

SIKIŞTIRILAMAZ SONUÇLARLA ÖN KOŞULLANDIRILAN BİR SIKIŞTIRILABİLİR NAVIER STOKES ÇÖZÜCÜSÜ VE BU KODLA YAPILAN OPTİMİZASYON ÇALIŞMALARI

Özgür Ekici¹
Hacettepe Üniversitesi Makina Mühendisliği
Bölümü, Ankara

Burak Pehlivan²
Ulaştırma ve Altyapı Bakanlığı, Havacılık ve
Uzay Teknolojileri Genel Müdürlüğü, Ankara

ÖZET

Bu bildiride, sıkıştırılamaz sonuçlarla ön koşullandırılan bir sıkıştırılabilir Navier Stokes çözücüsünün geliştirilmesi ve geliştirilen Navier Stokes çözücüsü temelinde yapılan optimizasyon çalışmalarına yer verilecektir. Geliştirilen çözücü, kapak güdümlü kavite problemine uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sıkıştırılamaz sonuçlarla ön koşullandırma neticesinde oluşan performans kazanımları ortaya konmuştur. Ek olarak, geliştirilen çözücü genetik algoritma kodu ile beraber kullanılarak optimizasyon çalışmaları yapılmıştır. Fluent gibi paket programlarla optimizasyon çalışması, değişkenlerin bir script dosyasında ortaya konmasını ve geliştirilen bir kod vasıtasıyla bu değişkenlerin okunmasını, birçok kez dosya ve uygulama açıp kapamayı gerektiren, hesaplama zamanı bakımından çoğu durumda verimli olmayan bir yöntemdir. Bu husus göz önüne alınarak, özgün olarak geliştirilen Navier Stokes çözücüsü kodun, optimizasyon kodlarıyla eşlenmesinin, oldukça pratik bir yaklaşım olduğu çalışma kapsamında ortaya konmuştur. Optimizasyon çalışması, çözüm değişkenlerinin yanısıra, doğrudan çözücü dinamiğine de yönlendirilerek, optimum relaksasyon parametrelerinin saptanmasında da kullanılmıştır. Relaksasyon parametreleri, genellikle literatürde bulunan birtakım tavsiyeler temelinde şekillendirilmekte olup, literatürde bunlara ilişkin yeterli sayıda optimizasyon çalışması bulunmamaktadır. Bunun yanında, termal optimizasyon uygulamaları geliştirilmiştir.

GİRİŞ

Navier Stokes denklemleri hız, basınç, yoğunluk ve sıcaklık (u , v , P , p , T) gibi akış özelliklerinin çözüm alanı içindeki değerlerini bulmak için kullanılan kısmi diferansiyel denklemlerdir. Çok sınırlı bazı durumlar dışında analitik çözümü bulunamayan bu denklemlerin çözümünde sıklıkla kullanılan bir yaklaşım, çözüm bölgesini küçük hücrelere bölen ve hücre sınırlarında akı değerlerinin hesaplanmasına dayanan sonlu hacim yaklaşımıdır.

Sıkıştırılabilir akış çözümleri, ek fiziksel parametrelerin (yoğunluk, sıcaklık, enerji vb.) hesaplanmasını da beraberinde getirdiğinden genellikle hesaplama maliyeti sıkıştırılamaz akışlara göre yüksek olmaktadır. Öte yandan, yanma odası çözümleri gibi akış hızı düşük olsa dahi sıcaklık etkilerinin büyük olduğu problemlerde, sıkıştırılabilir akış çözümlerine ihtiyaç duyulmaktadır.

Navier Stokes denklemlerinin çözümünde kademeli çözümler ve ön koşullandırma kullanımı yaygındır. Örneğin, yoğunluk temelli çözümler, Mach sayısının düşük, enerji etkilerinin yüksek olduğu akışlar için önemli stabilite sorunları yaşadığından ön koşullandırmaya tabi tutulmaktadır. Turkel vd. (1993), yoğunluk temelli çözümler için ön koşullandırma çalışması yaparak, çözücüye stabilite kazandıran bir matris çarpım formülasyonu geliştirmiştir. Benzer şekilde, Choi ve Merckle (1991), basınç ve yoğunluk terimlerini sıcaklık cinsinden yazarak öncelikle temel denklemleri sıcaklık cinsine dönüştürmüş, elde edilen yeni denklem seti üzerinde yeni bir ön koşullandırma matrisi kullanmıştır.

¹ Yrd. Doç. Dr., Makina Mühendisliği Bölümü, E-posta: ozgur.ekici@hacettepe.edu.tr

² Havacılık ve Uzay Teknolojileri Uzman Yardımcısı, UAB HUTGM, E-posta: burak.pehlivan@udhb.gov.tr

Optimizasyon içeren çalışmalarda da kademeli bir çözüm yaklaşımı uygulanabilmektedir. Bu yaklaşımda, çözümler öncelikle viskoz olmayan durumda gerçekleştirilmekte, daha sonra potansiyel optimum çözümler belirlenerek bunlar üzerinde, viskoz Navier Stokes denklemlerinin çözümü yapılmaktadır. Özellikle hesaplamalı aerodinamikte, uçak kanadına yönelik optimizasyon çalışmalarında bu yaklaşım kullanılmaktadır. Nastase (2008), bu uygulamayı detaylı şekilde ele almaktadır.

Bu çalışmada, sıkıştırılabilir Navier Stokes denklemlerinin çözümüne yönelik olarak, sonlu hacimler yöntemiyle, SIMPLE algoritması kullanan basınç temelli bir çözücü geliştirilmiştir. Çözümü hızlandırmak için, sıkıştırılamaz akış çözümüyle ön koşullandırma yapılmıştır. Mevcut çalışmada, sıkıştırılamaz akış çözümüyle elde edilen değerlerin, sıkıştırılabilir akış altında ön değer olarak otomatik şekilde kullanılması, böylece akış çözümünün hızlandırılması yöntemi ele alınmıştır. Ayrıca, geliştirilen çözücü kullanılarak çeşitli optimizasyon çalışmaları yapılmıştır.

ÇÖZÜLEN DENKLEMLER VE YÖNTEM

Nümerik olarak çözülen denklemlere aşağıda yer verilmektedir. Burada su,sv,sT terimleri kaynak terimleridir. Sıkıştırılabilir Navier Stokes denklemlerinin çözümüne, yüksek hızlı akışların yanı sıra, çözüm bölgesinde yüksek sıcaklıkların ve sıcaklık gradyanlarının olduğu yanma tipi problemlerde de ihtiyaç duyulmaktadır. Aşağıda yer alan 5 denklem, eş zamanlı olarak çözülmektedir.

Süreklilik: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$	u-momentum: $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + s_u$
Enerji: $\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + s_T$	v-momentum: $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + s_v$
Hal denklemi: $\rho = \frac{P}{RT}$	

Çözüm adımları aşağıda verilmiştir.

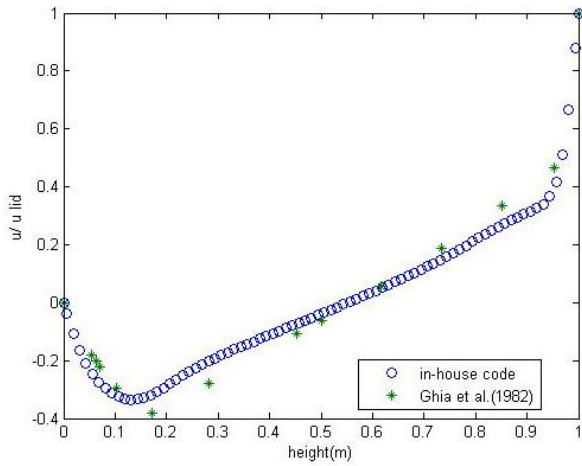
- Adım 1: Sıkıştırılamaz akış denklemlerini yüksek bir hata sınırı ile/ kısıtlı bir süreye kadar zaman integrasyonu ile çözerek, u,v,P'yi elde et
- Adım 2: Adım 1'de elde edilen değerleri, sıkıştırılabilir akış çözümünde otomatik olarak girdi olarak kullan
- Adım 3: Hata toleransının altına erişildiğinde çözümü sonlandır
- Adım 4: Grafik oluştur

ÇEŞİTLİ ÇÖZÜMLER

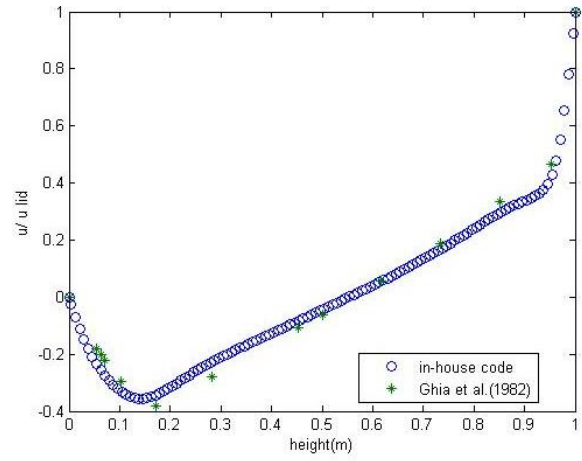
Kapak Güdümlü Kavite Çözümleri

A. Sıkıştırılamaz Akış- Sıralı Dizilimli Ağ

Kapak güdümlü kavite probleminin sıkıştırılamaz akış altındaki çözümüne yönelik literatürde pek çok çözüm bulunmaktadır. Denektaş (benchmark) çözümlerden biri olarak kabul edilen çalışmada Ghia vd. (1982), 256x256 boyutundaki bir ağ için kapak güdümlü kavite probleminin sıkıştırılamaz akış altındaki çözümlerine yer vermektedir. Sıkıştırılamaz akış için yapılan çözümlerle, literatürdeki çözümler, Şekil 1 ve Şekil 2'de aşağıda kıyaslanmıştır.



Şekil 1. Sıkıştırılabilir akış, u hızının değişimi, $Re=1000$, $dx=1/80$, $dy=1/80$



Şekil 2. Sıkıştırılabilir akış, u hızının değişimi, $Re=1000$, $dx=1/120$, $dy=1/120$

B. Sıkıştırılabilir Akış- Sıralı Diziliimli Ağ

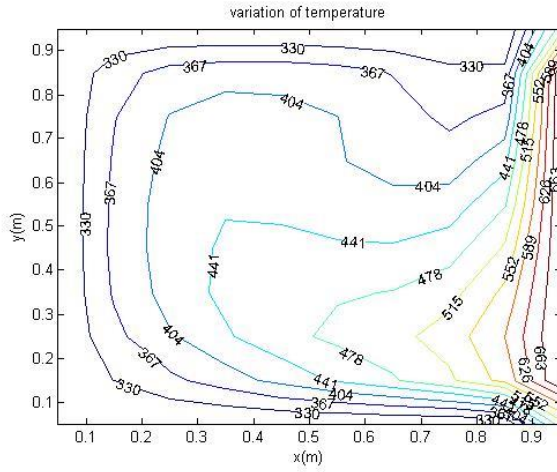
Sıkıştırılabilir akış altında kapak güdümlü kavite akışına ilişkin literatürde çeşitli çalışmalar mevcuttur. Shah vd. (2007), eşit duvar sıcaklıklarına sahip ve karşılıklı iki sınırdaki akış olan bir konfigürasyon için sıkıştırılabilir çözüm geliştirmiştir. Hussain (2016), duvarların hepsinin eş sıcaklığa sahip olduğu durum için farklı sıcaklıklarda çözümler geliştirmiştir. Diğer yandan duvarların farklı sıcaklıklarda olduğu durum için literatürde kıyaslama amaçlı kullanılabilecek sıkıştırılabilir kapak güdümlü kavite akışı çözümüne rastlanmamıştır.

Farklı duvar sıcaklıkları tanımlanarak, enerji denklemini de içeren sıkıştırılabilir akış altındaki kapak güdümlü kavite probleminin sıkıştırılabilir Navier Stokes çözümleri geliştirilmiştir. Sağ duvarın 700 K, diğer sınırların ise 293 K'de olduğu bir durum için farklı ağ yoğunluklarında sıcaklık ve yoğunluk dağılımları aşağıdaki şekillerde verilmektedir.

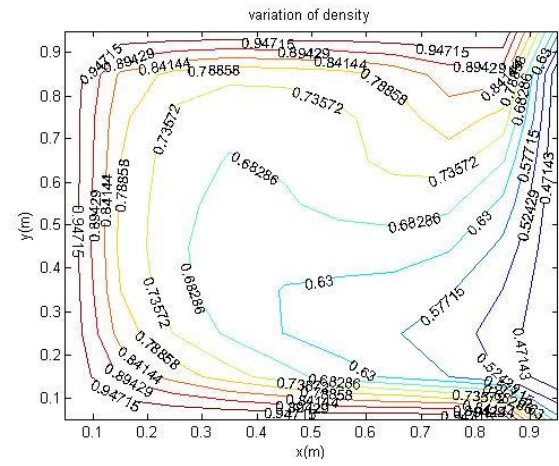
Çalışma kapsamında, salt sıkıştırılabilir kod ile sıkıştırılabilir çözümle ön koşullandırma yapılmış sıkıştırılabilir kod hesaplama zamanları bakımından çeşitli Reynolds sayılarında kıyaslanmıştır. Reynolds sayısı 400 için yapılan örnek çözümlerde, 6 saniye zamansal integrasyon sonunda artık değer 10^{-5} 'in oldukça altına inmiştir. Bu durumda, tamamen sıkıştırılabilir kodun 6 saniye zamansal integrasyonu 60 saniyede tamamladığı görülmüştür. Sıkıştırılabilir çözücünün 3 saniye, sıkıştırılabilir çözücünün takip eden 3 saniye zamansal integrasyon gerçekleştirdiği durumda ise çözümün 42 saniyede tamamlandığı gözlemlenmiştir. Bu ise ilk çözüme kıyasla yaklaşık %30 hesaplama zamanı tasarrufu anlamına gelmektedir.

Aşağıdaki şekillerden görüldüğü üzere, sıcaklık ve yoğunluk dağılımı girdap şeklini alan karmaşık bir yapıdadır. Ağ yoğunluğunun artması çözünürlüğü artırarak eş sıcaklık ve eş yoğunluk çizgilerini daha yumuşak bir hale getirmektedir.

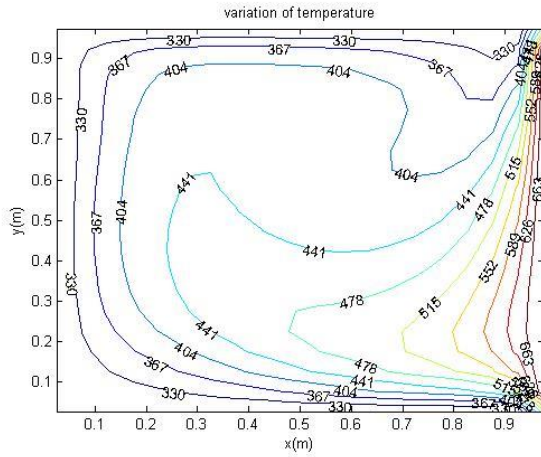
Momentum ve enerji denklemlerinde konvektif akılar birinci dereceden upwind yöntemiyle hesaplanmıştır. Yoğunluk terimlerinin hesabı için de upwinding kullanılmıştır. Yoğunluk, sıcaklık alanı enerji denklemleriyle elde edildikten ve basınç SIMPLE prosedürüyle elde edildikten sonra hal denklemleriyle hesaplanmıştır. Hal denkleminin çözümü için bir referans basınç değeri ($P=P_{ref}+P_{SIMPLE}$) kullanılmıştır. Benzer bir referans basınç yaklaşımı, ticari hesaplamalı akışkanlar dinamiği yazılımı Fluent tarafından da kullanılmaktadır. Sıkıştırılabilir akış çözümleri, sıkıştırılabilir akış çözümlerine kıyasla aynı ağ yoğunluğunda yaklaşık %60 daha fazla zaman almaktadır.



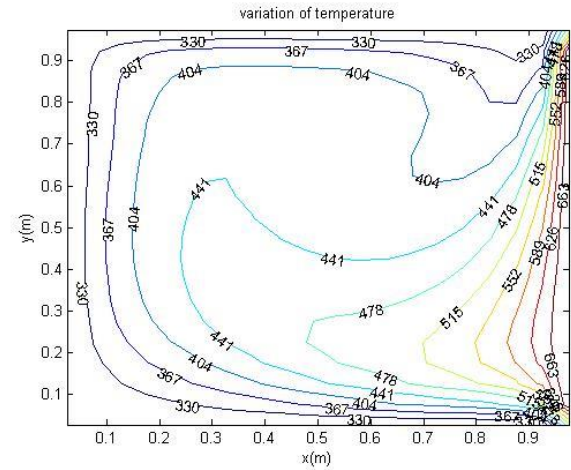
Şekil 3. Sıkıştırılabilir akış, sıcaklığın dağılımı, Referans Reynolds sayısı=400, $dx=dy=1/10$



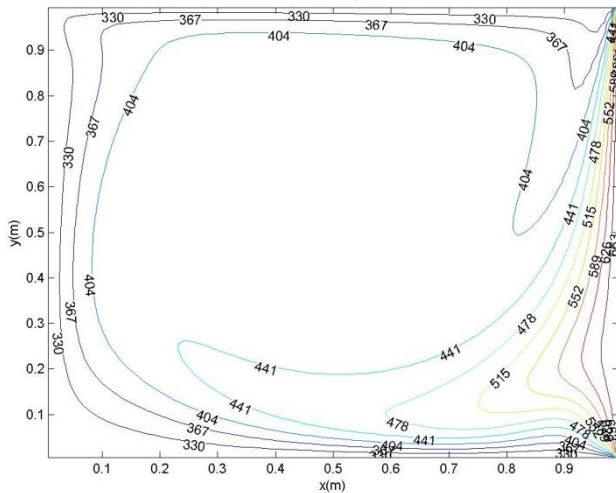
Şekil 4.. Sıkıştırılabilir akış, yoğunluğun dağılımı, Referans Reynolds sayısı=400 $dx=dy=1/10$



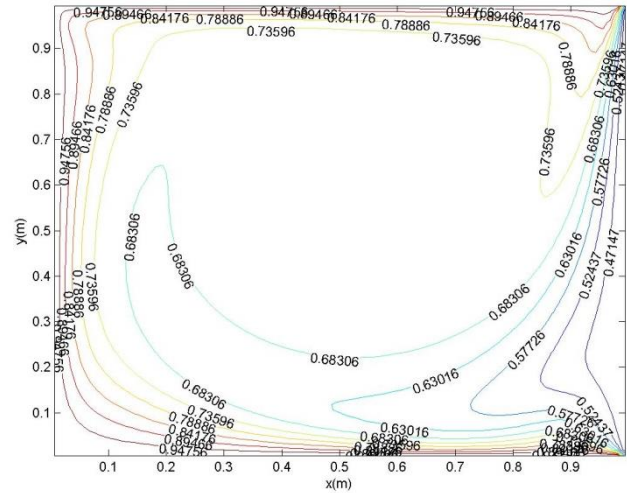
Şekil 5.. Sıkıştırılabilir akış, sıcaklığın dağılımı, Referans Reynolds sayısı=400, $dx=dy=1/20$



Şekil 6. Sıkıştırılabilir akış, yoğunluğun dağılımı, Referans Reynolds sayısı=400, $dx=dy=1/20$



Şekil 7. Sıkıştırılabilir akış, sıcaklığın dağılımı, Referans Reynolds sayısı=1000, $dx=dy=1/80$



Şekil 8. Sıkıştırılabilir akış, yoğunluğun dağılımı, Referans Reynolds sayısı=1000, $dx=dy=1/80$

C. Optimizasyon Çalışmaları

Akış çözücülerile optimizasyon kodlarının kullanımı hesaplamalı aerodinamikte airfoil tasarımında başlamıştır. Optimizasyon prosedürlerinin kullanımı daha sonra diğer akış problemlerine de uygulanır hale gelmiştir. Akış problemlerinde optimizasyon için temelde iki farklı optimizasyon seçeneği mevcuttur: gradyen temelli ve evrimsel optimizasyon. Evrimsel optimizasyon yaklaşımları hesaplama zamanı gereklilikleri bakımından daha maliyetli olmakla birlikte, yerel bir minimuma takılma olasılıkları daha düşüktür. Evrimsel optimizasyon kategorisi altında yer alan genetik algoritma, sıklıkla başvurulmuş verimli bir optimizasyon algoritmasıdır. Genetik algoritma teorisine Goldberg (1989) ayrıntılı olarak yer vermektedir.

Bu kısımda, geliştirilen Navier Stokes çözücüsü ile yapılan örnek Navier Stokes çözümlerine yer verilmektedir.

1) Çözücü Parametrelerinin Optimizasyonu

Çözücü parametrelerinin kendisi optimizasyona tabi tutulmuştur. Çözümü hızlandırmak için 12 x 12'lik eş yerleşimli küçük bir ağ kullanılmıştır. Çözüm, $Re=100$ için yapılmıştır.

Tablo 1. Çözücü Parametrelerinin Optimizasyonu

Optimizasyon parametreleri:	Genetik algoritma için kullanılan parametreler:
Momentum iterasyon aralığı : (1,12)	Jenerasyon büyüklüğü:10
Basınç düzeltme iterasyon aralığı: (1,12)	Toplam jenerasyon sayısı: 20
Basınç için relaksasyon parametresi: (0.5-0.9)	Hedef fonksiyonu: Hesaplama zamanı*10
Momentum denklemleri için relaksasyon parametreleri: (0.5-0.9)	(Sonuçların arasındaki farkı artırarak optimizasyonu hızlandırmak için 10 çarpanı kullanılmıştır)

Optimizasyon sonucu bulunan ve asgari hesaplama zamanını da içeren sonuçlara aşağıda yer verilmektedir.

Tablo 2. Çözücü Optimizasyonu İçin Sonuçlar

Optimizasyon Bireyleri				Sonuçlar (Hesaplama süresi, saniye)
İterasyon _{momentum}	İterasyon _{basınç}	α_p	α_u, α_v	
5	8	0.9	0.9	2.1
9	10	0.9	0.9	2.4
8	10	0.9	0.9	2.3

Kıyaslama olarak, iterasyon_{momentum}=1; iterasyon_{basınç}=1; $\alpha_p = \alpha_u = \alpha_v = 0.5$ kullanımı, 4.7 saniye hesaplama süresine ihtiyaç duymaktadır. Optimize edilmiş çözücü parametreleri, orijinal değerlerden %44 daha düşük hesaplama zamanı sağlamaktadır.

2) Isı Kuyusu Lokasyonu ve Duvar Sıcaklıklarının Optimizasyonu

Belirli bir hedef orta nokta sıcaklığı için ısı kuyusu, kapak hızı, sol, sağ ve üst duvar sıcaklıkları optimizasyon değişkenleri olarak alınarak çözüm gerçekleştirilmiştir. Değişken sayısının nispeten fazla ve değişkenlerin birbirinden bağımsız olması nedeniyle problem genetik algoritma kullanmaya uygundur.

Optimizasyon çalışmasında hesaplama süresini asgaride tutabilmek için 10x10 büyüklüğünde kartezyen ve dizili yerleşimli bir ağ seçilmiştir.

Hedef fonksiyonu, orta nokta sıcaklığının 280 Kelvin olması amaçlanarak belirlenmiştir.

Hedef fonksiyonu= mutlak değer($T_{mid}-280$),

Optimizasyon değişkenleri için kullanılan parametreler aşağıdaki şekildedir:

$T_{üst}$ duvar/kapak: 200-300 K

T_{sol} duvar: 200-300 K

$T_{sağ}$ duvar: 200-300 K

Kapak hızı: 0-12 m/s

Isı kuyusunun x lokasyonu: 9-9 (sağ duvarın bitişiğindeki düğüm)

Isı kuyusunun y lokasyonu: 2-9 (İç düğümler)

Isı kuyusu : -0.01 W/m^2

Optimizasyon sonucunda aşağıdaki değerler elde edilmiştir.

Tablo 3. Termal optimizasyon için sonuçlar

$T_{üstduvar}$	Kapak hızı	$T_{solduvar}$	$T_{sağduvar}$	Isı kuyusunun x lokasyonu	Isı kuyusunun y lokasyonu
242 K	7 m/s	266 K	263 K	9	3

Hesaplanan hedef fonksiyon değeri 0.0204 olarak gerçekleşmiştir. Isı kuyusunun ideal yeri sağ alt köşeye yakın çıkmaktadır.

SONUÇ

Basınç temelli Navier Stokes çözücüsü geliştirilerek optimizasyon ve akış problemlerinin çözümü amacıyla kullanılmıştır. Farklı ağ yoğunlukları ve Reynolds sayılarında çözümler yapılarak çözücünün stabilite davranışı incelenmiştir. Geliştirilen çözücüyle çeşitli optimizasyon çalışmaları yapılmıştır. Genetik algoritma kodu, doğrudan çözücü ayarlarının kendisi üzerinde kullanılmış, çözüm zamanı hedef fonksiyon olarak alınmıştır. Optimizasyon sonucunda, çözüm zamanında %44 iyileştirme sağlanmıştır. İleride, geliştirilen çözücü farklı termal değişiklik de içeren farklı sıkıştırılabilir akış problemlerine (ani genişleme akışı, lüle akışı vb.) uygulanacaktır. Ayrıca, sıkıştırılamaz akışla ön koşullandırmayı sistematik hale getirmek için çözüm süreleri üzerinde optimizasyon çalışmaları yapılması planlanmaktadır.

Kaynaklar:

- 1) Choi, Y. H., Merkle, C. L. (1993): The application of preconditioning in viscous flows, Journal of Computational Physics (ISSN 0021-9991); 105; 2; p. 207-223.
- 2) Ghia, U., Ghia, K. N., and Shin, C. T. (1982): High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, Journal of Computational Physics, Vol. 48, pp. 387-411.
- 3) Goldberg, D. E. (1989): Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning.
- 4) Hussain, (2016) A Numerical Study of Compressible Lid Driven Cavity Flow with a Moving Boundary, MSc Thesis, Jawaharlal Nehru Technological University.
- 5) Nastase, A. (2008): Computation of Supersonic Flow over Flying Configurations, First edition, Great Britain: Elsevier

- 6) Rhie, C. M. and Chow, W. L. (1983): Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, AIAA Journal, vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.
- 7) Shah, P., Rovagnati, B., Mashayek, F. Jacobs, G.B. (2007): Subsonic compressible flow in two-sided lid-driven cavity. Part I: Equal walls temperatures, International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 50, Issues 21–22, Pages 4206-4218.
- 8) Turkel, E., Fiterman, E., Leer, B. V. (1993): Preconditioning And The Limit To The Incompressible Flow Equations, NASA Langley Research Center Report.