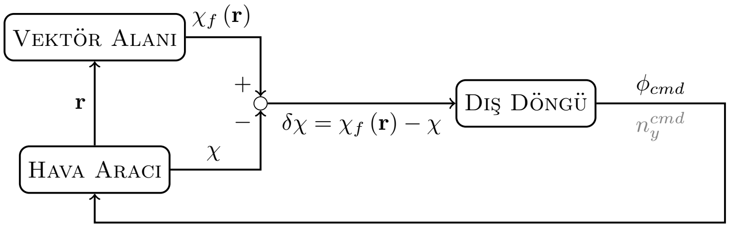
Kapalı ifade gradyanının normal yön olarak kullanılması, bu yönün gerçek dik mesafe yönünden uzaklaşmasıyla mesafe kestiriminde hataya neden olacaktır. Bu hata aracın eğriden olan uzaklığına, eğrinin ne kadar kavisli olduğuna ve kavisinin ne kadar değişken olduğuna bağlıdır. Bu çalışma kapsamında sabit kanat hava araçlarının takip etmesi beklenilen rotalara ait bu tür özelliklerin, gradyan kullanılması durumunda, mesafede hatayı makül seviyelerde tutacak nitelikte olduğu değerlendirilmiştir.

Yukarda bahsedilen dik mesafe sorunu, "yanından geçiş" ("fly-by") mesafesinin bacaklar arası açıyı da içerecek şekilde formule edilmesiyle de kısmen [1]aşılmaktadır.

Geliştirilen diğer, lineer olmayan, tasarım tekniklerinde ise takip hatasının üstel sönümleme $\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon$ ("exponential decay") ile sürekli azalır yapıda olması şart koşularak gereken yön veya yön zaman değişim hızı bulunmaktadır. Bu tekniğe ait detaylar ilgili bölümlerde verilmiştir.

Uçağın Vektör Alanına Yönlendirilmesi

Verilen rotayı takip etmek üzere tasarlanmış olan vektör alanı kullanılarak uçağın bulunduğu konumda gereken iz açısı $\chi_f = \chi_f(\mathbf{r})$ (veya iz açısı değişim miktarı $\dot{\chi}_f = \dot{\chi}_f(\mathbf{r})$) hesaplanır. Sonrasında uçağın hesaplanan doğrultuya yönelmesi için (veya iz açısı değişimini sağlaması için) gereken etkin iç döngü (yatış açısı, iz açısı, yan veya dik ivme) komutları hesaplanır ve iç döngülere beslenir (Şekil 2).

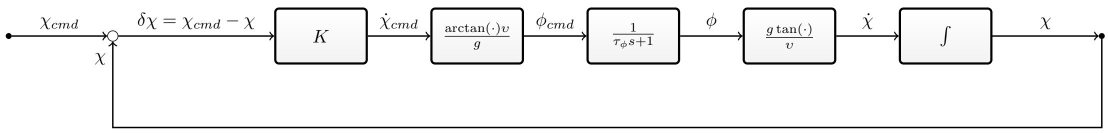


Şekil 2: vektör alanı kontrol döngüsü

Yatış açısı ile uçağın yönlendirilmesinde temel koordineli dönüş ("coordinated turn") ilişkileri kullanılmıştır. Koordineli dönüşte, yatış açısı ile iz açısı değişim hızı arasındaki ilişki $\phi = \arctan\left(vg^{-1}\dot{\psi}\right) \leftrightarrow \dot{\psi} = gv^{-1}\tan\phi$ ile verilmektedir. İvme ile yönlendirme durumunda iz açısı/uçuş yolu açısı ile ilgili ivmeler arasındaki ilişki $a_y = v\dot{\chi} \leftrightarrow \dot{\chi} = v^{-1}a_y$ veya $a_z = v\dot{\gamma} \leftrightarrow \dot{\gamma} = v^{-1}a_z$ ile verilmektedir.

Kuzey ve doğu yönlerinden hesaplanan uçağın anlık iz açısı $\chi = \arctan\left(\frac{v_E}{v_N}\right)$ ile vektör alanının işaret ettiği yönün $\chi_f = \chi_f(\mathbf{r})$ farkından $\delta\chi = \chi_f(\mathbf{r}) - \chi$, gereken iz açısı değişim hızı komutu PID veya benzeri kontrol şemaları ile üretilir $\dot{\chi}_{cmd} = \dot{\chi}_{cmd}\left(\delta\chi, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\chi, \int\delta\chi\right) \simeq k_p\delta\chi + k_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\chi + k_d\int\delta\chi$. Üretilen iz açısı değişim hızı komutu, yatış açısı komutuna koordineli dönüş ilişkisi ile çevrilir $\phi_{cmd} = \arctan\left(v\dot{\chi}g^{-1}\right)$ (veya $a_{y,cmd} = v\dot{\chi}_{cmd}$) ve ilgili otopilota beslenir. Kararlılık analizlerinin de temelini oluşturan bu döngü Şekil 3 de resmedilmiştir.

[1] $\mathbf{r} + t\mathbf{N}$ ışını ile eğrinin kesişimine hala ihtiyaç vardır



Şekil 3: basitleştirilmiş yatış açısı ile seyrüsefer döngüsü

UYGULAMALAR

Yatış Açısı Dinamiğinin Kritik Dönüş Mesafesine Etkileri

Basitleştirilmiş yatış açısı dinamiği $\dot{\phi} = \tau_\phi^{-1}(\phi_c - \phi)$, iz açısı değişim hızı $\dot{\chi} = v^{-1} g \tan\phi$ ve kuzey/doğu hız bileşenleri $(\dot{x}, \dot{y}) = (v\sin\chi, v\cos\chi)$ ifadeleriyle verilir. Tipik oturma manevrasına karşılık gelecek şekilde, maximum yatış açısının A , rampa süresinin d_1 , maximum komutta kalınan sürenin d_2 olduğu durumda yatış açısı komutu ve tepkisi

$$\phi_c = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{At}{d_1} & t < d_1 \\ A & t < d_1 + d_2 \\ A\frac{d_2 - t}{d_1} & t < 2d_1 + d_2 \\ 0 & t > 2d_1 + d_2 \end{cases} \Rightarrow \phi = \frac{A}{d_1\tau} \begin{cases} \left(-1 + e^{-\tau t}\right) + \frac{t}{d_1} & t < d_1 \\ \left(-e^{d_1\tau - \tau t} + e^{-\tau t}\right) + 1 & t < d_1 + d_2 \\ \left(1 + e^{-\tau t} - e^{d_1\tau + d_2\tau - \tau t} - e^{d_1\tau - \tau t}\right) + 2 + \frac{d_2 - t}{d_1} & t < 2d_1 + d_2 \\ \left(e^{2d_1\tau + d_2\tau - \tau t} - e^{d_1\tau + d_2\tau - \tau t} - e^{d_1\tau - \tau t} + e^{-\tau t}\right) & 2d_1 + d_2 < t \end{cases}$$

ile verilir. Ancak bu yatış açısı ifadesinden entegrasyon ile iz açısı sembolik elde edilememektedir. Küçük yatış açısı yaklaşımı kabül edildiğinde ise yaklaşık iz açısı

$$\tilde{\chi}(t) = -\frac{gA}{v d_1 \tau^2} \begin{cases} -1 + e^{-\tau t} - \tau^2 t^2 + \tau t & t < d_1 \\ -d_1\tau^2 t + e^{-\tau t} - e^{d_1\tau - \tau t} + \frac{1}{2}{d_1}^2\tau^2 + d_1\tau & t < d_1 + d_2 \\ -\tau^2\left(2\,d_1 t + d_2\right)t + 1 + e^{-\tau t} - e^{\tau(d_1 - t)} - e^{\tau(d_1 + d_2 - t)} & \\ +\left({d_1}^2 + {d_2}^2 + d_1 d_2\right)\tau^2 + \frac{1}{2}\tau^2 t^2 + \left(2d_1 + d_2\right)\tau - \tau t & t < 2d_1 + d_2 \\ -d_1\left(d_1 + d_2\right)\tau^2 + e^{-\tau t}\left(1 - e^{d_1\tau}\right)\left(1 - e^{(d_1 + d_2)\tau}\right) & 2d_1 + d_2 < t \end{cases}$$

olarak elde edilir. Buna göre zaman sonsuza giderken iz açısı $\chi_{approx}(\infty) = \frac{gA}{v}(d_2 + d_1)$ değerine yakınsar. Olabildiğince basitleştirilmiş bu yaklaşımda bile iz açısı integralleri hesaplanamadığından, yatış açısı tepkilerinin basitleştirmesi gerekliliği doğmaktadır. 1.derece sistemler için makül yaklaşık değer, girdi komutun gecikmiş hali olarak alınabilir $\phi(t) \simeq \phi_c(t - \tau)$. Bu durumda küçük yatış açısı $\tan\phi \simeq \phi$ kabül edildiğinde iz açısı $\int gv^{-1}\tan\phi\,\mathrm{d}t \simeq \int gv^{-1}\phi\,\mathrm{d}t$ integralinden

$$\chi{\simeq}\int \frac{g\phi}{\upsilon}\,\mathrm{d}t{=}\frac{g}{\upsilon}\begin{cases} 0 & t<\tau \\ \left(\frac{A\left(\frac{1}{2}t^2-\tau t\right)}{d1}+\frac{1}{2}\frac{A\tau^2}{d_1}\right) & t<\tau+d_1 \\ At+\frac{1}{2}Ad_1-A\left(\tau+d_1\right) & t<\tau+d_1+d_2 \\ At-\dfrac{A\left(\frac{1}{2}t^2-\tau t-d_1t-d_2t\right)}{d_1} & \\ +A\left(\dfrac{d_1}{2}+d_2\right)-\dfrac{A\left(\tau+d_1+d_2\right)\left(3d_1+\tau+d_2\right)}{2d_1} & t<\tau+2d_1+d_2 \\ A\left(d_1+d_2\right) & \tau+2d_1+d_2<t \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Kuzey yönünde başlangıç hareketi için trapez komutu profiline karşılık gelen izin y eksenini kestiği mesafe $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & q \end{pmatrix}$ denkleminin q için çözülmesi ile elde edilir

$$y_*=q=y-\frac{x}{\dot{x}}\dot{y} \tag{1}$$

Böylece dönüşün köşe noktası q limit değerinden elde edilir $\lim_{t\to\infty}q=\lim_{t\to\infty}y-\frac{x}{\dot{x}}\dot{y}$. Eşitlik (1) de verilen tanımla y ekseni kesme mesafesi, son iz açısı değeri $\chi_\infty=\frac{gA(d_1+d_2)}{\upsilon}$ kullanılmasıyla, uzun sadeleştirme işlemleri sonucunda [2]

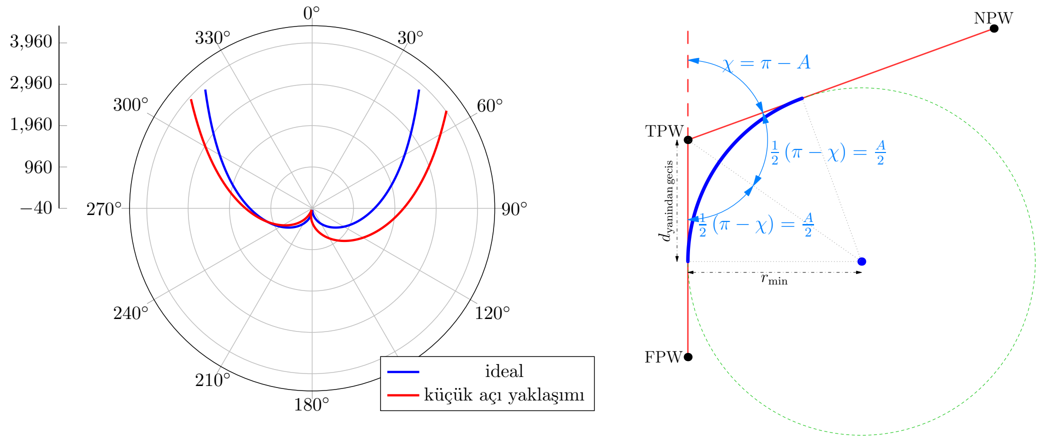
$$\begin{aligned} y_* \;=\; & \sqrt{\frac{\upsilon^3\pi d_1}{Ag}}\left(\mathrm{FresnelC}\left(\sqrt{\frac{gAd_1}{\upsilon\pi}}\right)+\tan\frac{\chi_\infty}{2}\mathrm{FresnelS}\left(\sqrt{\frac{gAd_1}{\upsilon\pi}}\right)\right) \\ & +\frac{\upsilon^2}{Ag\cos\frac{\chi_\infty}{2}}\sin\left(\frac{\chi_\infty}{2}-\frac{gAd_1}{2\upsilon}\right)+\upsilon\tau \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Rampa süresi birinci derece dinamik sistemleri oturma süresi kabül edilen 4τ değerinden $d_1=\frac{A}{4\tau}$ olarak veya eğer yatış açısı hız-sınırlama mevcut ise $\rho=\frac{A}{d_1}\leftrightarrow d_1=\frac{A}{\rho}$ olarak hesaplanır. İdeal/mükemmel komut takibinde yanından uçuş (“fly-by”) mesafesi $y_*^{ideal}=R_{min}\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\upsilon^2\left(g\tan A\tan\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}$ olarak hesaplanır (Şekil 4b). $\alpha=\pi-\chi_\infty$, $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\tan\frac{\chi_\infty}{2}}$ ilişkileri kullanıldığında

$$y_*^{ideal}=\frac{R_{min}}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\upsilon^2}{g\tan A\frac{1}{\tan\frac{\chi_\infty}{2}}}=\frac{\upsilon^2\tan\frac{\chi_\infty}{2}}{g\tan A}$$

halini alır. Tanımlanan bu iki bacak bitirme mesafesi Şekil 4a de karşılaştırılmaktadır.

[2] FresnelC ve FresnelS fonksiyonlariFresnelC $(x)=\int\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$ ve FresnelS $(x)=\int\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$ ile tanımlanmaktadır



(a) yanından geçiş ("flyby") mesafesi eğrileri (b) yanından geçiş ("flyby") geometrisi

Şekil 4: yanından geçiş geometrisi ve tahminlerin karşılaştırması

Parametrik Kübik Eğrilerin Takibi

Parametric kübik eğri ilkin kapalı ("implicit") bir ifadeye "resultant" hesabıyla dönüştürülür.

$$R = \text{resultant}\left(\left(X_0 + tX_1 + t^2X_2 + t^3X_3\right) - X, \left(Y_0 + tY_1 + t^2Y_2 + t^3Y_3\right) - Y, t\right)$$

Elde edilen ifadenin genel görüntüsü

$$R = C_{00} + C_{10}X + C_{01}Y + C_{20}X^2 + C_{11}XY + C_{02}Y^2 + C_{30}X^3 + C_{21}X^2Y + C_{12}XY^2 + C_{03}Y^3$$

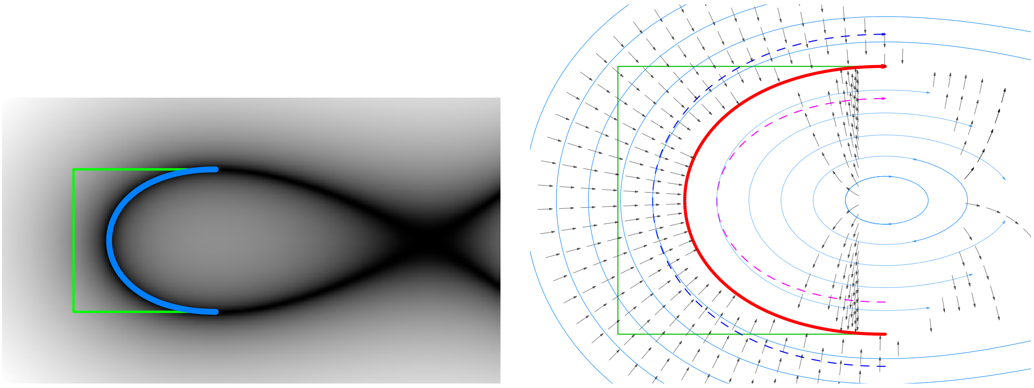
şeklindedir. "resultant" R eğri üzerinde sıfır değerini aldığından $-R^2$ gradyanı herdaim eğriyi hedefleyen bir doğrultuya sahiptir $\mathbf{G} = -\nabla\left(R^2\right) = -R\nabla R$. Kübik eğriye olan mesafe yaklaşık olarak aracın konumundan gradyan yönünde ilerleyen çizginin artık R ile kesişmesinden hesaplanmaktadır. Kesişim artık R ifadesinde çizgi parametrik formunun konmasıyla $\left\{t | R\left(\mathbf{P} - t\nabla\left(R^2\right)\right) = 0\right\}$ veya kapalı çizgi ifadesine kübik eğrinin parametrik formunu yerleştirerek $\left(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1t + \mathbf{a}_2t^2 + \mathbf{a}_3t^3 - \mathbf{P}\right) \cdot \mathbf{N} = 0 = \left(\mathbf{a}_0 - \mathbf{P}_0\right) \cdot \mathbf{N} + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{N}t + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{N}t^2 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{N}t^3$ hesaplanabilir. Bu yaklaşımın avantajı kesişim noktasının eğri tanım aralığına düşüp düşmediğinin doğrudan $t \in [0, 1]$ testi ile belirlenebilmesidir. Denklemler en yüksek 3. derece olup sembolik çözümleri mevcuttur ve kompleks sayı kullanmadan uygulanması mümkündür. Eğer kübik eğri ile çizgi kesişmiyorsa, en yakın noktanın seçilmesi sorunu giderecektir. En yakın nokta ${}^{\mathrm{d}}\!/\!_{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1t + \mathbf{a}_2t^2 + \mathbf{a}_3t^3 - \mathbf{P}_0\right) \cdot \mathbf{N} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{N} + 2\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{N}t + 3\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{N}t^2 = 0$ ifadesinden bulunabilir. Mesafe tahmini kübik eğriye yakınken doğruluğu artmakta, uzakta iken doğruluğu azalmakta ancak gradyan herdaim eğriye yaklaşım yönünü tarif ettiği için araç eğriye mesafe tahminini iyileştirecek biçimde yaklaşmaktadır.

Kübik Eğriler için Örnekler :

Aşağıda verilen kontrol noktaları için elde edilen "resultant" yoğunluk ("density plot") ve gradyan alan çizimleri Şekil 5 ve 6 de verilmiştir. Şekillerde öteleme "offset" eğrileri ile "resultant" konturları arasında çok bir fark olmadığı seçilebilmektedir.

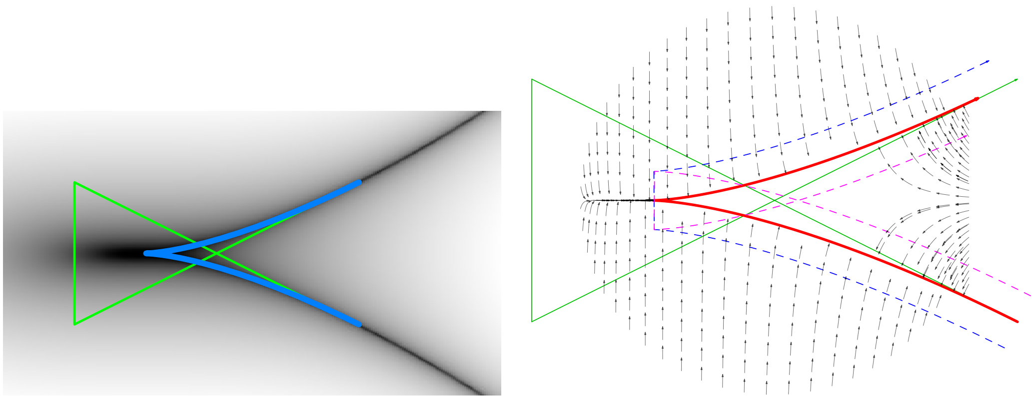
	p_0	p_1	p_2	p_3	C_{00}	C_{10}	C_{01}	C_{20}	C_{11}	C_{02}	C_{30}	C_{21}	C_{12}	C_{03}
Örnek#1	$[0, 0]$	$[-1, 0]$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$	0	0	-54	18	0	54	-8	0	0	0
Örnek#2	$[0, 0]$	$[-2, 1]$	$[-2, 0]$	$[0, 1]$	0	432	864	288	0	-864	64	0	0	0

Tablo 1: örnek geometriler için açık ve kapalı "explicit"/"implicit" katsayılar



(a) artık "residual" (b) gradyan alanı ve iki "offset"

Şekil 5: Örnek 1



(a) artık "residual" (b) gradyan alanı ve iki "offset"

Şekil 6: Örnek 2

Kararlılık Analizleri:

Kararlılık analizleri için kullanılan durum-uzayı ifadeleri aşağıda verilmiştir. Analizlerin düz çizgi takibi yanısıra daire takibini de kapsaması için polar koordinatlar kullanılmış böylece denge durumunun basitçe ifade edilebilmesi sağlanmıştır. Ayrıca eğriler yerel olarak öpen dairelere ("osculating circle") oturduklarından kısmi olarak eğri takiplerinin kavislik yarıçapı ile ilişkilendirebilmesi mümkün olabilmektedir.

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \upsilon\left(\cos\chi\cos\theta+\sin\chi\sin\theta\right)\\
\dot{\theta} &= \upsilon r^{-1}\left(-\cos\chi\sin\theta+\sin\chi\cos\theta\right)\\
\dot{\psi}_{cmd} &= k_p\left(\chi_{cmd}-\chi\right)+k_i\int\left(\chi_{cmd}-\chi\right)+k_d\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\chi_{cmd}-\chi\right)\\
\phi_{cmd} &= \arctan\left(\upsilon g^{-1}\dot{\psi}_{cmd}\right)\\
\dot{\phi} &= \left(\phi_{cmd}-\phi\right)T_\phi^{-1}\\
\dot{\chi} &= g\upsilon^{-1}\tan\phi
\end{aligned}$$

Daire üzerinde hareket durumunda "Jacobian" matrisi

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}
-\frac{1}{T_\phi} & -\frac{\upsilon\,k_p\,gR^2}{(R^2g^2+\upsilon^4)\,T_\phi} & \frac{\upsilon\,k_p\,gR}{(R^2g^2+\upsilon^4)\,T_\phi\,\rho} & -\frac{\upsilon\,k_p\,gR^2}{(R^2g^2+\upsilon^4)\,T_\phi} & \frac{\upsilon\,k_i\,gR^2}{(R^2g^2+\upsilon^4)\,T_\phi}\\
\frac{R^2g^2+\upsilon^4}{gR^2\upsilon} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\upsilon & 0 & -\upsilon & 0\\
0 & 0 & \frac{\upsilon}{R^2} & 0 & 0\\
0 & -1 & \frac{1}{R\rho} & -1 & 0
\end{bmatrix}$$

olarak hesaplanmıştır. Bu matris kullanılarak sistemin karakteristik polinomu

$$p\left(s\right)=s^5+s^4\frac{1}{T_\phi}+\frac{\left(\upsilon^2\,T_\phi+k_p\,R^2\right)}{R^2\,T_\phi}s^3+\frac{\left(k_i\,R^2\rho+\upsilon^2\rho+\upsilon\,k_p\,R\right)}{R^2\rho\,T_\phi}s^2+\frac{\upsilon\,k_i}{R\rho\,T_\phi}s$$

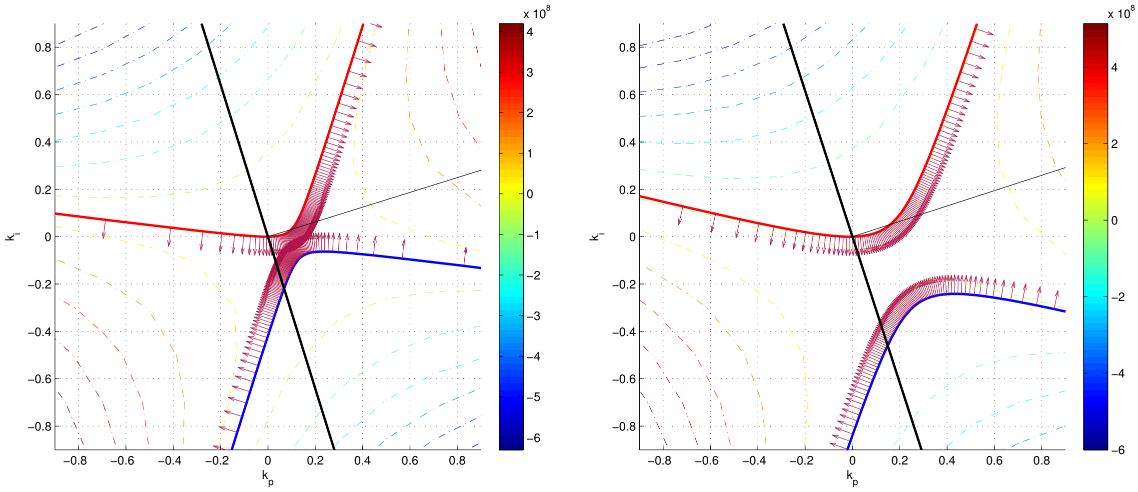
olarak belirlenmiş ve elde edilen Routh matrisi 1. kolonu aşağıda verilmiştir.

$$Routh_{:,1}=\begin{bmatrix}
1\\
\frac{1}{T_\phi}\\
\frac{\upsilon^2\,T_\phi+k_p\,R^2}{R^2\,T_\phi}-\frac{k_i\,R^2\rho+\upsilon^2\rho+\upsilon\,k_p\,R}{R^2\rho}\\
\frac{k_i\,R^2\rho+\upsilon^2\rho+\upsilon\,k_p\,R}{R^2\rho\,T_\phi}-\frac{\upsilon\,k_i}{T_\phi^2R\rho}\left(\frac{\upsilon^2\,T_\phi+k_p\,R^2}{R^2\,T_\phi}-\frac{k_i\,R^2\rho+\upsilon^2\rho+\upsilon\,k_p\,R}{R^2\rho}\right)^{-1}\\
\frac{\upsilon\,k_i}{R\rho\,T_\phi}\\
\frac{\upsilon\,k_i}{R\rho\,T_\phi}
\end{bmatrix}$$

burdan elden edilen eşitsizlikler

$$\begin{aligned}
RT_{3,1} &= -\frac{-\rho\,k_p\,R+T_\phi\,k_i\,R\rho+T_\phi\,\upsilon\,k_p}{R\rho\,T_\phi}>0 &(2)\\
RT_{3,1} &\Rightarrow \left(T_\phi\,\upsilon-\rho\,R\right)\,k_p+T_\phi\,k_i\,R\rho>0 &(3)\\
RT_{4,1}RT_{3,1}R^3T_\phi^2\rho^2 &= -{k_i}^2R^3\rho^2\,T_\phi+\upsilon^2\rho\left(\rho R-\upsilon\,T_\phi\right)k_p-\upsilon R\left(\upsilon\rho^2\,T_\phi+R\rho\right)k_i &(4)\\
&\quad+\upsilon R\left(R\rho-\upsilon\,T_\phi\right){k_p}^2+R^2\rho\left(R\rho-2\,T_\phi\upsilon\right)k_p\,k_i &(5)
\end{aligned}$$

olarak sıralanabilir. Şekil 7 de örnek durumlar ve bu durumlara karşılık gelen kararlılık bölgeleri gösterilmektedir.



(a) $\rho = 0.2, R = 2000, v = 120, g = 9.81, T_\phi = 0.3$ (b) $\rho = 0.2, R = 2000, v = 180, g = 9.81, T_\phi = 0.3$

Şekil 7: PI kontrolcü için kararlılık bölgeleri

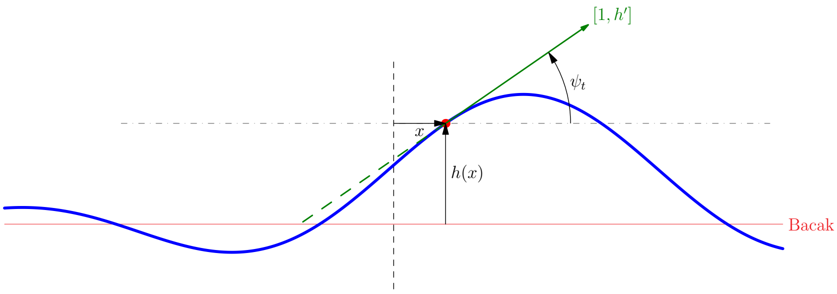
Bacak Etrafı Tanımlı Eğriler

Bu bölümde düz bacağa olan mesafenin çizgi boyunca konumun bir fonksiyonu olarak tanımlandığı durum için (Şekil 8) geliştirilen vektör alan tasarımlarına yer verilmiştir. İlkin üstel sönüm koşulu ile iz açısı χ için bir vektör alanı, sonrasında ayrık adım Taylor serisi ile iz açısı zaman değişim miktarını $\dot{\chi}$ veren bir vektör alanı tanımlanmıştır. $\dot{\chi}$ ile tanımlanmış vektör alanların sabit bir görüntüye sahip değildirler, ancak ilk durum yönleri bir eğri üzerinde sabitlendiği takdirde kısmi bir bölgede sabit bir görüntüye sahip olabilmektedirler.

Eğrilerin Tarifi:

Bacak doğrultusunda mesafe x ve bacağa olan mesafe $y = h(x)$ ile ifade edildiğinde, bacağa göre konum, hız ve ivme vektörleri

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \begin{bmatrix} x & h(x) \end{bmatrix}^\top \\
\dot{\mathbf{P}} &= \begin{bmatrix} \dot{x} & h'\dot{x} \end{bmatrix}^\top \\
\ddot{\mathbf{P}} &= \begin{bmatrix} \ddot{x} & h''\dot{x}^2 + h'\ddot{x} \end{bmatrix}^\top
\end{aligned}
$$



Şekil 8: Bacak etrafında tanımlanmış eğrilerin tanım geometrisi

ve sürat/ivme boyu

$$
\begin{aligned}
v &= \left|\dot{\mathbf{P}}\right| = \dot{x}\sqrt{1+h'^2} && (6)\\
a &= \left|\ddot{\mathbf{P}}\right| = \sqrt{\left(h''\dot{x}^2+h'\ddot{x}\right)^2+\ddot{x}^2} && (7)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. İvme teğet ve normal bileşenleri[3]

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_t &= \frac{\ddot{\mathbf{P}}\cdot\dot{\mathbf{P}}}{\dot{\mathbf{P}}\cdot\dot{\mathbf{P}}}\dot{\mathbf{P}} = \frac{h'h''\dot{x}^2+\left(1+h'^2\right)\ddot{x}}{1+h'^2}\left[\begin{array}{c}1\\ h'\end{array}\right]\\
\mathbf{a}_n &= \mathbf{a}-\mathbf{a}_t = \frac{h''\dot{x}^2}{1+h'^2}\left[\begin{array}{c}-h'\\ 1\end{array}\right] = \frac{h''v^2}{\left(1+h'^2\right)^2}\left[\begin{array}{c}-h'\\ 1\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Kavis "Curvature" κ $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(n)} = \left[\begin{array}{cc} x^{(1-n)} & h^{(n)}\end{array}\right]$ kullanıldığında $\kappa = \frac{|\mathbf{P}_{,x}\times\mathbf{P}_{,xx}|}{|\mathbf{P}_{,x}|^3} = \frac{h''}{(1+h'^2)^{\frac{3}{2}}}$ olarak elde edilir.

Üstel Sönüm/Lyapunov Temelli Güdüm:

Eğri takip hatası $\varepsilon = y - h\left(x\right)$ 1. ve 2. türevleri [4]

$$
\begin{aligned}
\dot{\varepsilon} &= \dot{y}-h'\dot{x} = v\left(\sin\psi - h'\cos\psi\right) = v\frac{\sin\left(\psi-\psi_t\right)}{\cos\psi_t} && (8)\\
\ddot{\varepsilon} &= v\left(\dot{\psi}\left(\cos\psi+h'\sin\psi\right)-h''v\cos^2\psi\right) = v\left(\dot{\psi}\frac{\cos\left(\psi-\psi_t\right)}{\cos\psi_t}-h''v\cos^2\psi\right) && (9)
\end{aligned}
$$

ile verilmektedir. Hatanın exponansiyel sönümlemesi

$$
\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}+\lambda\varepsilon &= 0 && (10)\\
\ddot{\varepsilon}+\lambda\dot{\varepsilon} &= 0 && (11)
\end{aligned}
$$

[3] $\dot{x} = \frac{v}{\sqrt{1+h'^2}}$ ilişkisi kullanılarak

[4] $h' = \tan\left(\psi_t\right)$ ilişkisi ile beraber altifadeler $\sin\psi - h'\cos\psi = \frac{\sin(\psi-\psi_t)}{\cos\psi_t}$ ve $\cos\psi + h'\sin\psi = \frac{\cos(\psi-\psi_t)}{\cos\psi_t}$ halini almaktadır.

eşitlikleri ile şart koşulduğunda 10 gerekli başaçısı değerini verir

$$\psi^* = \psi_t + \arcsin\left(-\frac{\lambda\varepsilon\cos\psi_t}{\upsilon}\right) \tag{12}$$

2. derece Lypapunov şartı (eşitlik 11) iz açısı değişim miktarını $\dot{\psi}$ verir

$$\dot{\psi}^* = \frac{h''\upsilon\cos^2\psi\cos\psi_t}{\cos(\psi-\psi_t)} - \lambda\tan(\psi-\psi_t) \tag{13}$$

Bu alanlar için yatış açısı komutları $\phi^1_{cmd} = \arctan\left(\frac{\upsilon k_p(\psi^*-\psi)}{g}\right)$ ve $\phi^2_{cmd} = \arctan\left(\frac{\upsilon\dot{\psi}^*}{g}\right)$ şeklinde elde edilir.

Ayrık Lyapunov:

Taylor serisi açılımları kullanılarak belli bir zaman aralığında hatada değişim miktarı seçilebilen mertebeden hassasiyette elde edilebilir. (8) ve (9) ifadeleri kullanıldığında ayrık zamanda 2. derece Taylor serisi artım miktarı $\Delta\varepsilon \simeq \dot{\varepsilon}T + \ddot{\varepsilon}\frac{T^2}{2}$ ile hesaplanır. Değişimin hep azalma yönünde olacağı şartı $\Delta\varepsilon \simeq -\lambda\varepsilon$ ile ifade edildiğinde gereken iz açısı değişim hızı elde edilir [5]

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &\simeq -\lambda\varepsilon \\ \sin(\psi-\psi_t)T + \left(\dot{\psi}\cos(\psi-\psi_t) - h''\upsilon\cos^2\psi\cos\psi_t\right)\frac{T^2}{2} &\simeq -\frac{\lambda\varepsilon\cos\psi_t}{\upsilon} \end{aligned}$$

$$\dot{\psi} \simeq \frac{1}{\cos(\psi-\psi_t)}\left[h''\upsilon\cos\psi_t\cos^2\psi - \frac{2}{T^2}\left(\frac{\lambda\varepsilon\cos\psi_t}{\upsilon} + \sin(\psi-\psi_t)T\right)\right] \tag{14}$$

Durum Uzayı Formulasyonu ve Kararlılık Analizi:

Durum Uzayı değişimlerinin $\dot{\varepsilon} = \upsilon\sin(\psi-\psi_t)(\cos\psi_t)^{-1}$, $\dot{\phi} = \tau_\phi^{-1}(\phi_{cmd}-\phi)$, $\dot{\psi} = g\upsilon^{-1}\tan\phi$,$\dot{x} = \upsilon\sin\psi$, $\dot{y} = \upsilon\cos\psi$ ile tanımlandığı halde $\dot{\psi}_{cmd} = \frac{1}{\cos(\psi-\psi_t)}\left[\frac{\dot{\psi}_t\cos^2\psi}{\cos^2\psi_t} - \frac{2}{T^2}\left(\frac{\lambda\varepsilon\cos\psi_t}{\upsilon} + \sin(\psi-\psi_t)T\right)\right]$, $\phi_{cmd} = \arctan\left(\frac{\upsilon\dot{\psi}_{cmd}}{g}\right)$ güdümü ele alındığında 1. derece üstel sönümleme kontrolcüsü için lineer matris

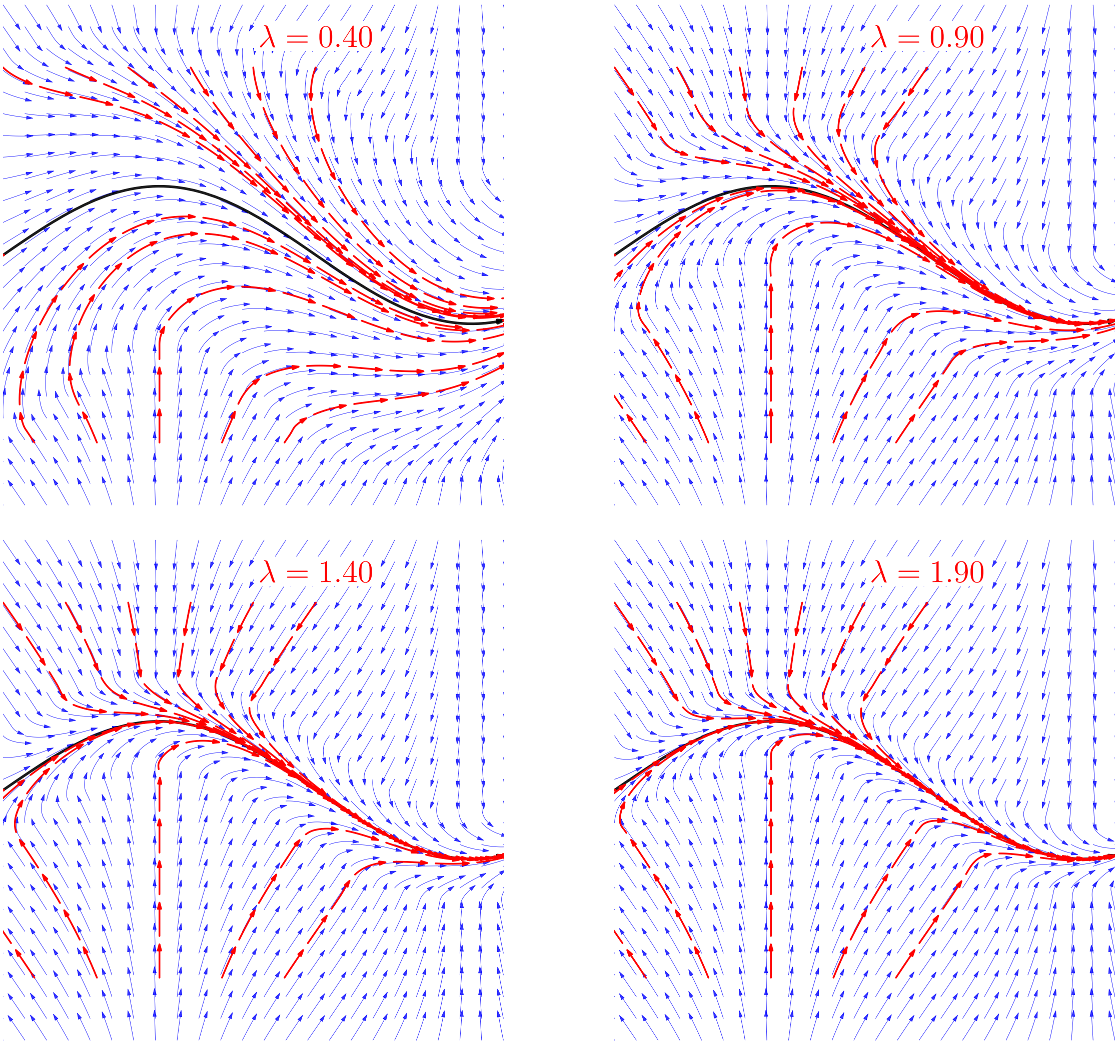
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\upsilon}{\cos(\psi)} & 0 \\ -\frac{K\lambda\cos(\psi)}{g\tau_\phi} & -\frac{1}{\tau_\phi} & -\frac{\upsilon K}{g\tau_\phi} & 0 \\ 0 & \frac{h''\upsilon^4\cos^6(\psi)+g^2}{g\upsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\upsilon\sin(\psi) & 0 \end{bmatrix}$$

[5] $\varepsilon \leftarrow \varepsilon - \lambda\varepsilon = (1-\lambda)\varepsilon$ ile kararlılık aralığı $\lambda \in [0,2]$ olarak verilir

olarak hesaplanır. A matrisinden karakteristik polinom $CP\left(s\right) = \left(s^3 + \frac{s^2}{\tau_\phi} + \frac{\kappa^2 \upsilon^4 K s}{g^2 \tau_\phi} + \frac{\kappa^2 \upsilon^4 K \lambda}{g^2 \tau_\phi}\right) s$ olarak elde edilir. Bu polinomdan Routh-Hurwitz matrisi

$$RT = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\left((h'')^2 \upsilon^4 (\cos(\psi))^6 + g^2\right) K}{g^2 \tau_\phi} & 0 & s^4 \\ \frac{1}{\tau_\phi} & \frac{\left((h'')^2 \upsilon^4 (\cos(\psi))^6 + g^2\right) K \lambda}{g^2 \tau_\phi} & 0 & s^3 \\ \frac{\left((h'')^2 \upsilon^4 (\cos(\psi))^6 + g^2\right) K}{g^2 \tau_\phi} - \frac{\left((h'')^2 \upsilon^4 (\cos(\psi))^6 + g^2\right) K \lambda}{g^2} & 0 & 0 & s^2 \\ \frac{\left((h'')^2 \upsilon^4 (\cos(\psi))^6 + g^2\right) K \lambda}{g^2 \tau_\phi} & 0 & 0 & s \\ \frac{\left((h'')^2 \upsilon^4 (\cos(\psi))^6 + g^2\right) K \lambda}{g^2 \tau_\phi} & 0 & 0 & [1] \end{bmatrix}$$

elde edilir, 3. eleman hariç 1. kolon bütünü sıfırdan büyük olduğu görülmektedir. $(3,1)$ elemanı ise $RT_{3,1} = -\frac{\left((h'')^2 \upsilon^4 \cos^6(\psi) + g^2\right) K \left(\tau_\phi \lambda - 1\right)}{g^2 \tau_\phi} > 0$ ile $\lambda < \frac{1}{\tau_\phi}$ sönümleme miktarı üstdeğerini sınırlamaktadır. Şekil 9 de değişik sönümleme çarpanları için sinus eğrisini takip edecek vektör alanlarını görünüşü verilmiştir.



Şekil 9: sinüs eğrisi takip için kullanılan vektör alanı izleri $\lambda = [0.4, 0.9, 1.4, 1.9]$

Düz Bacak (Büyük Daire Arkı) Tutma Vektor Alanları

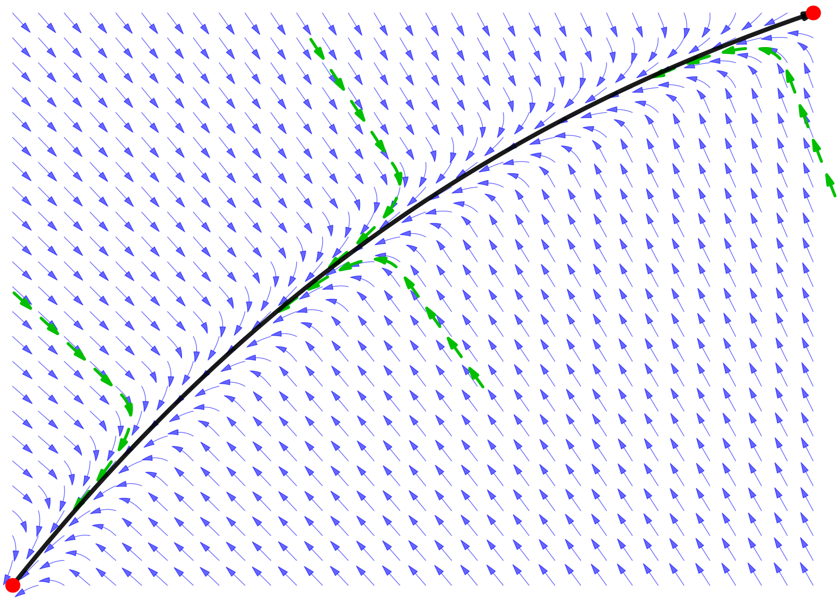
Bacak uzunluğu d [rad] ile, uçağın bacak uç noktalarına olan mesafesi d_1 [rad] , d_2 [rad] ile gösterildiğinde (Şekil 11b) , uçağın bacağa izdüşüm ve dik mesafeleri, küresel trigonometri kullanılarak elde edilir:

$$\tan x_1 = \frac{\cos d_2 - \cos d_1 \cos d}{\cos d_1 \sin d} \tag{15}$$

$$\cos x_1 = \cos d_1 \sin d \left((\cos d_1 + \cos d_2)^2 - 4 \cos d_1 \cos d_2 \cos^2 \frac{d}{2} \right)^{-1/2} \tag{16}$$

$$\cos h \;=\; \cos d_1 \left(\cos x_1\right)^{-1} = \cos d_2 \left(\cos x_2\right)^{-1} = \sqrt{\left(\cos d_1 + \cos d_2\right)^2 - 4\cos d_1 \cos d_2 \cos^2 \frac{d}{2}}\left(\sin d\right)^{-1}$$

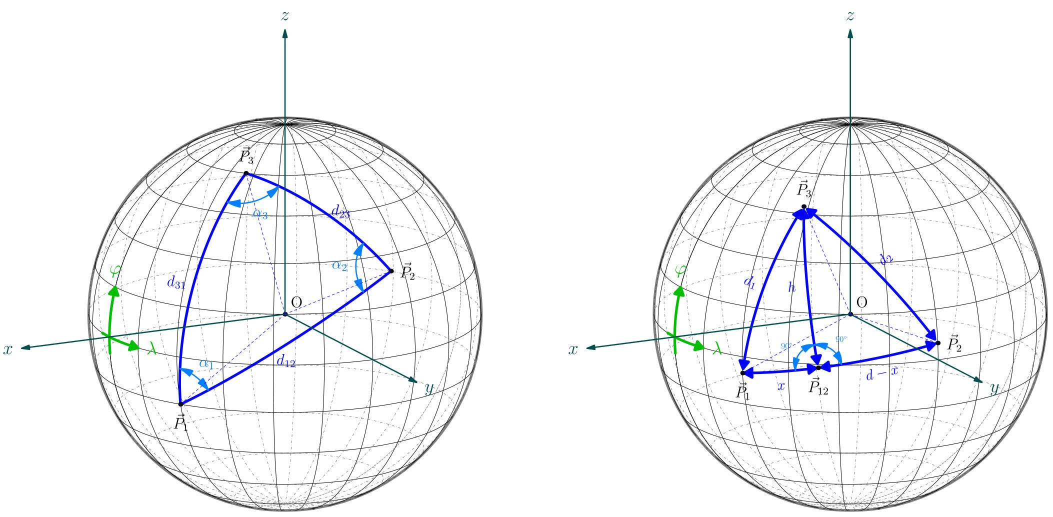
Teğet ve normal bileşenler enlem-boylam gradyanı ile bulunur $\mathbf{T} = (\partial/\partial\lambda, \partial/\partial\varphi)\, x_1$ $\mathbf{N} = (\partial/\partial\lambda, \partial/\partial\varphi)\, h$. Büyük Dairenin Kapalı gösterimi de vektör alan oluşturulmasında kullanılabilir. $\mathbf{P_1} \ldots \mathbf{P_2}$ ile tanımlanmış Büyük Daire Arkının yer aldığı düzlem normali $\mathbf{N}_{12} = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$, dolayısıyla BDA kapalı ifadesi $(\mathbf{P} - 0) \cdot \mathbf{N}_{12} = n_1 \cos\lambda \cos\varphi + n_2 \sin\lambda \cos\varphi + n_3 \sin\varphi = 0$ olarak elde edilir. Kapalı gösterimin gradyanından teğet ve normal yönler $T \parallel (n_1 \sin\varphi \cos\varphi + n_2 \sin\varphi \sin\lambda - n_3 \cos\varphi, n_2 \cos\varphi \cos\lambda - n_1 \cos\varphi \sin\lambda)$ ve $N \parallel (-T_y, T_x)$ ile hesaplanır. Şekil 10 de kapalı ifadeden elde edilen vektör alanına ait örnek bir resmedilmiştir.



Şekil 10: Büyük daire arkı vektör alanı $(\lambda_1, \varphi_1) = (0°, 30°)$, $(\lambda_2, \varphi_3) = (35°, 55°)$, $\upsilon = 800$, r_{kritik} 3 kat büyütülmüş

Bacak Takip Sonlandırma Mesafesi ve Köşe Dönme Açısı:

Görev noktalarını ("waypoints") bağlayan bacaklar ("leg") ile tanımlanmış bir görevde, yanından geçiş ("flyby") rotası tercih edildiğinde, bacak takibini sonlandıracak mesafe tahminine ihtiyaç vardır. İki bacak arasında kalan açı α ve minimum dönüş yarıçapı R_{min} bilindiğinde $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r_{min}}{d_{fb}}$ ilişkisinden bacak sonlandırma mesafesi $d_{fb} = \frac{r_{min}}{\tan\frac{\alpha}{2}}$ olarak hesaplanır. Bacaklar arasındaki açı (Şekil 11a) ise küresel trigonometride yer alan küresel cosine teoremi $\cos d_{13} = \cos d_{12} \cos d_{23} + \sin d_{12} \sin d_{23} \cos\alpha_2$ eşitliğinden $\cos\alpha_2 = \left(\sin d_{12} \sin d_{23}\right)^{-1} \left(\cos d_{13} - \cos d_{12} \cos d_{23}\right)$ ile hesaplanır



(a) bacak dönüş geometrisi (b) dik ve boyuna mesafeler

Şekil 11: bacak geometrileri

3 Boyut, Kartezyen İlişkiler

Küre dünya üzerinde konum $\mathbf{P} = R\left[\begin{array}{ccc}\cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi\end{array}\right]$ ile verildiğinde NED temel ("basis") vektörleri $\mathbf{e}_E = \mathbf{P}_{,\lambda}\left|\mathbf{P}_{,\lambda}\right|^{-1}$,$\mathbf{e}_N = \mathbf{P}_{,\varphi}\left|\mathbf{P}_{,\varphi}\right|^{-1}$,$\mathbf{e}_U = \mathbf{e}_E \times \mathbf{e}_N$ ile belirlenir. Konum türevi alındığında ve yerel dikey eksen takımında ("local vertical frame") ifade edilen hıza eşitlendiğinde, hız vektörü ífadesi$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{P}} = R\dot{\varphi}\mathbf{e}_N + R\cos\varphi\dot{\lambda}\mathbf{e}_E + \dot{R}\mathbf{e}_U = v\left(\mathbf{e}_N\cos\chi + \mathbf{e}_E\sin\chi\right) + \dot{h}\mathbf{e}_U$ kullanılarak azimut açısı ile enlem boylam koordinat sisteminde iz açısı arasındaki ilişki elde edilir

$$\tan\chi = \frac{\dot{\lambda}}{\dot{\varphi}}\cos\varphi = \tan\chi_{2D}\cos\varphi$$

Bu ilişki enlem-boylam düzleminde tanımlanmış vektör alanların tercih edilmesi durumunda kullanılması elzemdir aksi takdirde ekvatordan kuzeye/güneye doğru sapan görev planlarında ciddi eğri tutuş hatası olarak kendini gösterecektir. Temel vektörlerin zaman değişimleri $\dot{\mathbf{e}}_E = R^{-1}v\sin\chi\left(\tan\varphi\mathbf{e}_N - \mathbf{e}_U\right)$, $\dot{\mathbf{e}}_N = -R^{-1}v\left(\cos\chi\mathbf{e}_U + \sin\chi\tan\varphi\mathbf{e}_E\right)$, $\dot{\mathbf{e}}_U = R^{-1}v\left(\cos\chi\mathbf{e}_N + \sin\chi\mathbf{e}_E\right)$ olarak elde edilir. Bu türevler kullanılarak hız türevinden elde edilen ivme

$$\mathbf{a} \;=\; v\left(\dot{\chi} - \frac{v\sin\chi}{R}\tan\varphi\right)\left(\cos\chi\mathbf{e}_E - \sin\chi\mathbf{e}_N\right) + \left(\ddot{h} - \frac{v^2}{R}\right)\mathbf{e}_U + \frac{v\dot{h}}{R}\left(\cos\chi\mathbf{e}_N + \sin\chi\mathbf{e}_E\right)$$

halini alır. Hareket teğeti $\mathbf{T} = \mathbf{e}_N\cos\chi + \mathbf{e}_E\sin\chi$ olarak alındığında ivmenin teğet ve normal bileşenleri $\mathbf{a}_t = \ddot{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{T}\,\mathbf{T}$ ve $\mathbf{a}_n = \mathbf{P} - \mathbf{a}_t$ hesapları ile elde edilir Düzlem kinematiğinde

$a_n = \upsilon\dot{\chi}$olarak kullanılan ivme değerine küre üzerinde hareket durumunda iken yeni bir terim geldiği görülmektedir $a_n^{3D} = \upsilon\dot{\chi} - \frac{\upsilon^2 \sin\chi}{R}\tan\varphi$. Hesaplanan ivme yüksek dereceden sönümleme geribeslemesi olarak ve/veya öngörücü kontrolde ("predictive control") uygulama bulabilir.

3 Boyut Kartezyen ve 2 Boyutta Enlem-Boylam Düzlemi Arasında Doğrultu İlişkileri:

3 boyutta yer alan parametrik bir yüzeye ait $\sigma = \sigma(u, v)$ noktası üzerinde tanımlanmış bir teğet yön vektörüne $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\sigma)$ enlem-boylam düzleminde karşılık gelen doğrultuyu bulmak için

$$\mu(\mathbf{F} - \mathbf{F}_N) = \sigma_{,u}\dot{u} + \sigma_{,v}\dot{v}$$

paralellik eşitliği kullanılır. Eşitliğin $\sigma_{,u}, \sigma_{,v}$ ile skalar çarpımından 2 skalar denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}\mu\mathbf{F}\cdot\sigma_{,u} &= \sigma_{,u}\cdot\sigma_{,u}\dot{u} + \sigma_{,v}\cdot\sigma_{,u}\dot{v}\\ \mu\mathbf{F}\cdot\sigma_{,v} &= \sigma_{,u}\cdot\sigma_{,v}\dot{u} + \sigma_{,v}\cdot\sigma_{,v}\dot{v}\end{aligned}$$

$g_{11} = \sigma_{,u}\cdot\sigma_{,u}$, $g_{12} = \sigma_{,u}\cdot\sigma_{,v}$, $g_{22} = \sigma_{,v}\cdot\sigma_{,v}$ ve $F_1 = \mathbf{F}\cdot\sigma_{,u}$, $F_2 = \mathbf{F}\cdot\sigma_{,v}$ tanımlamaları ile $[g_{ij}][\dot{u}, \dot{v}] = \mu[F_i]$ çözümünden iz açısı yönü $\chi = \arctan(\dot{u}, \dot{v}) = \arctan(F_1 g_{22} - F_2 g_{12}, -F_1 g_{12} + F_2 g_{11})$ olarak elde edilir.

Bezier Eğrilerinde Dönü ve Taşıma Bağımsızlığı:

Enlem-Boylam düzleminde yer alan Bezier kontrol noktaları ötelendiğinde veya döndürüldüğünde üç boyutta küre üzerinde karşılık gelen eğri, ilk eğriye benzerliğini kaybetmektedir. Bu sıkıntı SLERP adıyla anılan enterpolasyon şeması ile bertaraf edilebilir. SLERP şeması $s(\mathbf{A}, \mathbf{B}, u) = \mathbf{A}\frac{\sin(1-u)\Omega}{\sin\Omega} + \mathbf{B}\frac{\sin\Omega u}{\sin\Omega}$ $u \in [0, 1]$ olarak tanımlanmaktadır ve $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ arasında eşit aralıklarla daire noktalarını üretmektedir. SLERP şeması, de-Casteljaeu algoritması 17 ile beraber kullanılarak küre üzerinde Bezier eğrisinin elde edilmesinde uygulanabilir.

$$\begin{array}{lclcl} s(\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1) \equiv \mathbf{B}_{01} & & \searrow & & \\ & \succ & s(\mathbf{B}_{01}, \mathbf{B}_{12}) \equiv \mathbf{B}_{012} & \searrow & \\ s(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) \equiv \mathbf{B}_{12} & & \succ & & s(\mathbf{B}_{012}\mathbf{B}_{123}) \equiv \mathbf{B}_{0123} \\ & \succ & s(\mathbf{B}_{12}, \mathbf{B}_{23}) \equiv \mathbf{B}_{123} & \nearrow & \\ s(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3) \equiv \mathbf{B}_{23} & & \nearrow & & \end{array} \quad (17)$$

Ardaşık de-Casteljaeu uygulaması açıldığında, düzlemde Bezier ifadesini çağrıştıran ifade 18 elde edilir.

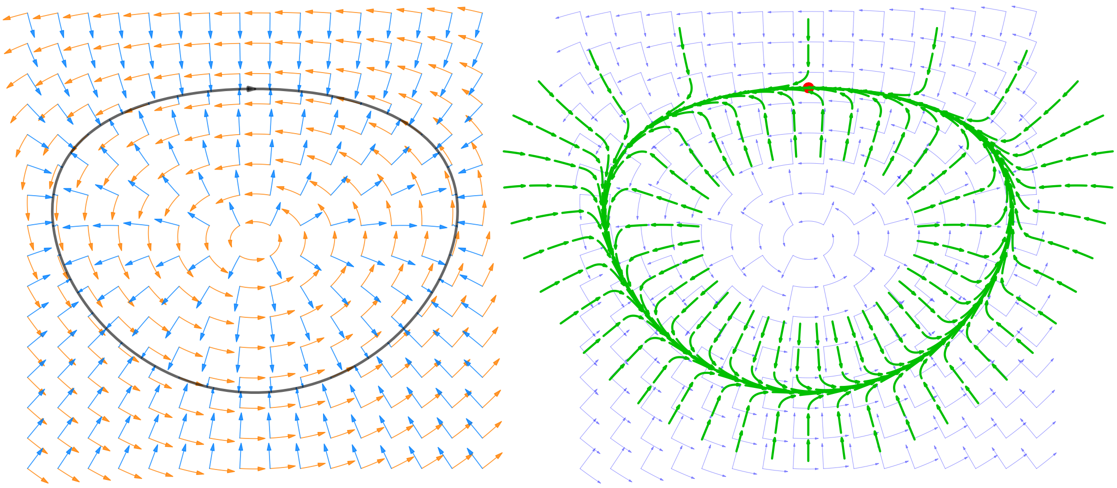
$$\begin{aligned}\gamma\left(u;\mathbf{B}_0,\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3\right) &= \sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}\left(\frac{\sin\Omega u}{\sin\Omega}\right)^{i}\left(\frac{\sin\left(1-u\right)\Omega}{\sin\Omega}\right)^{3-i}\mathbf{B}_i \\ &= \frac{1}{\sin^3\Omega}\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}\left(\sin\Omega u\right)^{i}\left(\sin\left(1-u\right)\Omega\right)^{3-i}\mathbf{B}_i\end{aligned} \tag{18}$$

Daire Takibi

Küre trigonometrisi cos teoreminim σ yarıçaplı, merkezi $(\lambda_1.\varphi_1) = (\lambda_c, \varphi_c)$ olan çember üzerinde bir noktaya $(\lambda_2.\varphi_2)$ uygulanmasından elde edilen $\cos\sigma = \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Delta\lambda = \text{sabit}$ eşitliği, türevi alındığında teğet alan yönü elde edilir

$$\tan\left(\chi_{cember}\right) = \frac{\dot{\lambda}}{\dot{\varphi}} = \frac{\sin\varphi_c\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi_c\cos\left(\lambda-\lambda_c\right)}{\cos\varphi_c\cos\varphi\sin\left(\lambda-\lambda_c\right)}$$

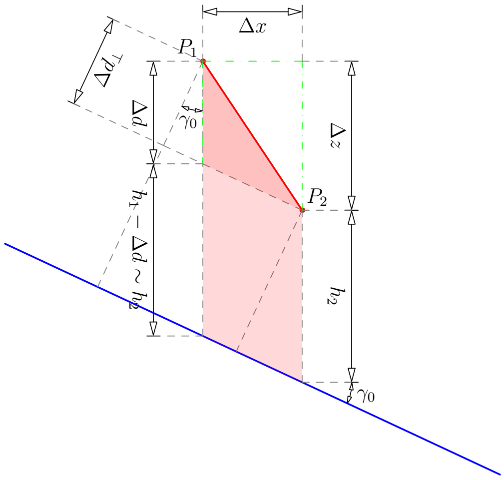
normal vektör alanı 90 derece çevrim ile elde edilir. Şekil 12 de bu alan resmedilmişir.



Şekil 12: $(\lambda_c, \varphi_c) = (10°, 40°)$ merkezli ve $\sigma = 24°$ yarıçaplı daire ile tanımlanmış "Loiter" vektör alanı

İvme Profilli Süzülme Yolu ("glide-slope") Takibi

Otomatik iniş algoritmalarında uçağın belli bir süzülüş açısı ile palye ("flare") aşamasına gelmesi beklenmektedir. Bu bölümde süzülüş yolu eğrisine oturan vektör alanlarının kinematik tasarımı ele alınmıştır. Modellemede süzülme yolundan sapma mesafesine bağlı bir uçuş yolu açısı alanı kabül edilmiştir. İvme komutu ile ilişkiler değerlendirilerek ivme profilinden vektör alanları elde edilmiştir. Süzülüş yolu için geliştirilen vektör alanlar, dış döngünün hava aracı performans limitleri dahilinde komutlar üretip, limit dışı hareketlerin komut seviyesinde engellenmesini sağlar. Performans limitleri içerisinde seyretmesi beklenen bir iniş başlangıcının uzayda hangi pencereler içerisinde olabileceğinin belirlenmesinde de fayda sağlar.



Şekil 13: Süzülme Yolu Geometrisi

Süzülme yolu açısı γ_0 olan süzülme yolu ("glideslope") çizgisine(x, z) noktasının dik $d_\perp$ve y-ekseni boyunca mesafeleri d

$$\begin{aligned} d_\perp &= z\cos\gamma_0 - x\sin\gamma_0 \\ d &= z - x\tan\gamma_0 = h \end{aligned}$$

olarak verilir. Diferansiyel kinematik $\dot{x} = v\cos\gamma$, $\dot{z} = v\sin\gamma$ ilişkilerinden, süzülme yoluna ("glideslope") olan uzaklığın değişimi

$$\dot{h}(t) = \dot{z}(t) - \dot{x}(t)\tan\gamma_0 = v\sin\gamma - v\cos\gamma\tan\gamma_0 = \frac{v\sin(\gamma-\gamma_0)}{\cos\gamma_0}$$

olarak elde edilir. Daha genel formulasyonda, $z_g(x)$ eğrisi/grafiği süzülme yolu eğrisini yerini aldığında

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(z(t) - z_g(x(t))\right) = v\sin\left(\gamma - \arctan z_g'\right) \\ \ddot{h}(t) &= v\left(\left(\cos\gamma + z_g'\sin\gamma\right)\dot{\gamma} - z_g'' v\cos^2\gamma\right) = v\left(\frac{\cos\left(\gamma - \arctan z_g'\right)}{\cos\gamma_0}\dot{\gamma} - z_g'' v\cos^2\gamma\right) \end{aligned}$$

normal ivme ilişkisi $n_z = v\dot{\gamma}$ kullanıldığında $\ddot{h} = \cos^{-1}\gamma_0\cos\left(\gamma - \arctan z_g'\right)n_z - z_g'' v^2\cos^2\gamma$ eşitliği elde edilir

Üstel Sönümleme Kararlılık Kriteri:

Tutma hatası $h = z(t) - x(t)\tan\gamma_0$ üzerinden tanımlanan Lyapunov adayının $L = \frac{1}{2}h^2$ birinci ve ikinci zaman türevleri

$$\begin{aligned}\dot{L} &= h\dot{h} = hv\frac{\sin(\gamma(h) - \gamma_0)}{\cos\gamma_0} \\ \ddot{L} &= v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(h\frac{\sin(\gamma(h)-\gamma_0)}{\cos\gamma_0}\right) = \frac{v\dot{h}}{\cos\gamma_0}\left(\sin(\gamma(h)-\gamma_0) + h\left(\cos(\gamma(h)-\gamma_0)\,\gamma_{,h}\right)\right)\end{aligned}$$

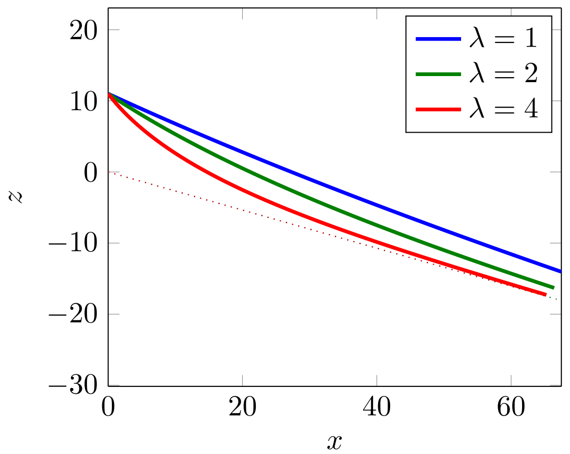
Lyapunov değişim hızının $\dot{L}$ h için Taylor serisi açılımdan $\dot{L} \simeq \frac{vh^2}{\cos\gamma_0}\left(\gamma_0^{(1)} + \frac{1}{2}\gamma_0^{(2)}h + \frac{1}{6}\left(\gamma_0^{(3)} - \left(\gamma_0^{(1)}\right)^3\right)h^2 + \frac{1}{24}\left(\gamma_0^{(4)} - 6\gamma_0^{(2)}\left(\gamma_0^{(1)}\right)^2\right)h^3\right) + \cdots$ Lyapunov ifadesinin herdaim azalır olması için gerekli/yeterli şartlar $\gamma_0^{(1)} < 0$, $\gamma_0^{(2)} = 0$, $\gamma_0^{(3)} - \left(\gamma_0^{(1)}\right)^3 < 0$, $\gamma_0^{(4)} - 6\gamma_0^{(2)}\left(\gamma_0^{(1)}\right)^2 = 0$ olarak sıralanabilir.

Üstel Sönümleme Kontrol:

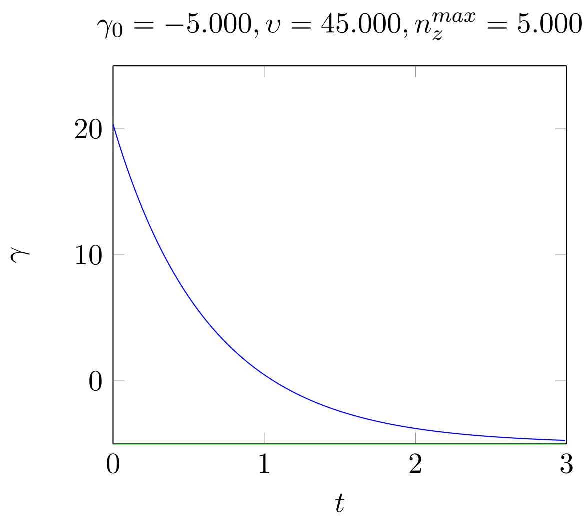
Lyapunov zamanla değişimini exponansiyel sönüm olarak şart koştuğumuzda $\dot{L} = -\lambda L$, $\lambda > 0$ ve ilgili tanımalar kullanıldığında $h\dot{h} = -\lambda\frac{1}{2}h^2 \to \dot{h} = -\frac{\lambda}{2}h$ veya $\dot{L} = hv\frac{\sin(\gamma(h)-\gamma_0)}{\cos\gamma_0} = -\lambda\frac{1}{2}h^2$ elde edilir. Bu eşitlik $\gamma(h)$ için çözüldüğünde

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \gamma_0 + \arcsin\left(\frac{-\lambda h\cos\gamma_0}{2v}\right) \\ &= \gamma_0 - \frac{1}{2}\frac{h\lambda\cos(\gamma_0)}{v} - \frac{1}{48}\left(\frac{h\lambda\cos(\gamma_0)}{v}\right)^3 - \frac{3}{1280}\left(\frac{h\lambda\cos(\gamma_0)}{v}\right)^5 + O\left(h^7\right)\end{aligned}$$

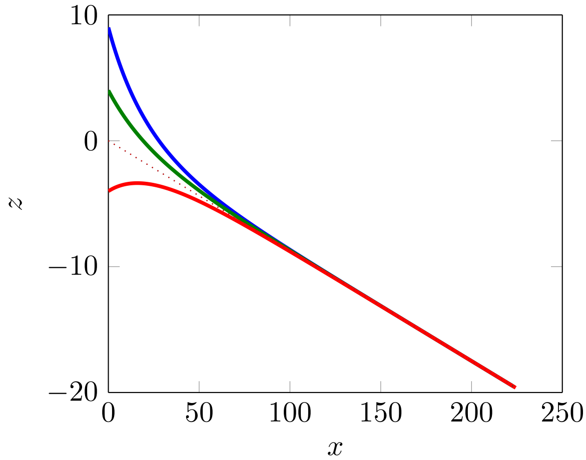
vektör alanı elde edilir. Bu vektör alanına ait grafikler Şekil 14 de verilmiştir.



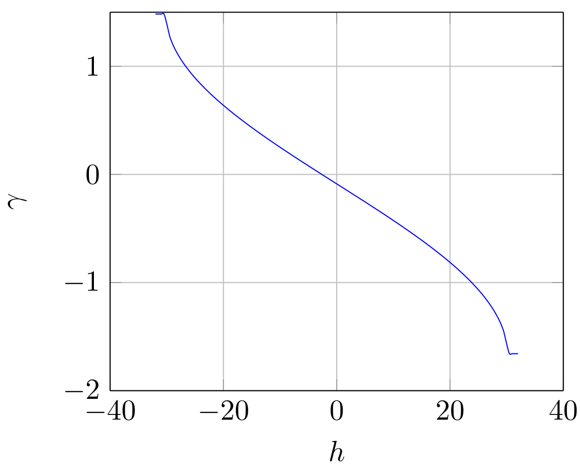
(a) Lyapunov n_z yörüngeleri



(b) γ davranışı



(c) çeşitli ilk konumlar için izlenen rotalar



(d) süzülüş açısı alanı γ^v

Şekil 14: Lyapunov ifadesinden üstel sönümleyen kontrolcü

FPA Alanı için Diferansiyel ilişkiler ve Hatasız Takip Rotaları:

Hataya bağlı vektör alanı $\gamma^v = \gamma^v\left(h, x\left(t\right)\right), h = z\left(t\right) - z_g, z_g = z_g\left(x\left(t\right)\right)$ FPA değişim hızını $\frac{\mathrm{d}\gamma^v}{\mathrm{d}t} = \gamma^v_{,h}\upsilon\left(\sin\gamma - z_g'\cos\gamma\right)$ olarak vermektedir. Bu değişim hızına karşılık gelen ivme $n_z^v = \upsilon\frac{\mathrm{d}\gamma^v}{\mathrm{d}t} = \gamma^v_{,h}\upsilon^2\left(\sin\gamma - z_g'\cos\gamma\right)$ olarak verilir. Eğer süzülme yolu açısı sabit ise

$z_g' = \tan\gamma_0$için

$$n_z^v = \gamma_{,h}^v \upsilon^2 \frac{\sin(\gamma-\gamma_0)}{\cos\gamma_0} \tag{19}$$

yol tutma hatasına bağlı verilmiş bir normal ivme profili $n_z^v = n_z^v(h)$ bu denklemi bir Adi Diferansiyel Denklem (ODE) haline getirmektedir. Bu denklemlerin çözülmesiyle uçuş yolu açısı referans hareketi elde edilmektedir. Takip eden kısımlarda küçük açı varsayımı ile formulasyon ve sabit ivme, lineer ivme durumları için sonuçlar verilmektedir.

Küçük Açı Varsayımı:

γ^v ve γ değerlerinin küçük olduğu varsayımıyla ivme formülü$n_z^v \simeq \gamma_{,h}^v \upsilon^2(\gamma-\gamma_0) = \frac{\upsilon^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[(\gamma^v(h)-\gamma_0)^2\right]$ halini alan denklem entegre edildiğinde uçuş yolu açısını verir

$$\frac{2}{\upsilon^2}\int_0^h n_z^v(\eta)\,\mathrm{d}\eta = (\gamma^v(h)-\gamma_0)^2 \Rightarrow \gamma^v(h) = \gamma_0 \pm \left(\frac{2}{\upsilon^2}\int_0^h n_z^v(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}}$$

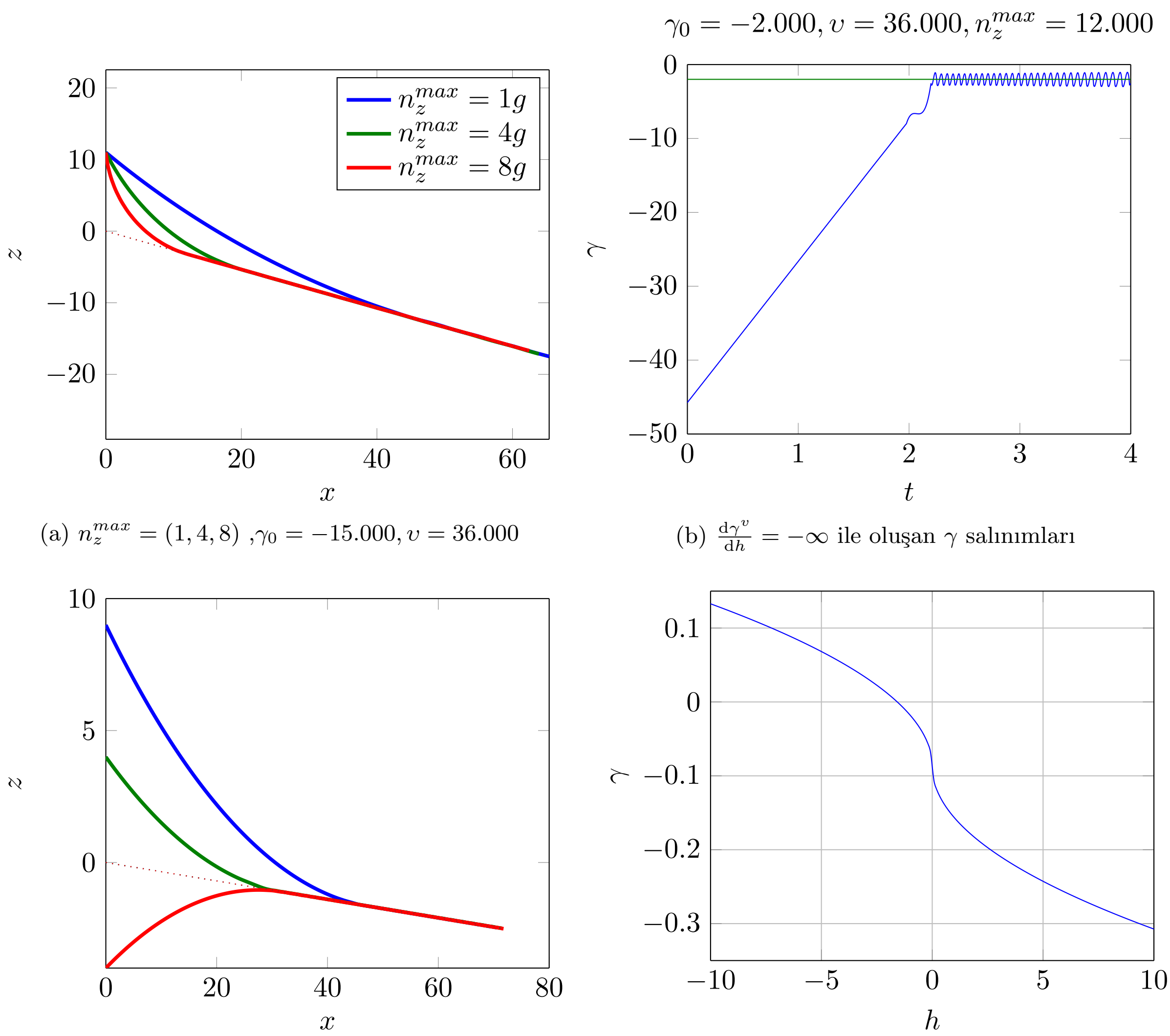
Sabit İvme Durumu:

Sabit ivme durumuna karşılık gelen kinematik denklem $\gamma_{,h}^v = n_z\left(\upsilon^2\left(\sin\gamma^v - z_g'\cos\gamma^v\right)\right)^{-1}$ entegre edildiğinde, sabit ivme vektör alanı [6]elde edilir

$$\gamma(h) = \arctan\left(\frac{\frac{\upsilon^2 m\sqrt{m^2+1} - m\ n_z\,h + \sigma\sqrt{\Delta}}{m^2+1}}{\frac{\left(-\upsilon^2 m\sqrt{m^2+1} + m\ n_z\,h - \sigma\sqrt{\Delta}\right)m}{m^2+1} + \frac{m^2\upsilon^2 - h\sqrt{m^2+1}\ n_z + \upsilon^2}{\sqrt{m^2+1}}}\right)$$

Bu vektör alanına ait grafikler Şekil 15 de verilmiştir.

[6] $\Delta = 2\sqrt{m^2+1}n_z\,h\,\upsilon^2 - n_z^2\,h^2$



(a) $n_z^{max} = (1, 4, 8)$,$\gamma_0 = -15.000, \upsilon = 36.000$

(b) $\frac{d\gamma^v}{dh} = -\infty$ ile oluşan γ salınımları

(c) çeşitli ilk koşullar

(d) FPA alanı γ^v

Şekil 15: sabit ivme n_z profili için FPA alanı

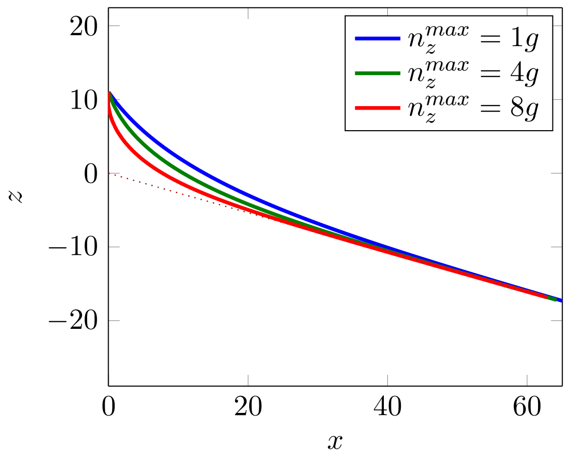
Lineer İvme Yörüngesi:

Bu vektör alanı yol tutma hatası ile artan ivme profili $n_z^{req} = K\,h$ için temel kinematik denklemin entegrasyonu ile elde edilmiştir[7]

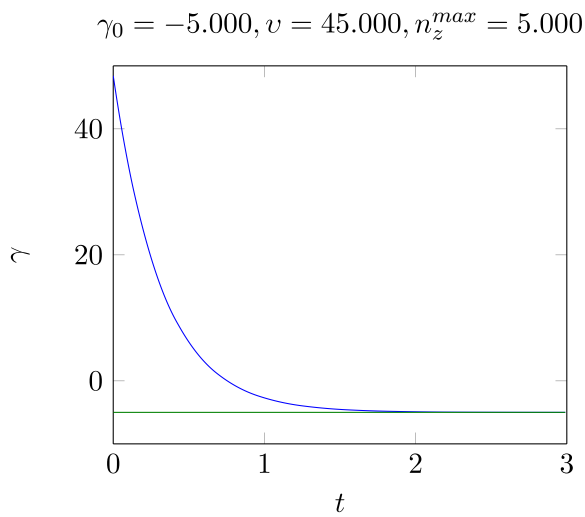
[7] $\Delta = -K^2h^4 + 4\,K\sqrt{m^2+1}\upsilon^2h^2$

$$\gamma\left(h\right)=\arctan\left(\frac{-\frac{1}{2}\,\frac{K\,m\,h^2-2\,\upsilon^2 m\sqrt{m^2+1}-\sigma\sqrt{\Delta}}{m^2+1}}{\frac{1}{2}\,\frac{\left(Kmh^2-2\,\upsilon^2 m\sqrt{m^2+1}-\sigma\sqrt{\Delta}\right)m}{m^2+1}+\frac{1}{2}\,\frac{-h^2K\sqrt{m^2+1}+2\,m^2\upsilon^2+2\,\upsilon^2}{\sqrt{m^2+1}}}\right)$$

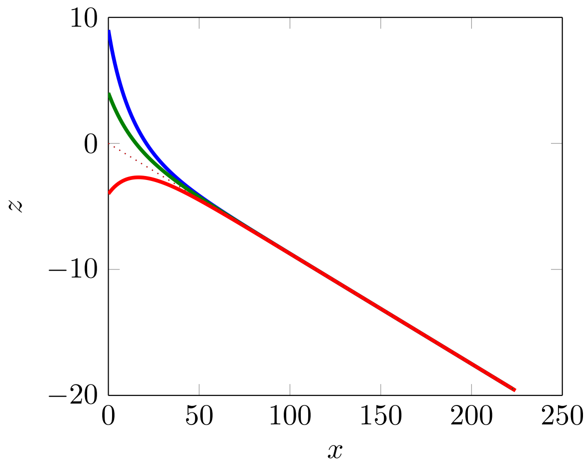
Bu vektör alanına ait grafikler Şekil 16 de verilmiştir.



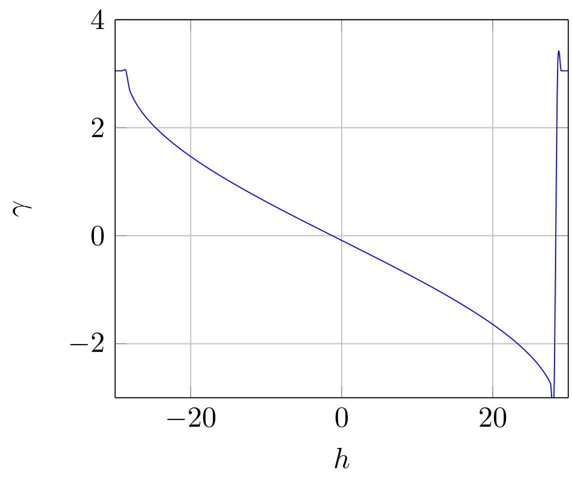
(a) çeşitli K için lineer n_z profilleri



(b) süzülme yolu açısıγ davranışı



(c) çeşitli ilk koşullar için rotalar



(d) süzülme açısı alanı γ^{υ}

Şekil 16: lineer ivme $n_z = Kh$ profili için FPA alanı

Üstel Palye "Exponential Flare":

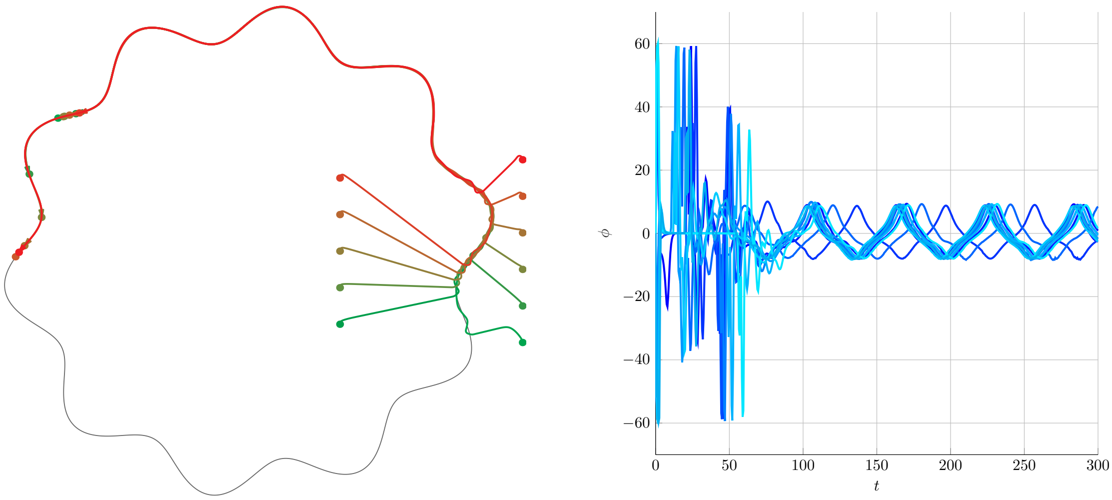
Üstel Palye ("Exponential flare") grafiği $h_x = -\lambda h$ ile ifade edilebilir. Eğer flare h_f irtifasında başlarsa, sağ ve sol eğimlerin palye başlangıcında tutması için gerekli şart $h_x|_{flare} = -\lambda h_f = \tan\gamma_0$ olarak verilir. Bu eşitlikten sönümleme katsayısı$\lambda = -h_f^{-1}\tan\gamma_0$ olarak belirlenir. Gerekli FPA komutu $\gamma_{cmd} = \arctan(h_x) = \arctan(-\lambda h) = \arctan\left(hh_f^{-1}\tan\gamma_0\right)$ olarak elde edilir. İvme kontrolcüsünün kullanılması durumunda, gerekli ivme komutu $n_z^{cmd} = \upsilon\dot{\gamma}_{cmd} = \upsilon h_f \dot{h}\tan\gamma_0\left(h_f^2 + h^2\tan^2\gamma_0\right)^{-1}$ ile hesaplanır.

Numerik En-Yakın Nokta

Parametrik bir eğrinin $\gamma(s)$ verilen bir $\mathbf{P}$ noktasına en yakın noktası, mesafe karesinin $L = \frac{1}{2}(\gamma(s) - \mathbf{P})\cdot(\gamma(s) - \mathbf{P})$ minimum olduğu noktaya karşılık gelmektedir. $\mathbf{P}$ noktasının sabit olduğu durumda ilk 2 türevi $L_{,s} = \gamma_{,s}\cdot(\gamma - \mathbf{P})$ ve $L_{,ss} = \gamma_{,ss}\cdot(\gamma - \mathbf{P}) + \gamma_{,s}\cdot\gamma_{,s}$ ile verilmektedir. Extremum noktayı tarif eden $L_{,s} = 0$ koşuluna ulaşmak için ayrık sönümleme koşulu 1. derece artım ile $\Delta L_{,s} = hL_{,ss} = -\lambda L_{,s}$ atılması gereken adım boyu $h = \lambda L_{,s}L_{,ss}^{-1} = -\lambda\gamma_{,s}\cdot(\gamma - \mathbf{P})(\gamma_{,ss}\cdot(\gamma - \mathbf{P}) + \gamma_{,s}\cdot\gamma_{,s})^{-1}$ olarak belirlenir. Noktanın hareketli olması durumunda, en yakın noktaya karşılık gelen s parametresi zamanın bir fonksiyonu olacaktır $s = s(t)$, bu durumda en yakın nokta koşulu her daim sağlanması beklenmektedir$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_{,s} = \gamma_{,ss}\dot{s}\cdot(\gamma - \mathbf{P}) + \gamma_{,s}\cdot\left(\gamma_{,s}\dot{s} - \dot{\mathbf{P}}\right) = 0$ diferansiyel ilişkisinden eğri parametre değişim hızı $\dot{s} = \frac{\gamma_{,s}\cdot\dot{\mathbf{P}}}{\gamma_{,ss}\cdot(\gamma-\mathbf{P})+\gamma_{,s}\cdot\gamma_{,s}}$ olarak hesaplanır.

Bu yaklaşımda, hava aracının eğriye konumuna göre en yakın yerel nokta yerine yerel en uzak noktaya yakınması muhtemeldir. Bu davranışın istenmediği durumlarda, en-dik-azalış ("steepest-descent") tekniği kullanılabilir $s \leftarrow s - \lambda L_{,s}$ veya normalize eğri parametre güncellemeleri isteniyorsa $s \leftarrow s - \lambda\frac{(\gamma-P)\cdot\gamma_{,s}}{|\gamma-P||\gamma_{,s}|}$ şeması kullanılabilir. Aşağıda yer alan şekillerde (17), en-dik-azalış tekniğiyle elde edilen dalgalı daire eğrisine [8]hava aracı rotaları verilmiştir. Hava aracı parametreleri $\upsilon = 15$,$\tau_\phi = 0.25$, $A = \frac{60\pi}{180}$ olarak seçilmiştir. Dış döngü kontrolünde P kontrol $(k_p = 2.2)$ $\dot{\chi}_{cmd} = k_p\delta\chi$ ve $\phi_{cmd} = \arctan\left(\upsilon\dot{\chi}_{cmd}/g\right)$ kullanılmıştır. Yatış açısı grafiğinde dalgalı daire eğrisi takibine karşılık gelen yatış açısı düzenine bütün rotaların faz farkıyla geldiği görülmektedir.

[8]Eğri $\gamma = (R + r\sin(\omega_2 t))\exp(\imath\omega_1 t)$ $R = 500, r = 100, \omega_1 = 1, \omega_2$ ile tanımlanmıştır



Şekil 17: dalgalı daire eğrisine çeşitli ilk konumlardan izlene yollar ve yatış açıları

SONUÇ

Bu makalede eğri teğeti ve eğriye dik (normal) yön gibi doğrudan geometri kavramları kullanarak vektör alanı tasarımları ve takip hatasını üstel sönümleme karakterinde azaltan vektör alan tasarım teknikleri sunulmuştur. Yanal seyrüseferde, teknikler hem enlem-boylam düzleminde hem 3 boyutta uygulanabilecek şekilde sunulmuş, iki uzay ((λ, φ) ve (X, Y, Z)) arasındaki ilişkiler sıralanmış ve böylece iki uzaydan avantajlı olanda çalışma olanağı sağlanmaya çalışılmıştır. Eğrilerin açık/kapalı ("explicit/parametric"/"implicit") gösterimiyle çalışılabileceği gösterilmiştir. Süzülme yolu takibi örneğinde, vektör alan tasarımında çeşitli kriterlerin tasarıma dahil edilebileceği gösterilmiştir.

Kararlık analizlerinde herhangi lineer olmayan etki (büyük açılar, değişim hızı limitleri, hız-yönelim etkileşim ("coupling") etkileri vs.) incelenmemiştir. Bu yüzden lineer kararlılık analizinin kararlı olarak işaret ettiği durumlarda, lineer olmayan benzetimin nötral kararlı veya kararsız davranışlar sergilemesi mümkündür. Ancak her halükarda, kararlılık analizleri, parametrelerin kararlılık üzerine etkilerini vermektedir. Böylece tasarımcının parametreleri nasıl seçeceği/değişitireceği üzerine fikir sahibi olması mümkündür. Gelecek çalışmalarda "tanımlayan-fonksiyon" ("describing function") analizi gibi tekniklerin kullanılması ile lineer olmayan etkilerinde kararlılık üzerine etkilerinin incelenmesi faydalı olacaktır.

Geliştirilen vektör alanların gerçek hayat uygulamalarında, iç döngüde iz açısı kontrolü kullanılmış, Bu sebeple rüzgarın etkileri incelenmeye ve/veya kompanse etmeye gerek görülmemiştir, ancak bozuntuların modellenmesi ve kararlılık açısından değerlendirilmesi yol takip sisteminin kalitesini arttıracağı değerlendirilmektedir..

Ön besleme (feed-forward) terimlerinin yol izleme performansını iyileştireceği basit deneylerle öngürülmüştür. Bu amaçla ilk etapta vektör alandan hesaplanan kavisin ("curvature") kullanılması uygun gözükmektedir.

Bu makalede açıklanan yol takip metotlarının pekçoğu TAI tarafından geliştirilmiş bir hedef uçakta uygulanıp hayata geçirilmiştir. Çalışma kapsamında yapılan varsayımların ve çeşitli yaklaşımların geçerli olduğu teyit edilmiştir.

Kaynaklar

Anastasios L., 2014. *Guidance and Path-Planning Systems for Autonomous Vehicles*, Norwegian University of Science and Technology

Chen, H., Chang, KuoChu ., Agate, Craig S. *Tracking with UAV using Tangent-plus-Lyapunov Vector Field Guidance* , 12th International Conference on Information Fusion Seattle

Cho, N., Kim Y., Park S. *Three-Dimensional Nonlinear Path-Following Guidance Law Based on Differential Geometry* , Proceedings 19th IFAC World Congress

Kapitanyuk Y. Marina, H.G. Proskurnikov, A., Cao M. *Guiding vector field algorithm for a moving path following problem* , Proceedings 20th IFAC World Congress

Liang, Y., Jia, Y., Du J. and Zhang J. *Vector Field Guidance for Three-Dimensional Curved Path Following with Fixed-Wing UAVs* , 2015 American Control Conference

Nelson, D. , Barber B., McLain T., and Beard R., 2005 *Vector Field Path Following for Miniature Air Vehicles*, IEEE Transactions on Robotics

Regina N., 2011. *New Target Tracking and Monitoring Guidance Laws for UAV*, Dipartimento di Elettronica, Informatica e Sistemistica Viale Risorgimento

Sujit,P.B. Saripalli, S., Sousa, J.B. 2013. *An Evaluation of UAV Path Following Algorithms* , 2013 European Control Conference (ECC) July 17-19, 2013, Zürich, Switzerland