

ASKI DURUŞUNDAKİ ÇIRPAN KANATLININ AERODİNAMİK KARARLILIK ANALİZİNİN DURUM UZAYIYLA İNCELENMESİ

Ülgen Gülçat¹
İTÜ, İstanbul

ÖZET

Çırpın kanatlı mikro hava araçlarının (MHA) kanat çırpma ile sağladığı askı uçuşunda daimi olmayan aerodinamik yardımıyla hızlı kararlılık analizi için bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemle, çırpın kanadın yunuslama açısı ve bu açının hızının yarattığı aerodinamik yüklemelerle uçuş dinamiği parametrelerinin etkileşimli çözümü yunuslama hareketi için yapılmaktadır. Yunuslamada yer alan uçuş dinamiği değişkenleri, durum uzayında yazılmış olan aerodinamik yüklemelerle birleştirildiğinde, ortaya kararlılık türev matrisiyle ifade edilen yer değiştirmeler ve onların hızlarıyla ilgili bir sistem çıkmaktadır. Bu sistem, gövdenin ağırlık merkezinin yatay ve düşey hız bileşenleri ile gövdenin yunuslama açısının değişimini ve hızını, yunuslamaya bağlı durum uzayı değişkenleri ile eş zamanlı olarak etkileştirmektedir. Uygulaması ise sirke sineğinin askı duruşunun yunuslama kararlılığı için yapılmıştır. Uygulama sonunda, simetrik kanat çırpma durumunda 'trim' (düzeltme) yapılmasının ancak sıfır çözümle mümkün olduğu, asimetrik kanat çırpmanın ise 'trim' e uygun olduğu görülmüştür. Bu da uygulamanın literatürle uyumlu olduğunu göstermektedir.

GİRİŞ

Son yıllarda kanat çırpın MHA larla ilgili çalışmalar yoğunluk kazanmıştır. Bunun nedeni, sabit kanatlı motorlulara oranla uygulamada, çırpın kanadın daha sessiz ve verimli olmasıdır. Günümüz uygulamalarında daimi olmayan aerodinamik kuvvet ve momentin hesaplamalarında deneysel ve sayısal metotlar uzun zaman almaktadır. Öte yandan, gerçek zaman uygulamalarında hızlı alınan sonuçlar sayesinde uçuş dinamiği ve kontrolünde kullanılabilirlik önem kazanmaktadır. Daimi olmayan aerodinamik uygulamalarında durum uzayı kullanımı çırpın kanat için taşıma ve moment katsayılarının hızla hesaplanmalarını sağlamaktadır. Durum değişkeni ya formal olarak tanımlanmakta ya da fiziksel anlamı olan bir büyüklüğe, akım ayrılma noktası gibi, dayandırılmaktadır [Goman and Khrabrov, 1994], [Gulcat, 2011 ve 2016] ve son yıllarda [Uhlir and Selig, 2017]. Bu değişkenin zamana bağlı değişimi birinci mertebe bir adi diferansiyel denklemin sayısal çözümü ile elde edilmektedir ve açıklık yönünde şekil değiştiren kanatlara da uygulamaları vardır [Reich et.al., 2011] ve [Izraelevitz et.al., 2017]. Formal yaklaşımda ise, birim hareket miktarına cevap olarak verilen aerodinamik büyüklük fonksiyonunun, Wagner fonksiyonu, Duhamel integrali içerisinde kullanılmakta [Taha et.al, 2014] ve [Gulcat, 2017] ya da Laplace dönüşümü yapılmaktadır [Leishman, 2000]. Birim cevap fonksiyonu indirgenmiş zaman cinsinden ince profil ve sonlu kanatlar için [Bisplinghoff, et.al, 1996] de verilmektedir.

Bu çalışmada Wagner fonksiyonu, kanadın öne arkaya hareketi sırasında değişen hücum açılarında gövdenin askı halindeki kararlılığını sağlamada kullanılmaktadır. Kanat hareketiyle bu harekete kanadın cevabı arasındaki faz farkı otomatik olarak Wagner fonksiyonu ile verilmektedir. Bu uygulamada indirgenmiş zaman sabit serbest akım hızıyla değil periyodik olarak değişmektedir ve

¹ Prof. Dr., Uçak Müh. Böl., E-posta: gulcat@itu.edu.tr

bu nedenle Wagner fonksiyonunun üstselleri harmonik değişen serbest akım değerlerini değişken olarak almaktadır. Problemin, kanat çırpma nedeniyle, zamana bağlı olarak değişen aerodinamiği hızlı bir şekilde çözülebilir ve gövde hareket denklemleri ile etkileşerek ortak çözüm verebilir hale gelmektedir.

Gövde ağırlık merkezine etkiyen toplam kuvvetler ve yunuslama momentiyle yazılan denge denklemleri stabilize türevleriyle ifade edilen doğrusal olmayan bir matris denklem sistemine dönüştürülmüştür. Tüm hareket miktarları dengeden küçük sapmalarla ifade edildiğinden bu sapmaları sıfırlamak için gerek şartlar sayesinde kararlı askı hareketi ve 'trim' koşulları [Taha et.al, 2014] ve [Mouy et.al., 2017] den yararlanılarak sonlu kanat için çıkartılmıştır. Çalışmanın uygulaması sirke sineğinin, drosophila, askı uçuşunun 'trim' edilmesine [Berman and Wang, 2007] ve [Taha et.al, 2014] dan alınan veriler kullanılarak başarıyla yapılmıştır. Matris sistemi 6x6 olup zamana bağlı değişkenler, gövdenin yatay ve düşey hız bileşenleri, yunuslama açısı ve bu açıların hızları ile kanadın yunuslama ve yunuslama hızına bağlı aerodinamik yüklerinin durum uzayındaki değerleridir. Bu bağlamda, uçuş dinamiği ve etkileşimli aerodinamik yüklerden oluşan dinamik sistem çalışmanın yöntemi ve uygulaması kısmında ayrıntılarıyla anlatılacaktır.

YÖNTEM ve UYGULAMALAR

İnce bir kanat kesitine rastgele olan hareketi nedeniyle etkiyen kesit taşıma kuvveti ve momentin Wagner fonksiyonu ile ifadesi aşağıda verilmektedir [Bisplinghoff, et.al, 1996].

$$l(s) = \rho U^2 b C_l(s) = \rho b^2 \pi (\ddot{h} + U\dot{\alpha}) - 2\rho U b \pi \left[w(b/2, s) \Phi(0) + \int_0^s w(b/2, \sigma) \frac{d\Phi(s-\sigma)}{d\sigma} d\sigma \right], \quad (1)$$

ve

$$M(s) = \rho U^2 b^2 C_m(s) = -\frac{\rho b^3 \pi}{2} (b\ddot{\alpha}/4 + U\dot{\alpha}) - \rho U b^2 \pi \left[w(b/2, s) \Phi(0) + \int_0^s w(b/2, \sigma) \frac{d\Phi(s-\sigma)}{d\sigma} d\sigma \right] \quad (2)$$

Burada, b yarım veteri, $w(b/2, s)$ üç çeyrek veter noktasındaki düşey hız bileşenini ve $\Phi(s) = 1 - a_1 e^{-b_1 s} - a_2 e^{-b_2 s}$ ise iki boyutlu Wagner fonksiyonunu göstermektedir. Değişken serbest

akım halinde indirgenmiş hız $s = \frac{1}{b} \int_0^t U(\tau) d\tau$, sabit serbest akım da ise $s = Ut/b$.

Yunuslama ve düşey hareket içi kanat kesitinin denklemi $z_a(x, t) = -h(t) - \alpha(t)(x - a)$ olurken düşey hız ise

$$w(b/2, t) = \frac{\partial z_a}{\partial t} + U \frac{\partial z_a}{\partial x} = -\dot{h}(t) - \dot{\alpha}(t)[b/2 - a] - U\alpha(t) \quad (3)$$

olur. Burada, a yunuslama noktasının koordinatıdır.

Bu durumda kanat kesitinin yarattığı sanki daimi sirkülasyon aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\Gamma_{qs}(t) = bU(t)C_{ls}(\alpha(t)) + \pi b(b/2 - a)\dot{\alpha}(t) + \pi b\dot{h}(t) \quad (4)$$

Burda, C_{ls} yüksek hücum açılarında hücum kenarı girdabının da etkilerini içeren kesit taşıma katsayısını göstermekte olup (3) denkelemindeki konvektif terimin yerini almaktadır. Denklem (3) ve (4) karşılaştırıldığında $b/2$ deki düşey hız ve sirkülasyon arasındaki ilişki

$$w(b/2, t) = -\Gamma_{qs}(t) / \pi b \quad (5)$$

Şeklinde yazılır. Denklem (5) i, (1) ve (2) de kullanırsak kesit taşıma ve moment için

$$l(s) = \rho U^2 b C_l(s) = \rho \pi b^2 (\ddot{h} + U\dot{\alpha}) + 2\rho U \left[\Gamma_{qs}(s) \Phi(0) + \int_0^s \Gamma_{qs}(\sigma) \frac{d\Phi(s-\sigma)}{d\sigma} d\sigma \right] \quad (6)$$

ve

$$M(s) = \rho U^2 b^2 C_m(s) = -\frac{\rho b^3 \pi}{2} (b\ddot{\alpha}/4 + U\dot{\alpha}) + \rho U b \left[\Gamma_{qs}(s) \Phi(0) + \int_0^s \Gamma_{qs}(\sigma) \frac{d\Phi(s-\sigma)}{d\sigma} d\sigma \right] \quad (7)$$

bulunur. Değişken serbest akım hızında Wagner fonksiyonun türevi

$$\frac{d\Phi(t-\tau)}{d\tau} = -a_i \frac{b_i}{b} U(\tau) e^{-\frac{b_i}{b} \int_{\tau}^t U(\varsigma) d\tau}, \quad i=1,2 \quad (8)$$

olup, denklem (8) ile zamana bağlı sirkülasyon

$$\Gamma_c(t) = (1 - a_1 - a_2) \Gamma_{qs}(t) + x_i(t) \quad (9)$$

olur ki,

$$x_i(t) = \int_0^t \Gamma_{qs}(\tau) a_i \frac{b_i}{b} U(\tau) e^{-\frac{b_i}{b} \int_{\tau}^t U(\varsigma) d\tau} d\tau$$

şeklinde verilir. Leibnitz kuralı kullanarak t ye göre türetildiğinde bu denklem

$$\dot{x}_i(t) = \frac{b_i}{b} U(t) (-x_i(t) + a_i \Gamma_{qs}(t)), \quad i = 1,2 \quad (10)$$

Halini alır. Burda, $x_i = x_i(t)$ zamana bağlı taşımayı yaratan durum uzayı değişkeni olup Denklem (10) nun $x_i(0)=0$ başlangıç şartlarıyla çözümü ile bulunur. Bu durumda sirkülasyon

$$l_c(t) = \rho U(t) [(1 - a_1 - a_2) \Gamma_{qs}(t) + x_1(t) + x_2(t)] \quad (11)$$

olur. Sirkülasyonsuz taşıma ise ivme teriminden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$l_{nc}(t) = -\pi \rho b^2 a_z(t) \cos \eta(t) \quad (12)$$

Burda , $a_z(t)$ düşey ivme ve $\eta(t)$ ise yunuslama açısıdır. Burda ivmeyi yaratan i) serbest akım hız değişimi $-r\ddot{\phi} \sin \eta$, ve ii) hücum açısı değişimi $-r\dot{\phi}\dot{\eta} \cos \eta$ gibi iki terim toplam düşey ivmeyi $a_z = -(r\ddot{\phi} \sin \eta + r\dot{\phi}\dot{\eta} \cos \eta)$ olarak verir. Denklem (11) ve (12) den toplam taşıma katsayısı

$$C_l(t) = \frac{l_c(t) + l_{nc}(t)}{\rho U_m^2 b_m} \quad (13)$$

Burada, U_m orta açıklıktaki maksimum serbest akım hızı ve b_m ise orta açıklıktaki yarım veter boyudur. Açıklık oranı belirli olan dikdörtgen kanat kabulüyle sirke sineğinin askı duruşu için yapılan çözümler [Gulcat, 2017] de verilmiştir. Burada açıklık oranı 3 olan ve çırpın eliptik kanat için zamana bağlı aerodinamik yükleri (Şekil 1) deki sonlu kanat için hesaplanacaktır.

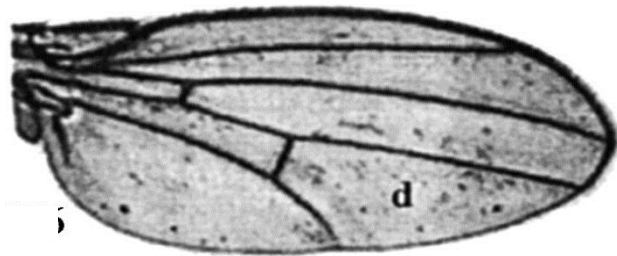


Figure 1: Sirke sineğinin kanadı. (Boyutlar: gövde kök: arası: 0.20mm, açıklık: 2.02mm, orta veter: 0.86mm, S=1.36mm²)

(www.google.com.tr/search?q=shape+of+the+fruit+fly+wing)

Sonlu kanat: Açıklık oranı 3 olan eliptik kanatlar için Wagner fonksiyonu [Bisplinghoff, et al, 1996] da $\Phi_w(s) = 0.6 - 0.17e^{-0.54s}$ olarak verilmektedir. Denklem (11) ve (12) ile verilen kesit taşıma katsayıları açıklık boyunca integrale edildiğinde sonlu kanat için

$$\int_{r_1}^{r_1+R} (l_c(t) + l_{nc}(t)) dr = \rho \int_{r_1}^{r_1+R} \left\{ U(\tau) \left[(0.6 - 0.17) \Gamma_{qs}(t) + x_1(t) + x_2(t) \right] - \pi \rho b^2 a_z(t) \cos \eta(t) \right\} dr \quad (14)$$

olur. Denklem (14) ün sağ tarafında yer alan integral içi $U(\tau) = \dot{\phi} r$ alındığında 3 parçadan oluşmaktadır: i)) yunuslama ve yunuslama hızlarına bağlı sirkülasyonlu iki terim ve ii) sirkülasyona bağlı olmayan terim. ca non circulatory term. Böylece, integral sonuçları

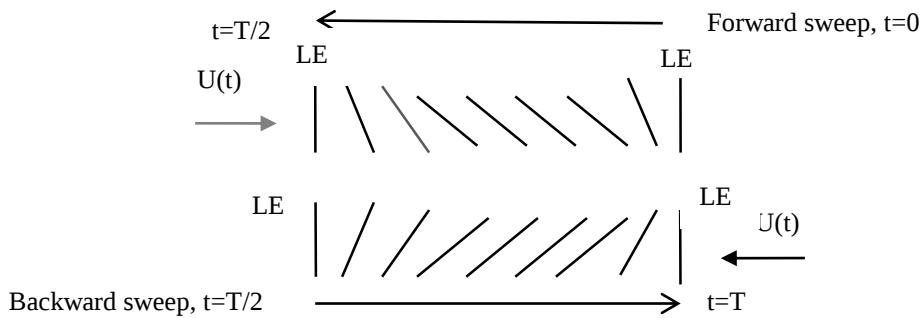
$$\text{Yunuslama:} \quad l_{cp}(t) = \rho I_2 \dot{\phi} [0.43 C_L(\alpha, t) + x_1(t)], \quad I_2 = \int_{r_1}^{r_1+R} r^2 b dr$$

$$\text{Yunuslama hızı:} \quad l_{cpr}(t) = \rho I_1 \dot{\phi} [0.43 \pi \dot{\alpha}(t) / 2 + x_2(t)], \quad I_1 = \int_{r_1}^{r_1+R} r b^2 dr$$

$$\text{Burada,} \quad \dot{x}_1(t) = \frac{b_1 \bar{r} \dot{\phi}(t)}{\bar{b}} [-x_1(t) + 0.17 \dot{\phi}(t) C_L(\alpha, t)] \quad \text{ve} \quad \dot{x}_2(t) = \frac{b_1 \bar{r} \dot{\phi}(t)}{\bar{b}} [-x_2(t) + 0.17 \dot{\alpha}(t)]$$

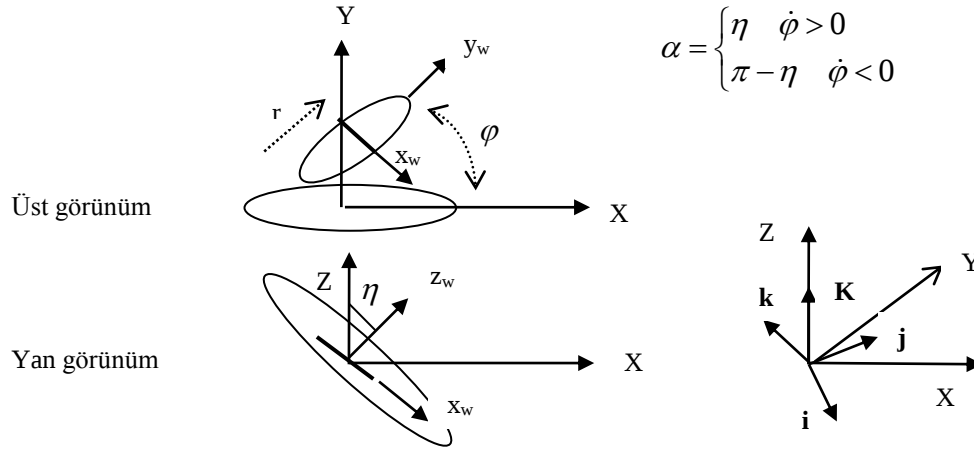
$$\text{Sirkülasyonsuz:} \quad l_{nc}(t) = \pi \rho I_1 [\ddot{\phi}(t) \sin \eta(t) + \dot{\phi}(t) \dot{\eta}(t) \cos \eta(t)] \cos \eta(t)$$

$\bar{b}$ ve $\bar{r}$ sırasıyla ortalama yarım veter ve açıklık değerleri olup statik taşıma: $C_l = A \sin 2\alpha$, $A=1.833$ [Taha et.al, 2014]. (Şekil 2) de kanat kesitinin hareketi ve ileri ve geri süpürme hareketi sırasında değişen hücum açıları gösterilmektedir.



Şekil 2: İleri-geri süpürme sırasında hücum açısı değişimi, 90° - 40° - 90°

(Şekil 3) de ise sirke sineğinin kanat-gövde birleşimi için basitleştirilmiş bir şekli görülmektedir. Koordinat eksenleri aerodinamik kuvvet ve moment hesaplamaları için seçilmiştir.

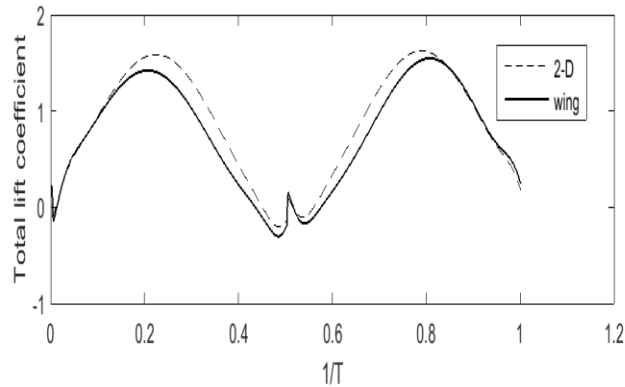


Şekil 3 Kanat ve gövdenin üst ve yan görünüşleri (yan görünümde yalnız kanat kesitinin gövdeye göre konumu gözük mektedir)

Hesaplamalar için gerekli büyüklüklerin sayısal değerleri Ek 1 de verilmektedir. Bu değerlerden l_1 , l_2 ve $\bar{b}$ kullanılarak kanadın toplam taşıma katsayısı

$$C_L(t) = \frac{l_{cr}(t) + l_{cp}(t) + l_{nc}(t)}{\rho U_m^2 S / 2} \quad (15)$$

olarak bulunur. Toplam taşıma katsayısının bir priyot için zamanla değişimi (Şekil 4) de 2-Boyutlu çözümle karşılaştırılmalı olarak verilmektedir.



Şekil 4: Bir periyot için toplam taşıma katsayısının değişimi.

Denklem (15) in bir periyottaki zamana göre integralinden ortalama taşıma katsayısı elde edilir:

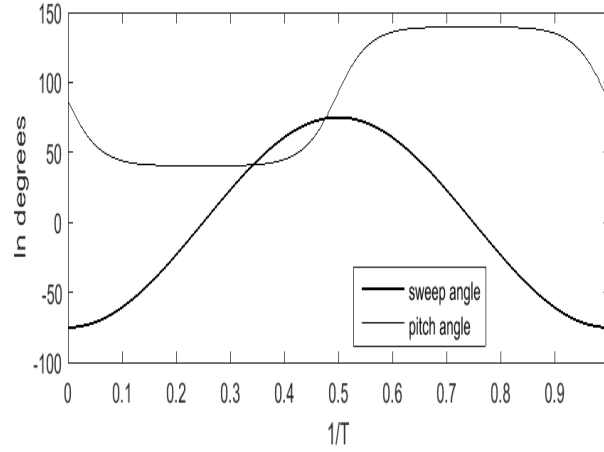
$$\bar{C}_L = \frac{1}{T} \int_T^{2T} C_L(t) dt = 0.75 \quad (16)$$

Buna bağlı olarak iki kanat için ortalama taşıma kuvveti

$$F = 2\bar{C}_L \rho U_m^2 S / 2 = 7.11 \mu N ,$$

Burada, kanat çırpma frekansı $f=240 \text{ Hz}$ olarak alınmıştır. Bu da sirke sineğinin ağırlığını $W = 7.06 \mu N$ [Berman and Wang, 2007] taşımaya yetmektedir.

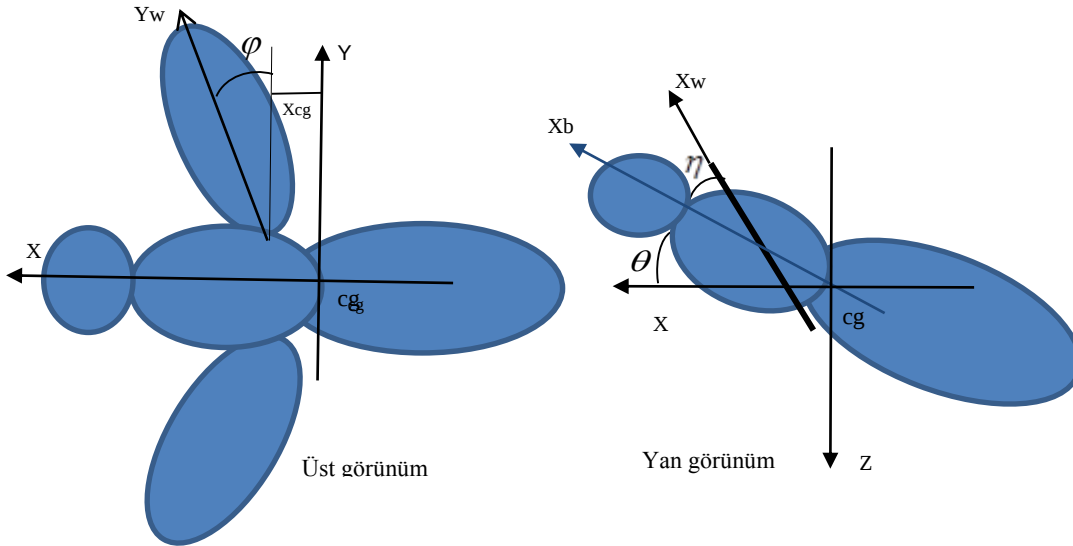
Kanat süpürmenin değişimi $\phi = -75^\circ \cos \omega t$ ile ve yunuslama açısının değişimi ise arktanjan ve sinüs fonksiyonları ile (Şekil 5) de görüldüğü gibi verilmektedir. Açıklık boyunca serbest akım değişimi ise $\dot{\phi} r = \bar{\phi} \omega r \sin \omega t$ ile ifade edilmektedir.



Şekil 5: Süpürme açısı: $-75^\circ < \varphi < 75^\circ$, ve yunuslama açısı, $40^\circ < \eta < 140^\circ$, değişimleri

Uçuş Kararlılığı

Çırpın kanatlı bir gövdenin yunuslama kararlılığını incelemek için zamana bağlı aerodinamik ile uçuş mekaniği parametrelerinin etkileşimli olarak incelenmesi gerekmektedir. (Şekil 6) da görüldüğü gibi, yer çekimi etkisi altında askıda tutunan bir hareketlinin yatay ve düşey pertürbasyon hızları u ve w , yunuslama hızı q ve yunuslama açısı θ ise, [Nelson, 1998] dan alınan notasyon ve eksen takımı kullanıldığında, denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılır:



Şekil 6: Uçuş kararlılığında kullanılan eksen takımı ve gerekli parametreler.

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -qw - g \sin \theta \\ qu + g \cos \theta \\ 0 \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X/m \\ Z/m \\ M/I_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Burada, X , Z ve M sırasıyla cisme etkiyen yatay ve düşey aerodinamik kuvvetler ve yunuslama momenti olup m cismin kütlesini I_y de cismin dönel eylemsizlik momentini, g de yerçekimi ivmesini göstermektedir.

Kanat çırpma aerodinamiği olarak taşıma ile moment büyüklükleri, yunuslama ve onun zamana bağlı değişimiyle elde edilirler. Kullanılan durum değişkenleri, x_1 ve x_2 , iki adi diferansiyel denklemle verilirler.

$$\dot{x}_1(t) = \frac{b_1 U_{ref}}{b} [-x_1(t) + a_1 \dot{\phi}(t) C_L(\alpha, t)] \quad \text{ve} \quad \dot{x}_2(t) = \frac{b_1 U_{ref}}{b} [-x_2(t) + a_1 \dot{\alpha}(t)]$$

Durum değişkenleri de etkileşimli olarak (17) denkleminin içine katıldığında, dengeden sapış ile ilgili hareket denklemleri 6 değişkenin zamana bağlı türevleri, $\dot{\chi} = (\dot{u} \ \dot{w} \ \dot{q} \ \dot{\theta} \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2)^T$, ve bunlara bağlı stabilite türevleriyle aşağıdaki gibi yazılırlar:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -qw - g \sin \theta \\ qu + g \cos \theta \\ 0 \\ q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Z_0 \\ M_0 \\ 0 \\ X_{1_0} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q & 0 & X_{x_1} & X_{x_2} \\ Z_u & Z_w & Z_q & 0 & Z_{x_1} & Z_{x_2} \\ M_u & M_w & M_q & 0 & M_{x_1} & M_{x_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{1_u} & X_{1_w} & X_{1_q} & 0 & X_{1_{x_1}} & 0 \\ 0 & 0 & X_{2_q} & 0 & 0 & X_{2_{x_2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Denklem (18) de, sağ taraftaki kolon vektörünün elemanlarındaki 0 alt indisler kanadın yunuslama hızını, katsayı matrisinin alt indisleri ise kısmi türevleri göstermektedir (Ek2). Yatay kesit kuvveti, X' , ve düşey kesit kuvveti, Z' , kesit taşıma l ve sürüklenme d cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$X' = -\text{sgn}(\dot{\phi})(d - l\alpha_i) \quad \text{ve} \quad Z' = -(l + d\alpha_i), \quad \alpha_i \text{ indüklenmiş hücum açısı} \quad (19a,b)$$

Burada, kesit taşıma katsayısına iki yerden katkı olup bunlardan birincisi l_p , yunuslama, ikincisi de yunuslama hızı l_{pr} , dir ve hesaplamalarında x_1 and x_2 kullanılır. Öte yandan indüklenmiş hücum açısı küçük olup aşağıdaki şekilde verilir:

$$\alpha_i \cong \frac{w_{eff}}{|U|}, \quad \text{ve} \quad w_{eff} = w - q(r \sin \phi + a), \quad U \cong r\dot{\phi} + u \cos \phi$$

Perturbasyon hızları u , w ve cismin yunuslama açısının hızı olan q düşünüldüğünde yunuslama ve yunuslama hızının taşıma katsayısına ayrı ayrı katkıları etkin serbest akım hızıyla aşağıdaki hali alır:

$$l_p = \rho(r\dot{\phi} + u \cos \phi) \text{sgn}(\dot{\phi}) [b(r\dot{\phi} + u \cos \phi) A(\sin 2\eta + 2\alpha_i \cos 2\eta) \Phi(0) + x_1(t)], \quad \text{ve} \\ l_{pr} = \rho(r\dot{\phi} + u \cos \phi) \text{sgn}(\dot{\phi}) \pi b^2 [q \cos \phi + (1/2 - a)q \cos \phi \Phi(0) + x_2(t)] \quad (20a,b)$$

Benzer şekilde kesit sürüklemesi:

$$d_p = \rho(r\dot{\phi} + u \cos \phi) \text{sgn}(\dot{\phi}) [b(r\dot{\phi} + u \cos \phi) A(\sin^2 \eta + \alpha_i \sin 2\eta) \Phi(0) + x_1(t)]$$

olarak yazılır. İndüklenmiş hücum açısının küçük olmasından dolayı ikinci mertebe terimlerinin ihmal edilmesi ile indüklenmiş taşıma ve sürüklemenin ifadeleri:

$$l_p \alpha_i = \rho w_{eff} [brA\dot{\phi} \sin 2\eta \Phi(0)], \quad d_p \alpha_i = \rho w_{eff} [2brA\dot{\phi} \sin^2 \eta \Phi(0)] \quad (21a,b)$$

halini alır.

Ortalama İşlemi

Yukarda denklemleri (18) çıkarılmış olan zamana bağlı periyodik sistem kararlılık analizi için bir periyotluk zaman ortalaması alınarak kullanılacaktır. Ortalama büyüklükler T periyodu için

$$\bar{\chi} = f(\bar{\chi}) + h(\bar{\chi}), \quad \text{burada} \quad h(\bar{\chi}) = \frac{1}{T} \int_0^T h(\chi, t) dt$$

olur.

$$\begin{pmatrix} \ddot{\bar{u}} \\ \ddot{\bar{w}} \\ \ddot{\bar{q}} \\ \ddot{\bar{\theta}} \\ \Delta \ddot{\bar{x}}_1 \\ \ddot{\bar{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{q}\bar{w} - g \sin \bar{\theta} \\ \bar{q}\bar{u} + g \cos \bar{\theta} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{X}_0 + \bar{X}_{x_1} \bar{x}_{1eq} \\ \bar{Z}_0 + \bar{Z}_{x_1} \bar{x}_{1eq} \\ \bar{M}_0 + \bar{M}_{x_1} \bar{x}_{1eq} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{X}_u & \bar{X}_w & \bar{X}_q & 0 & \bar{X}_{x_1} & \bar{X}_{x_2} \\ \bar{Z}_u & \bar{Z}_w & \bar{Z}_q & 0 & \bar{Z}_{x_1} & \bar{Z}_{x_2} \\ \bar{M}_u & \bar{M}_w & \bar{M}_q & 0 & \bar{M}_{x_1} & \bar{M}_{x_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{X}_{1u} & \bar{X}_{1w} & \bar{X}_{1q} & 0 & \bar{X}_{1x_1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{X}_{2q} & 0 & 0 & \bar{X}_{2x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{q} \\ \bar{\theta} \\ \Delta \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Burada, $\Delta \bar{x}_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_{1eq}$ ve $\bar{x}_{1eq} = -\bar{X}_{10} / \bar{X}_{1x_1}$ dir. Askıda duruş için cebrik denlemler ($\bar{u} = 0, \bar{w} = 0, \bar{q} = 0, \bar{\theta} = 0$) değerleri için çözülürler.

Askıda ‘Trim’

Zamana göre ortalaması alınmış olan hareket denklem sistemi, askı uçuşundaki cismin ileri geri kanat çırpması esnasında ‘trim’ edilmesi için kullanılır. Kanat çırpma hareketi için iki farklı çırpma tarzı vardır. Bunlardan birincisi: i) simetrik çırpma, ve ikincisi de ii) asimetrik çırpma.

i) Simetrik çırpma ile ‘trim’

Denklemlerin basit şekil alması için zamana göre destere dişi şeklinde değişen kanat süpürme hareketi alınarak bir periyot T zamanında aşağıdaki gibi tamamlanmaktadır. (Mouy, 2017)

$$\varphi(t) = \begin{cases} 4\bar{\varphi} / T(t - T/4), & 0 \leq t \leq T/2 \\ -4\bar{\varphi} / T(t - 3T/4), & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Kanadın hareketi sırasında sabit bir hücum açısı alınarak zamana göre parçalı sabit yunuslama açısı değişimi kullanılmıştır:

$$\eta(t) = \begin{cases} \bar{\alpha}, & 0 \leq t \leq T/2 \\ \pi - \bar{\alpha}, & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Denklemleri yukarıda verilen simetrik süpürme hareketi sırasında zamana bağlı akım sıfırdan farklı bir X kuvveti verirken sanki daimi akım kabulüyle 0 kuvvet elde edilir (Mouy, et.al., 2017). Bu nedenle Denklem (22) nin x yönündeki kuvvet dengesini ortalama değerler cinsinden aşağıdaki şekilde elde ederiz (Ek3):

$$\bar{X}_{x_1} \bar{x}_{1eq} = 8 \frac{\rho I_{10}}{m T^2} \bar{r} 2\bar{b} \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} A a_1 \sin 2\bar{\alpha} \quad (23)$$

Süpürme açısı veya hücum açısı, $\bar{\varphi} = 0$ veya $\bar{\alpha} = 0$ olmadıkça Denklem (23)’ün sağ tarafı, trim şartı için, 0 a eşit olmamaktadır. Bu da ‘trim’ sırasında simetrik süpürme hareketinde taşıma kuvveti elde edilemediğini gösterir. Bu nedenle asimetrik süpürme hareketi tercih edilmelidir.

ii) Asimetrik kanat çırpma ile ‘trim’

Askı sırasında ‘trim’ elde edebilmek için asimetrik kanat çırpma ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \bar{\varphi}_0 + 4\bar{\varphi} / T(t - T/4), & 0 \leq t \leq T/2 \\ \bar{\varphi}_0 - 4\bar{\varphi} / T(t - 3T/4), & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Hücum açısı ise

$$\eta(t) = \begin{cases} \bar{\alpha}_d, & 0 \leq t \leq T/2 \\ \pi - \bar{\alpha}_u, & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Şeklinde verilince ‘trim’ denklemler:

$$\begin{aligned}\bar{X}_0 + \bar{X}_{x1}\bar{X}_{1eq} &= 0 \\ \bar{Z}_0 + \bar{Z}_{x1}\bar{X}_{1eq} &= -g \\ \bar{M}_0 + \bar{M}_{x1}\bar{X}_{1eq} &= 0\end{aligned}\quad (24a,b,c)$$

halini alır. Denklem (24) de 3 eşitlik ve bunlara karşılık $\bar{\alpha}_d$, $\bar{\alpha}_u$ and $\bar{\varphi}_0$ olmak üzere 3 bilinmeyen vardır. Her bir stabilite türevi için zamana göre ortalamaların yer aldığı değişkenler kullanılarak aşağıdaki doğrusal olmayan denkelem takımı elde edilir: (Ek3)

$$\text{X-kuvvet dengesi:} \quad \sin 2\bar{\alpha}_d + \sin 2\bar{\alpha}_u = -\frac{I_{21}}{I_{10}\bar{r}\bar{b}}(\sin^2 \bar{\alpha}_d - \sin^2 \bar{\alpha}_u)(0.6 - a_1)/a_1 \quad (25)$$

$$\text{Z-kuvvet dengesi:} \quad \sin 2\bar{\alpha}_d + \sin 2\bar{\alpha}_u = \frac{mgT^2}{4\rho A(0.43I_{21} + 0.17I_{10}\bar{r}2\bar{b})\bar{\varphi}^2} \quad (26)$$

M-moment dengesi:

$$\begin{aligned}& a \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} [0.43I_{22}(\sin \bar{\alpha}_d - \sin \bar{\alpha}_u) - 0.17I_{11}\bar{r}2\bar{b}(\sin 2\bar{\alpha}_d + \sin 2\bar{\alpha}_u)]x \\ & (\cos \bar{\alpha}_d + \sin \bar{\alpha}_d - \cos \bar{\alpha}_u + \sin \bar{\alpha}_u) + 0.43x_{cg}\bar{\varphi}(\sin 2\bar{\alpha}_d + \sin 2\bar{\alpha}_u)(I_{21} - 2I_{10}\bar{r}2\bar{b}) \\ & + \sin \bar{\varphi}(0.43I_{31} \cos \bar{\varphi}_0 - 0.17I_{20}4\bar{r}\bar{b} \sin \bar{\varphi}_0)(\sin 2\bar{\alpha}_d + \sin 2\bar{\alpha}_u) = 0\end{aligned}\quad (27)$$

Burada, a kanat dönme ekseninin çeyrek vetere olan uzaklığıdır.

X ve Z kuvvet dege denklemleri (25) ve (26), $\bar{\alpha}_d$ ve $\bar{\alpha}_u$ bilinmeyenleri için verilen süpürme açısı ve periyot süresi, $\bar{\varphi}$ ve T , için çözülürler. Böylece ileri ve geri süpürme sırasındaki hücum açıları belli olur. Sonra, moment denge denklemi bilinenler yardımıyla $\bar{\varphi}_0$ açısı için çözülür.

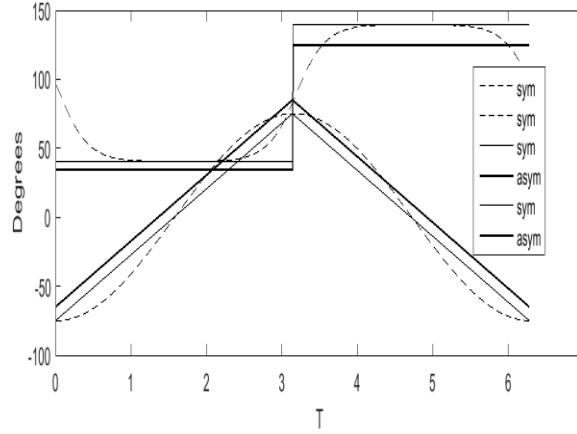
Sirke sineğinin askıda ‘trim’i: Sirke sineği için çeşitli parametreler aşağıda verilmiştir (Berman and Wang, 2007) den, bir kısmı, alıntıdır:

$$\begin{aligned}m &= 0.72\text{mg}, \quad f = 254\text{Hz}, \quad \bar{\varphi} = 75^\circ, \quad a = 0, \quad x_{cg} = 0.5, \quad I_{10} = 4.89, \quad I_{11} = 3.30, \quad I_{21} = 4.69, \quad I_{20} = 7.29, \\ I_{22} &= 3.32, \quad I_{31} = 7.36\end{aligned}$$

(25), (26) ve (27) denklemlerinin çözümünden asimetric ‘trim’ değerleri:

$$\bar{\alpha}_d = 34.3^\circ, \quad \bar{\alpha}_u = 55.6^\circ \quad \text{and} \quad \bar{\varphi}_0 = 4^\circ$$

bulunur. Bu durumda mutlak hücum açısı ileri süpürmede 34.3° olurken geri süpürme sırasında 55.6° olmaktadır. Süpürme hareketi ise ileri süpürme açılarının değişimleri $-71^\circ < \varphi(t) < 79^\circ$ ve geri süpürmede $79^\circ > \varphi(t) > -71^\circ$ arasında olmaktadır. Simetrik ve asimetric süpürme ve hücum açılarının zamana göre değişimi (Şekil 7) de verilmiştir. Simetriden sapış hücum açısında yaklaşık 5° ve süpürmeden sapış ise 4° olup bu değişimler kolaylıkla kontrol amaçlı uygulanabilir.



Şekil 7: 'Trim' edilmiş asimetrik süpürme ve hücum açıları _____, ve simetrik 'trim' edilemeyen hareket -----

SONUÇ

Durum uzayı yardımıyla kanat çırpan bir gövdenin askıda durması için zamana bağlı aerodinamik kuvvet ve moment hesapları hem 2 boyutlu hem de sonlu kanat için yapılmış olup sirke sineğinin askı duruşuna uygulanmıştır.

Askı duruşunun sürdürülebilmesi için gerekli denklemler kararlılık türevlerinden elde edilen katsayı matrisi kullanılarak çıkarılmış olup kararlılık değerlerinden küçük sapmalar cinsinden ifade edilmişlerdir. Zamanda periyodik olan bu ifadelerin ortalamaları alınarak askı kararlılığı ortalama değerler üzerinden hesaplanmıştır.

Yunuslama hareketi için ortalama değerler kullanılarak kanat süpürme ve hücum açılarının asimetrik yapılması ile 'trim' şartları sağlanabilmektedir. Simetrik kanat hareketiyle 'trim' ancak sıfır taşıma ile mümkün olduğundan bu hareketin pratik geçerliliğe sahip olmadığı anlaşılmıştır.

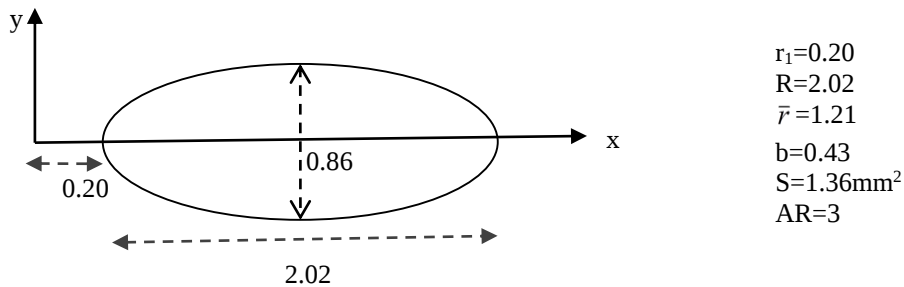
Ekler

Ek1: Eliptik kanat bilgileri:

Eliptik kanadın boyutları ve açıklık oranı AR Şekil E1 verilmiş olup bu kanat için 1. Ve 2. Momentler aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$I_1 / 2 = \int_{r_1}^{r_1+R} r b^2(r) dr = \text{eval}(\text{int}((-x-1.01-.20)^2/1.01^2+1)*0.43^2*x, .20, 2.22)) = 0.3013 \text{ mm}^4$$

$$I_2 / 2 = \int_{r_1}^{r_1+R} r^2 b(r) dr = \text{eval}(\text{int}(\text{sqrt}(-(x-1.01-.20)^2/1.01^2+1)*0.43^2*x^2, .20, 2.22)) = 0.5043 \text{ mm}^4$$



Şekil E1: Sirke sineğinin eliptik kanadının ilgili parametreleri

Kanadı temsil eden elipsin denklemi: $\frac{(r-1.01-0.20)^2}{(1.01)^2} + \frac{b^2}{(0.43)^2} = 1$

Ek2: Sabit yunuslama açısında aerodinamik kuvvet ve moment değerleri:

$$K_{mn} = \rho A I_{mn} / 2, \quad I_{mn} = 2 \int_{r_1}^R r^m c^n(r) dr, \quad I_y = \text{gövde eylemsizlik momenti} \quad \text{kullanılarak}$$

$$X_{P0} = -2 \frac{K_{21}}{m} |\dot{\phi}| \cos \varphi \sin^2 \eta \Phi(0) \quad Z_{P0} = -\frac{K_{21}}{m} |\dot{\phi}| \sin 2\eta \Phi(0)$$

$$M_{P0} = 2 |\dot{\phi}| \sin \eta \left(\frac{K_{21}}{I_y} x_{cg} \cos \eta + \frac{K_{22}}{I_y} a \cos \varphi + \frac{K_{31}}{I_y} \sin \varphi \cos \eta \right) \Phi(0).$$

Kuvvetler ve momentin kısmi türevleri:

x yönü:

$$X_{Pu} = -4 \frac{K_{11}}{m} |\dot{\phi}| \cos^2 \varphi \sin^2 \eta \Phi(0), \quad X_{Pw} = -\frac{K_{11}}{m} |\dot{\phi}| \cos \varphi \sin 2\eta \Phi(0),$$

$$X_{Pq} = \left(\frac{K_{21}}{m} |\dot{\phi}| \cos \varphi \sin \varphi \sin 2\eta + x_{cg} \frac{K_{11}}{m} |\dot{\phi}| \cos \varphi \sin 2\eta \right) \Phi(0), \quad X_{Px_1} = -\rho \frac{I_{10}}{m} |\dot{\phi}| \cos \varphi, \quad X_{Px_2} = 0.$$

z yönü:

$$Z_{Pu} = -4 \frac{K_{11}}{m} |\dot{\phi}| \cos^2 \varphi \Phi(0), \quad Z_{Pw} = Z_{Pu} / 2, \quad Z_{Pq} = \frac{K_{21}}{m} |\dot{\phi}| \sin \varphi \sin^2 \eta \Phi(0) - x_{cg} Z_{Pw},$$

$$Z_{Px_1} = -\rho \frac{I_{10}}{m} |\dot{\phi}|, \quad Z_{Px_2} = 0.$$

Momentler:

$$M_{Pu} = 4 \frac{K_{12}}{I_y} a |\dot{\phi}| \cos^2 \varphi \sin \eta \Phi(0) + 2 \frac{m}{I_y} X_{Pq},$$

$$M_{Pw} = 2 \left(\frac{K_{12}}{I_y} a |\dot{\phi}| \cos \varphi \cos \eta + \frac{K_{21}}{I_y} a |\dot{\phi}| \cos \varphi \cos^2 \eta \right) \Phi(0) - \frac{m}{I_y} x_{cg} Z_{Pw}$$

$$M_{Pq} = 2 |\dot{\phi}| \left(a \cos \varphi \cos \eta \left(\frac{K_{12}}{I_y} x_{cg} + \frac{K_{22}}{I_y} \sin \varphi \right) - \sin \varphi \cos^2 \eta \right) \left(\frac{K_{21}}{I_y} x_{cg} + \frac{K_{31}}{I_y} \sin \varphi \right) \Phi(0) - \frac{m}{I_y} x_{cg} Z_{Pq}$$

$$M_{Px_1} = \rho \frac{I_{11}}{I_y} a |\dot{\phi}| \cos \varphi (\cos \eta + \sin \eta) + \rho \frac{I_{20}}{I_y} |\dot{\phi}| \sin \varphi \cos^2 \eta - \frac{m}{I_y} x_{cg} Z_{Px_1}, \quad M_{P_2} = 0$$

Yunuslama hızına göre yazılan kuvvetler ve momentin kısmi türevleri:

x-yönü: X in türevlerine sıfır katkı.

z-yönü:

$$Z_{Prq} = -\frac{K_{Pr12}}{m} \dot{\phi} \cos \varphi \Phi(0) - \rho \frac{I_{12}}{m} \pi \dot{\phi} \cos \varphi \quad Z_{Prx_2} = -\rho \frac{I_{21}}{m} \dot{\phi}, \quad K_{Prmn} = \pi \rho (1/2 - a) I_{mn}$$

Geri kalan Z nin türevleri 0 dir.

Moment:

$$M_{Prq} = \dot{\phi} \cos \varphi \left(\frac{K_{Pr13}}{I_y} a \cos \varphi \cos \eta + \frac{K_{Pr22}}{I_y} \sin \varphi \right) \Phi(0) - \rho \pi \frac{I_{13}}{I_y} \dot{\phi} \cos \varphi - \frac{K_v}{I_y} \mu f \cos^2 \varphi, \quad K_v = \frac{\pi}{16} \rho I_{04}$$

$$M_{Prx_2} = \rho \frac{I_{11}}{I_y} a |\dot{\phi}| \cos \varphi (\cos \eta + \sin \eta) + \rho \frac{I_{20}}{I_y} |\dot{\phi}| \sin \varphi - \frac{m}{I_y} x_{cg} Z_{Prx_2}$$

Akış la ilgili yunuslamanın türevleri:

$$X_{1_u} = 2b_1\bar{r}|\dot{\phi}|Aa_1 \sin 2\eta \cos \varphi, \quad X_{1_w} = 2b_1\bar{r}|\dot{\phi}|\dot{\phi}Aa_1 \cos 2\eta, \\ X_{1_q} = -2b_1\bar{r}|\dot{\phi}|Aa_1(x_{cg} + \bar{r} \sin \varphi), \quad X_{1_{x1}} = -b_1\bar{r}|\dot{\phi}|/b$$

Yunuslama hızıyla ilgili son iki türev:

$$X_{2_q} = 2b_1\bar{r}|\dot{\phi}|\pi(b/2 - a)a_1 \cos \varphi + b_1\bar{r}|\dot{\phi}|\pi a_1 \cos \varphi, \quad X_{2_{x2}} = -b_1\bar{r}|\dot{\phi}|/b$$

Ek 3 Trim Parametreleri:

i) Simetrik:

$$\bar{X}_{x1} = -\frac{1}{T} \int_0^T \rho \frac{I_{10}}{m} |\dot{\phi}| \cos \varphi dt = \rho \frac{I_{10}}{m} \frac{1}{T} \frac{4\bar{\varphi}}{T} \left[\int_0^{T/2} \cos \frac{4\bar{\varphi}}{T} (t - T/4) dt + \int_{T/2}^T \cos \frac{4\bar{\varphi}}{T} (t - 3T/4) dt \right] \\ = -\rho \frac{I_{10}}{m} \frac{1}{T} \left[\sin \frac{4\bar{\varphi}}{T} (t - T/4) \Big|_0^{T/2} + \sin \frac{4\bar{\varphi}}{T} (t - 3T/4) \Big|_{T/2}^T \right] = \rho \frac{I_{10}}{m} \frac{1}{T} (\sin \bar{\varphi} + \sin \bar{\varphi} + \sin \bar{\varphi} + \sin \bar{\varphi}) \\ = 4\rho \frac{I_{10}}{mT} \sin \bar{\varphi}$$

$$\bar{X}_{1eq} = \frac{\bar{X}_{10}}{\bar{X}_{1x1}} = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T b_1\bar{r}^2 |\dot{\phi}| \dot{\phi} Aa_i \sin 2\eta dt}{-2b_1\bar{r}|\dot{\phi}|/\bar{c}} = \frac{Aa_1}{2T} \left(\int_0^{T/2} \dot{\phi} \sin 2\bar{\alpha} dt + \int_{T/2}^T \dot{\phi} \sin 2(\pi - \bar{\alpha}) dt \right) \\ = \frac{Aa_1}{2T} \left(\frac{4\bar{\varphi}}{T} \sin 2\bar{\alpha} t \Big|_0^{T/2} - \frac{4\bar{\varphi}}{T} \sin(-2\bar{\alpha} t) \Big|_{T/2}^T \right) = \frac{2}{T} \bar{\varphi} Aa_1 \sin 2\bar{\alpha}$$

Böylece, Denklem (23) elde edilir.

$$\bar{X}_{x1} \bar{X}_{1eq} = 8\rho \bar{r} 2\bar{b} \frac{I_{10}}{mT^2} \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} Aa_1 \sin 2\bar{\alpha}$$

ii) Asimetrik: Bir periyot için integral alındığında:

Denklem (24a) için

$$\bar{X}_{P0} = -16 \frac{\rho A I_{21}}{mT^2} \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} (\sin^2 \bar{\alpha}_d - \sin^2 \bar{\alpha}_u) \Phi(0) / 2$$

ve

$$\bar{X}_{x1} \bar{X}_{1eq} = 8\rho \bar{r} 2\bar{b} \frac{I_{10}}{mT^2} \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} Aa_1 (\sin 2\bar{\alpha}_d - \sin 2\bar{\alpha}_u)$$

$$\bar{X}_{P0} + \bar{X}_{x1} \bar{X}_{1eq} = 0 \quad \text{yazılarak Denklem (24a) elde edilir. (24b,c) ise benzer}$$

şekillerde bulunur.

Kaynaklar

Berman, G.J. and Wang, Z.J., 2007, *Energy-minimizing kinematics in hovering flight*, J. Fluid Mech. Vol.582 p. 153-168.

Bisplinghoff, R.L., Ashley, H., Halfman, R.L., 1996, *Aeroelasticity*, Dover Publications Inc., New York, s. 393-394

Goman, M. and Khrabrov, A., *State-Space Representation of Aerodynamic Characteristics of an Aircraft in High Angles of Attack*, J. of Aircraft, Vol. 31, No. 5, p.1109-1115, 1994.

Gulcat, U., *Shortcuts in Unsteady and Flapping Wing Aerodynamics*, Invited Lecture, AIAC'2011-002, Sept.14-16 2011, METU, Ankara, TURKEY.

Gulcat, U., 2016. *Fundamentals of Modern Unsteady Aerodynamics*, 2nd Ed., Springer, s. 331-334.

Gulcat, U., *State-Space Representation of Flapping Wings in Hover*, 9th Ankara International Aerospace Conference, 20-22 Sept. 2017-METU, Ankara TURKEY, AIAC-2017-60.

Izraelevitz, J.S., Quiang, Z. And Triantafyllou, M.S., 2017. *State-Space Adaptation of Unsteady Lifting Line Theory Twisting/Flapping Wings of Finite Span*, AIAA Journal, Vol. 55, No. 4, p. 1279-1294.

Leishman, G., 2000. *Principle of Helicopter Aerodynamics*, Cambridge University Press, s. 341-342.

Mouy, A., Rossi, A. And Taha, H.E., 2017. *Coupled Unsteady Aero-Flight Dynamics of Hovering Insects/Flapping Micro Air Vehicles*, Journal of Aircraft, Vol. 54, No. 5, p. 1738-1749.

Nelson, R.C., 1998. *Flight Stability and Automatic Control*, Vol. 2, McGraw-Hill, New York, s. 217.

Reich, G.W., Eastep, F.E., Altman, A. and Alberani, R. 2001, *Transient Poststall Aerodynamic Modeling for Extreme Maneuvers in Micro Air Vehicles*, Journal of Aircraft, Vol.48, No. 2, p.403-411,

Taha, H.E., Hajj, M.R. and Beran, P.S., 2014. *State-Space Representation of the Unsteady Aerodynamics of Flapping Flight*, Aerospace Science and Technology, Vol. 34, p.1-11.

Taha, H.E., Hajj, M.R. and Nayfeh, A.H., 2014. *Longitudinal Flight Dynamics Hovering MAVs/Insects*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 37, No. 3, p. 970-978.

Uhlig, D.V. and Selig, M.S., 2017. *Modeling Micro Air Vehicle Aerodynamics in Unsteady High Angle of Attack Flight*, Journal of Aircraft, Vol. 54, No. 3, p. 1064-1075.



Sirke sineğinin üstten görünümü