

HELİKOPTER ALT YAPILARININ DİNAMİK ANALİZİ İÇİN DÜŞÜK DERECEDE MODELLEME

Uğur HAYIRLI¹

TUSAŞ Türk Havacılık ve Uzay Sanayi A.Ş.
Ankara

Altan KAYRAN²

Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Ankara

ÖZET

Bu çalışma havacılık yapılarının analizi için sıklıkla kullanılan sonlu elemanlar modelinin literatürde yer alan model indirgeme yöntemleri aracılığıyla düşük dereceli model oluşturulmasına yöneliktir. Bu amaçla bir helikopter alt yapısı olan kuyruk modeli seçilmiş olup sonlu elemanlar modeli oluşturulmuştur. Sonlu elemanlar modelinin kütle ve katılık matrislerinin çıkarılmasında ve model indirgeme yöntemlerinin uygulanmasında bu çalışmaya özgü geliştirilen bir kod kullanılmıştır. Model indirgeme yöntemleriyle oluşturulan düşük dereceli modeller ile kuyruk sonlu elemanlar ana modelinin doğal frekans ve mod şekilleri kıyaslanmıştır. Elde edilen sonuçlara göre hata payı en az olan IRS (Improved Reduced System) model indirgeme yöntemi belirlenmiş olup bu yöntemle oluşturulan model ile yapılan frekans cevap ve zamana bağlı analiz sonuçları ve analiz süresi kuyruk sonlu elemanlar ana modeliyle elde edilen sonuçlar ile kıyaslanmıştır. Yapılan karşılaştırma sonucunda indirgenmiş modelin, ana modelin dinamik karakteristiğini büyük ölçüde yansıttığı gözlemlenmiştir.

GİRİŞ

Havacılık yapılarının analizinde analitik yöntemler yerine daha çok sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Sayısal yöntemler arasında en yaygın olarak kullanılan metot sonlu elemanlar yöntemidir. Sonlu elemanlar modellerinde özellikle dinamik analizlerde sonuçların doğruluğunun yüksek olabilmesi için çok sayıda eleman ve düğüm noktası kullanılmaktadır. Bu durumda büyük modellerin dinamik analizleri yüksek hesaplama zamanına ve kapasitesine ihtiyaç duyabilmektedir. Bu nedenle problem boyutlarını düşürmek için model indirgeme yöntemleri kullanılarak binlerce serbestlik derecesi içeren sonlu elemanlar modeli düşük frekans bandındaki sonuçları korunarak çok daha küçük serbestlik derecesine sahip modellere indirilebilir.

Problemin boyutunu azaltmaya yarayan literatürde birçok yöntem bulunmaktadır. Bu çalışmada literatürde yer alan model derecesi düşürme yöntemlerinden Guyan [Guyan,1965], IRS (Improved Reduced System) [O'Callahan,1989] ve Modal Reduction [Kammer,1987] metotları kullanılmıştır. Bu metotlar kütle ve katılık matris derecelerinin düşürülmesiyle sonlu elemanlar modelinin derecesini düşürmektedir. Model derecesinin düşürülmesi seçilen bazı serbestlik derecelerinin belirlenerek bunların indirgenmiş modelde tutulması ve kalan serbestlik derecelerinin modelden atılmasıyla elde edilmektedir. Modelde tutulacak serbestlik derecelerinin seçimi kullanılan yöntemler ile yaratılan indirgenmiş modellerin sonuçlarına etkisi büyüktür. Serbestlik derecelerinin sayısı ve nasıl seçileceği ile ilgili literatürde birçok rehber bulunmaktadır. Bu makalelerde elde edilen indirgenmiş modellerin serbestlik derecesi sayısı ana modelin toplam serbestlik derecesi sayısının genellikle yüzde onundan daha az olduğu gözlemlenmiştir. Öncelikle kütle matrisinde en büyük değere sahip olan serbestlik derecelerinin modelde tutulabileceği ayrıca ilgilenilen mod şekillerine göre en çok hareket eden serbestlik derecelerinin de indirgenmiş modelde olabileceği belirtilmiştir [Levy, 1971]. Karmaşık yapılarda modelde tutulacak serbestlik derecelerinin kütle

¹Tasarım Mühendisi, Helikopter Grup Başkanlığı, E-posta: ugur.hayirli@tai.com.tr

² Prof. Dr., Havacılık ve Uzay Müh. Böl., E-posta: akayran@metu.edu.tr

içeriğe göre daha esnek bölgelerde olması gerektiği vurgulanmıştır [Downs, 1979]. Bu rehberler giriş ve plaka tarzı basit yapılarda kullanışlı olmasına rağmen karmaşık ve büyük yapılarda serbestlik derecesinin seçiminde yeterli olmadığı gibi hatalı sonuçlara da yol açabilmektedir. Ek olarak, modelde tutulacak serbestlik derecelerinin seçimiyle ilgili hesaba dayalı algoritmalar içeren yöntemler sunulsa da [Henshell and Ong, 1975], bu çalışmada serbestlik derecesinin seçimi analizi gerçekleştirecek olan kullanıcının tecrübesine bırakılmıştır.

YÖNTEM

Bu çalışmada kuyruk sonlu elemanlar modelinin oluşturulmasında MSC/Nastran programı kullanılmıştır. Ayrıca ana modelin sistem matrislerinin çıkarılmasında, model indirgeme yöntemlerinin uygulanmasında ve indirgenmiş sistem matrislerinin oluşturulmasında MATLAB yazılımı kullanılmıştır.

Sistem Matrislerinin Çıkarılması

MSC/Nastran girdi dosyası olan ".bdf" uzantılı dosyada Bulk Data kısmına "*param,extout,dmigrp*" komutu eklenerek koşutulduktan sonra ".pch" uzantılı dosyadan ana modelin sistem kütle ve katılık matrisleri elde edilmektedir.

Model İndirgeme Yöntemleri

Sistem hareket denklemi Denklem (1)'de gösterildiği gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sm} \\ M_{ms} & M_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{x}_m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sm} \\ K_{ms} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s \\ x_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ F_m \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Modelde tutulan serbestlik dereceleri "m" (master) indisi ile modelden atılan serbestlik dereceleri "s" (slave) indisi ile ifade edilmiştir.

Guyan Reduction: Statik ya da Guyan indirgeme yöntemi sistemin kütle matrisinin ihmal edilmesiyle gerçekleştirilir. [Guyan, 1965]

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sm} \\ K_{ms} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s \\ x_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ F_m \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Modelden atılan serbestlik derecesi, $\{x_s\}$, Denklem (2)'nin üst bölümü kullanılarak modelde tutulan serbestlik derecesi, $\{x_m\}$, cinsinden ifade edilebilir.

$$\{x_s\} = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{x_m\} + [K_{ss}]^{-1}\{F_s\} \quad (3)$$

Guyan indirgeme yönteminde modelden atılan serbestlik derecelerinde herhangi bir kuvvet uygulanmadığı kabul edilmiştir. Bu nedenle Denklem (3) basitleşir ve Denklem (4)'de görüldüğü gibi yazılabilir.

$$\{x_s\} = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{x_m\} \quad (4)$$

Denklem (3)'te verilen Guyan dönüşüm matrisi kullanılarak model derecesi düşürülmüş sistem elde edilmektedir.

$$\begin{Bmatrix} x_s \\ x_m \end{Bmatrix} = [T_G]\{x_m\}, \quad [T_G] = \begin{bmatrix} -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] \\ [I_{mm}] \end{bmatrix} \quad (5)$$

Model derecesi düşürülmüş kütle ve katılık matrisleri Denklem (6)'da verilmiştir.

$$[M_G] = [T_G]^T[M][T_G], \quad [K_G] = [T_G]^T[K][T_G] \quad (6)$$

Improved Reduced System (IRS): Bu yöntemde Guyan indirgeme yönteminde atılan serbestlik derecelerinde ihmal edilen kuvvet yeni bir yaklaşımla ifade edilmiştir. [O'Callahan, 1989]

Sistemin kütle ve katılık matrislerine göre özdeğer denklemi Denklem (7) ile ifade edilir.

$$[K]\{x\} = [M]\{x\}[\Omega^2] \quad (7)$$

Guyan indirgenmiş kütle ve katılık matrislerine göre özdeğer denklemi Denklem (8)'de gösterildiği gibi yazılır.

$$[K_G]\{x_m\} = [M_G]\{x_m\}[\omega^2]\{x_m\}[\omega^2] = \{[M_G]\}^{-1}[K_G]\{x_m\} \quad (8)$$

Sistemin mod şekilleri, Guyan dönüşüm matrisi ve indirgenmiş sistemin mod şekilleri kullanılarak Denklem (9)'daki gibi elde edilebilir.

$$\{\tilde{x}\} = [T_G]\{x_m\} \quad (9)$$

Guyan indirgenmiş mod şekillerini kullanarak, sistemin özdeğer denklemi Denklem (10)'da verildiği gibi yazılabilir.

$$[K]\{\tilde{x}\} = [M]\{\tilde{x}\}[\omega^2] = [M][T_G]\{x_m\}[\omega^2] \quad (10)$$

Aynı zamanda kuvvet, indirgenmiş modelin mod şekilleri cinsinden ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} [F] &= [K]\{\tilde{x}\} \\ &= [M]\{\tilde{x}\}[\omega^2] \\ &= [M][T_G]\{x_m\}[\omega^2] \\ &= [M][T_G]\{[M_G]\}^{-1}[K_G]\{x_m\} \end{aligned} \quad (11)$$

Sonuç olarak, IRS dönüşüm matrisi, T_{IRS} , Denklem (7)'yi kullanarak elde edilebilir.

$$\{x\} = [T_G]\{x_m\} + \begin{bmatrix} K^{-1}_{ss} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_s \\ F_m \end{Bmatrix} = [T_{IRS}]\{x_m\} \quad (12)$$

$$[T_{IRS}] = \begin{bmatrix} \{ -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] \} + \{ [K_{ss}]^{-1}([M_{sm}] - [M_{ss}][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]) \} \{ [M_G] \}^{-1} [K_G] \} \\ [I_{mm}] \end{bmatrix}$$

Model derecesi düşürülmüş kütle ve katılık matrisleri Denklem (13) ile verilmiştir.

$$[M_{IRS}] = [T_{IRS}]^T [M] [T_{IRS}], \quad [K_{IRS}] = [T_{IRS}]^T [K] [T_{IRS}] \quad (13)$$

Modal Reduction: Bu yöntem sistemin mod şekillerini kullanarak, dönüşüm matrisini oluşturmaktadır. [Kammer, 1987]

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_s \\ x_m \end{Bmatrix} = [\Phi]\{q\} = \begin{bmatrix} \Phi_s \\ \Phi_m \end{bmatrix} \{q\} \quad (14)$$

Denklem (14)'ün alt kısmı kullanılarak $\{q\}$ yalnız bırakıldığında Denklem (15) elde edilir.

$$\{q\} = [\Phi_m^T \Phi_m]^{-1} [\Phi_m]^T \{x_m\} \quad (15)$$

Aynı zamanda modelden atılan serbestlik dereceleri modelde tutulan serbestlik dereceleri cinsinden Denklem (16)'da gösterildiği gibi ifade edilebilir.

$$\{x_s\} = [\Phi_s [\Phi_m^T \Phi_m]^{-1} [\Phi_m]^T] \{x_m\} \quad (16)$$

Aynı şekilde, bu yöntem için elde edilen dönüşüm matrisi Denklem (17)'de verilmiştir.

$$\{x\} = [T_D]\{x_m\}, \quad [T_D] = \begin{bmatrix} [\Phi_s [\Phi_m^T \Phi_m]^{-1} [\Phi_m]^T] \\ [I_{mm}] \end{bmatrix} \quad (17)$$

Model derecesi düşürülmüş kütle ve katılık matrisleri ise Denklem (18) ile verilmiştir.

$$[M_M] = [T_M]^T [M] [T_M], \quad [K_M] = [T_M]^T [K] [T_M] \quad (18)$$

İndirgenmiş Sistem Matrislerinin Eklenmesi

Model indirgeme yöntemleriyle ile oluşturulan indirgenmiş sistem matrisleri Şekil 1'de gösterilen formatta yeni bir dosyaya ('dosya_ismi.bdf') yazılır.

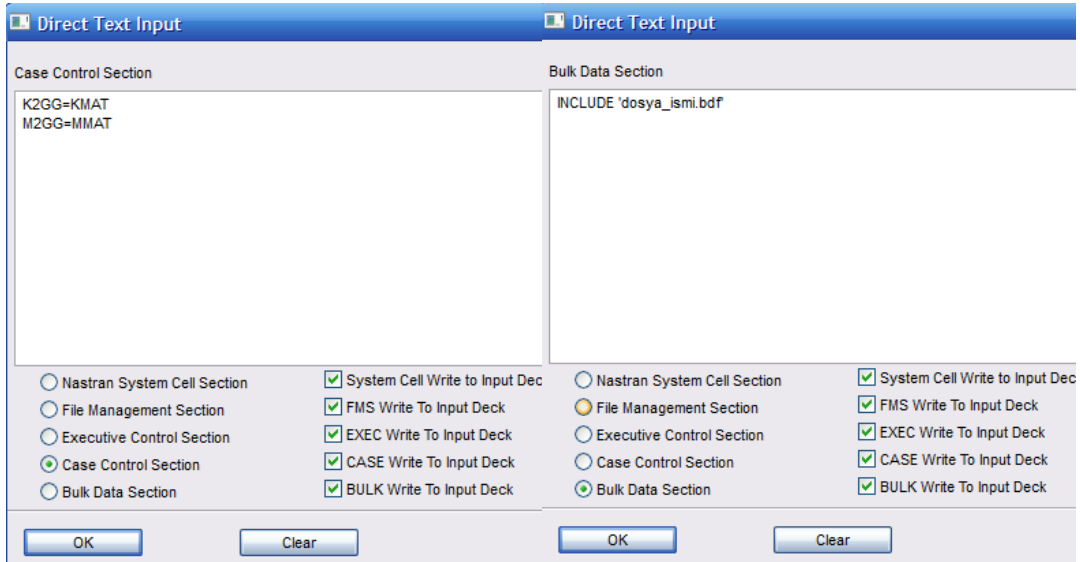
```
DMIG KMAT 0 6 2 2
DMIG*KMAT 10 3
* 10 3 9.587453525D+8

DMIG MMAT 0 6 2 2
DMIG*MMAT 10 3
* 10 3 2.284211654D+3
```

Şekil 1: ".pch" uzantılı dosya formatı

Kütle matrisini düğüm noktalarına atayabilmek için değeri sıfır olan noktasal kütle elemanları modelde tutulan düğüm noktalarında oluşturulur. Katılık matrisini düğüm noktalarına atayabilmek için aynı şekilde değeri sıfır olan yay elemanlar oluşturulur. Modelde tutulan düğüm noktalarındaki serbestlik derecesinin dışındaki tüm serbestlik derecelerine sıfır deplasman sınır koşulu uygulanır. Şekil 1’de belirtilen formatta yaratılan indirgenmiş sistem matrislerinin bilgilerini içeren dosya, noktasal kütle ve yay elemanlarını içeren indirgenmiş modele eklenir. [Kozak, 2006]

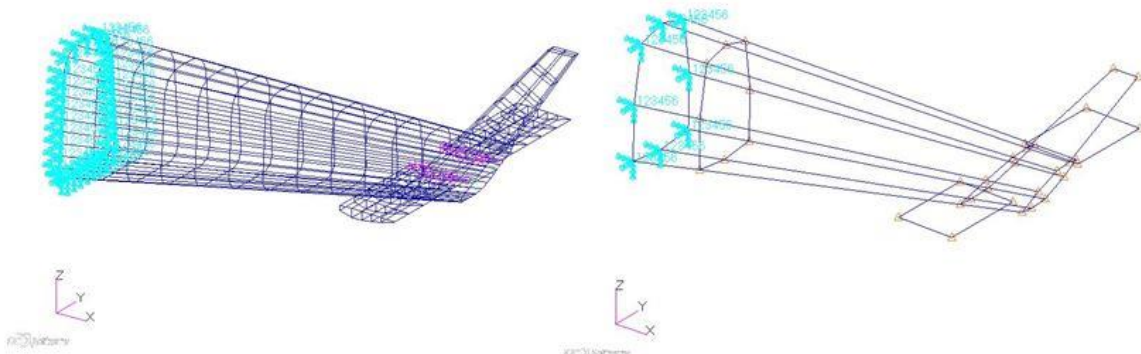
İndirgenmiş modelde tutulacak serbestlik derecelerinde noktasal kütle ve yay elemanlarını oluşturduktan sonra analiz kısmında “direct text input” sekmesine Şekil 2’de gösterilen komutlar yazılarak sistem matrisleri eklenir.



Şekil 2: İndirgenmiş Sistem Matrislerinin Modele Eklenmesi

UYGULAMALAR

Çalışmada kullanılan kuyruk sonlu elemanlar modeli ve indirgenmiş model Şekil 3’te verilmiştir. Kuyruk gövde bağlantısı 6 yönde sıfır deplasman sınır koşulu uygulanarak temsil edilmiştir. Ana model 631 düğüm noktasından oluşmaktadır. 32 düğüm noktasında 6 yönde sıfır deplasman sınır koşulu bulunmaktadır. Yatay dengeleyici ve kuyruk konisi bağlantısı 6 yönde serbestlik derecesine sahip RBE2 elemanlar ile gerçekleştirilmiştir. Bu bağlantılarda toplam 22 düğüm noktası bağımlı serbestlik derecesi olarak seçilmiştir. Deplasman sınır koşulu ve RBE2 elemanlardaki bağımlı düğüm noktaları kütle ve katılık matrislerinden çıkarıldıktan sonra ana modelin boyutu 3462x3462 olarak hesaplanmıştır.



Şekil 3: Ana Model ve İndirgenmiş Model

İndirgenmiş modelde tutulan düğüm noktaları, ana modelin ilk 5 doğal frekanstaki mod şekillerini yansıtabilecek şekilde belirlenmiştir. İndirgenmiş model 34 düğüm noktasından oluşmaktadır. Her bir

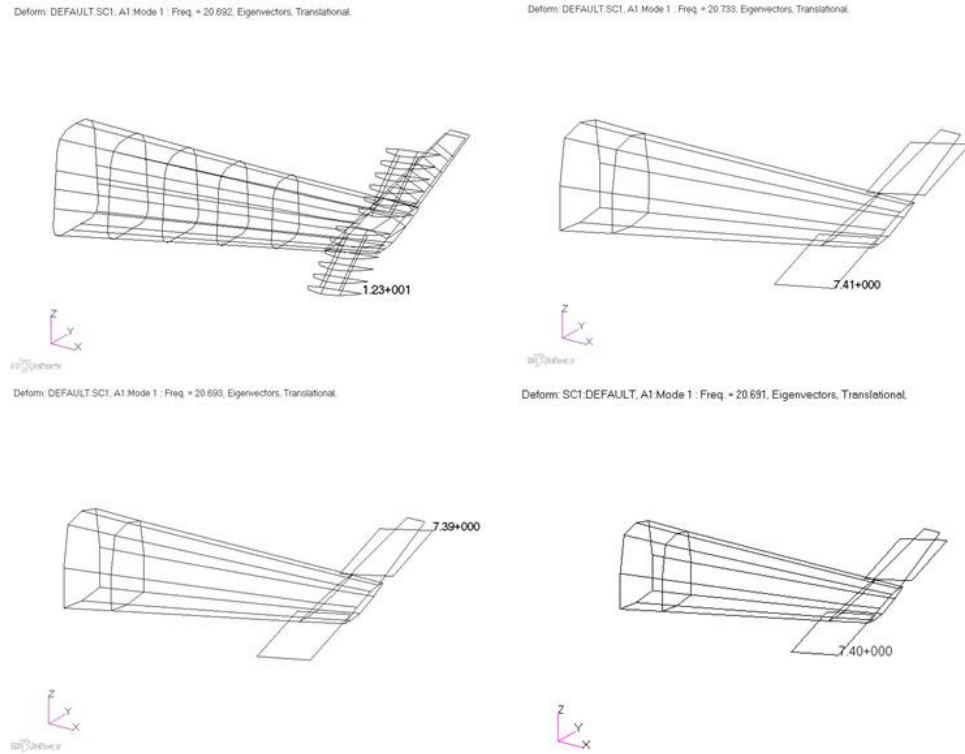
düğüm noktasında sadece 3 yöndeki (2,3 ve 4) serbestlik dereceleri modelde tutulmuştur. Sonuç olarak indirgenmiş modelin boyutu 102x102 kütle ve katılık matrisleriyle temsil edilmiştir.

Yapılan doğal frekans analizleri sonucunda elde edilen sonuçlar ve indirgenmiş modellerle ile ana model arasındaki hata yüzdeleri Çizelge 1'de verilmiştir.

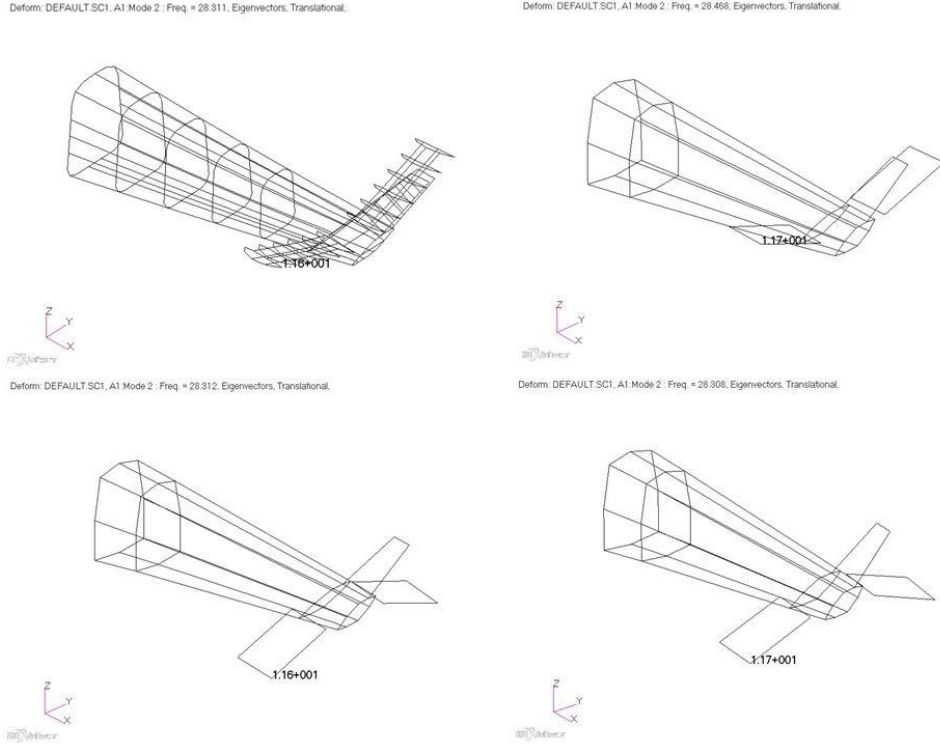
Çizelge 1: Ana Model ve İndirgenmiş Modellerin Doğal Frekans ve Yüzdese Hata Değerleri

Mod	Ana Model 3462x3462	Guyan 102x102		IRS 102x102		Modal 102x102	
	Frekans (Hz)	Frekans (Hz)	Hata %	Frekans (Hz)	Hata %	Frekans (Hz)	Hata %
1	20.6916	20.7328	0.1991	20.6930	0.0072	20.6914	0.0009
2	28.3109	28.4680	0.5547	28.3116	0.0024	28.3078	0.0111
3	28.8544	28.9762	0.4222	28.8594	0.0171	28.8547	0.0011
4	37.0521	37.3592	0.8289	37.0524	0.0009	37.0515	0.0016
5	48.7346	49.0908	0.7308	48.7371	0.0052	48.7326	0.0041

Ana modelin ve indirgenmiş modellerin bazı mod şekilleri ise karşılaştırmalı olarak Şekil 4 ve Şekil 5'te verilmiştir.



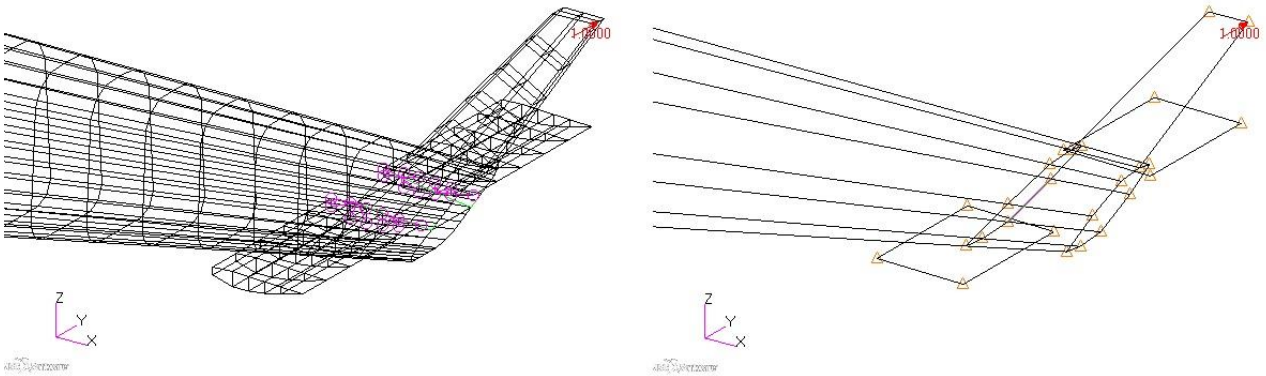
Şekil 4: Mod 1 - Ana Model (sol üst), Guyan (sağ üst), IRS (sol alt), Modal (sağ alt)



Şekil 5: Mod 2 - Ana Model (sol üst), Guyan (sağ üst), IRS (sol alt), Modal (sağ alt)

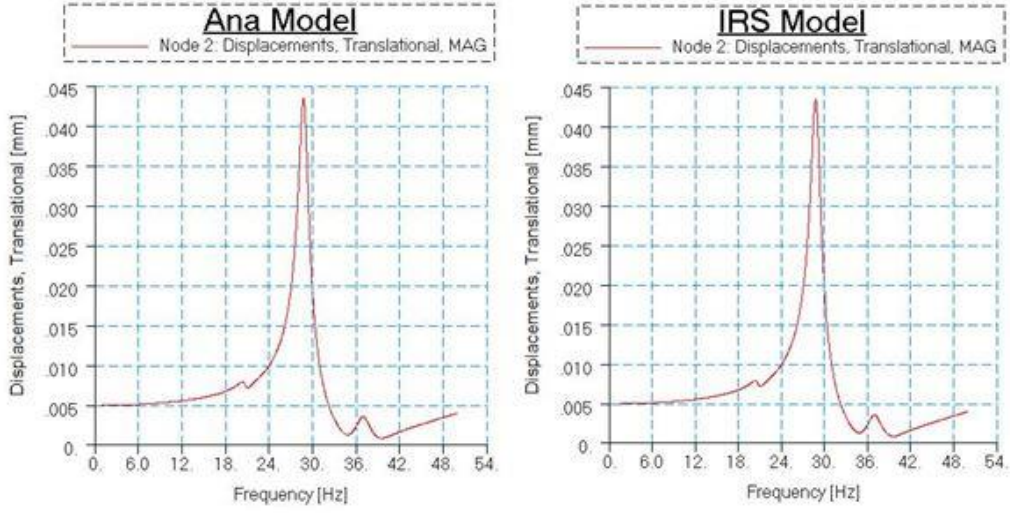
Çizelge 1'de verilen hata yüzdelerini ve indirgenmiş modellerin mod şekilleri göz önüne alındığında en iyi sonucu veren yöntemin Modal Reduction metodu olmasına rağmen ana modelin özvektörlerine ihtiyaç duyduğundan diğer iki yöntemle göre daha fazla hesaplama zamanı gerektirmektedir. IRS metodunun vermiş olduğu sonuçlara bakıldığında ise hata yüzdesinin en az Modal Reduction yöntemi kadar düşük olduğu gözlemlenmiştir. Sonuç olarak bütün metodlar değerlendirildiğinde IRS yönteminin kuyruk sonlu elemanlar modeli için daha makul ve kullanılabilir olduğu belirlenmiştir.

Ana model ve IRS indirgenmiş model ile gerçekleştirilen frekans cevap analizinde dikey dengeleyicinin en üst bölgesinde 2 numaralı düğüm noktasından y yönünde birim kuvvet uygulanmıştır. Şekil 6 +y yönünde uygulanan birim kuvveti göstermektedir. Çözüm frekans aralığı ana modelin ilk 5 doğal frekansını kapsayacak şekilde 0-50 Hz olarak belirlenmiştir. Çözüm çıktısı olarak düğüm noktalarındaki deplasman değerleri istenmiştir.

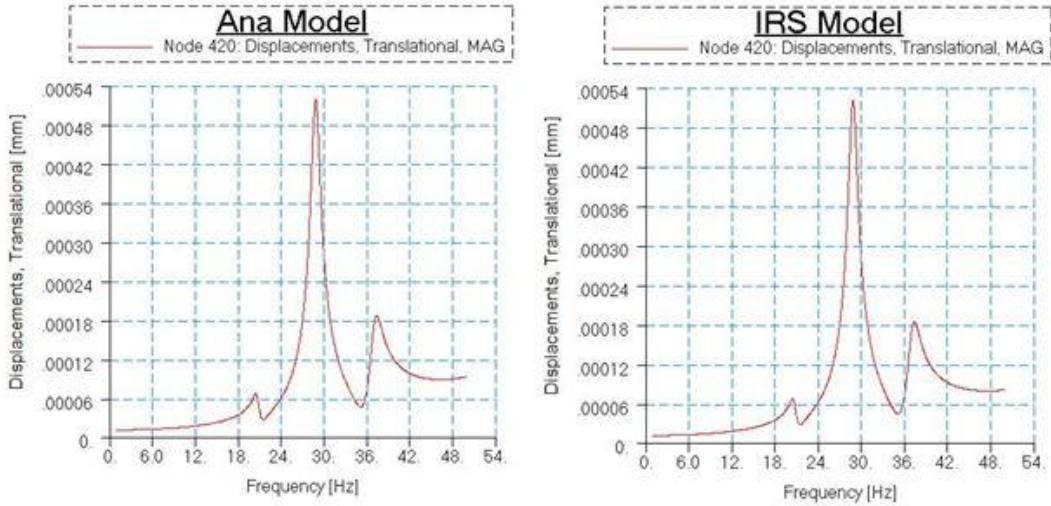


Şekil 6: Birim kuvvet (+y yönü)

Model üzerinde seçilen bazı düğüm noktalarındaki deplasman frekans grafikleri ana model ve IRS model için Şekil 7 ve 8'de verilmiştir. Şekil 7'de verilmiş olan deplasman frekans grafiği kuvvetin uygulandığı 2 numaralı düğüm noktasından alınmıştır.

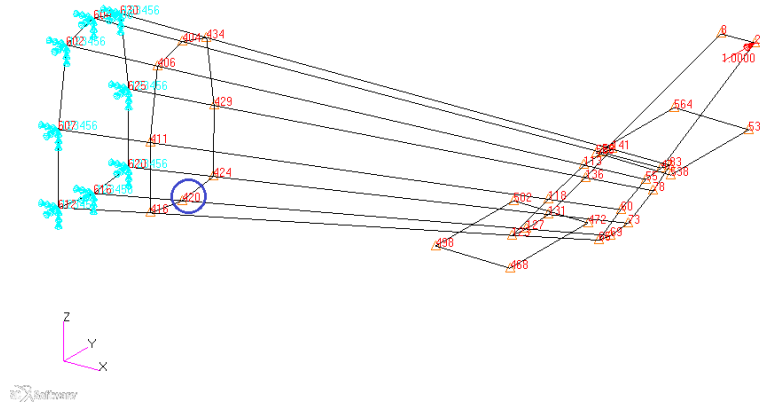


Şekil 7: Düğüm noktası 2 - Deplasman-Frekans Grafiği



Şekil 8: Düğüm noktası 420 - Deplasman-Frekans Grafiği

Şekil 8'de verilen deplasman frekans grafikleri Şekil 9'da gösterilen 420 numaralı düğüm noktasından alınmıştır.



Şekil 9: Düğüm noktası 420

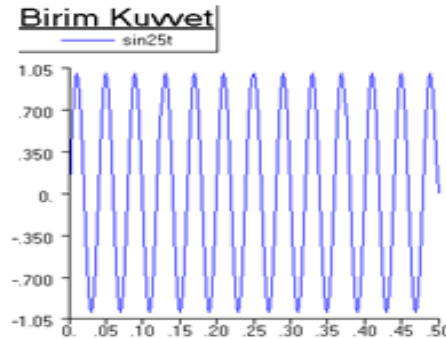
Şekil 7 ve 8’de verilen deplasman frekans grafiklerine bakıldığında ana model ve indirgenmiş IRS model için kuyruk konisi, dikey ve yatay dengeleyiciden alınan bazı düğüm noktaları için sonuçlar birbirine oldukça yakındır. Sonuç olarak indirgenmiş modelin daha sonraki analizlerde kullanılabilmesi değerlendirilmiştir.

Ana modelin ve indirgenmiş IRS modelin analiz süreleri farklı frekans çözünürlüklerine göre Çizelge 2’de verilmiştir. Analiz süreleri göz önüne alındığında frekans çözünürlüğü azalırken ana modelin çözüm süresi katlanarak artmaktadır. Bunun aksine IRS modelin çözüm süresi çok fazla artış göstermemektedir.

Çizelge 2: Ana model ve IRS model frekans cevap analiz süresi değerleri

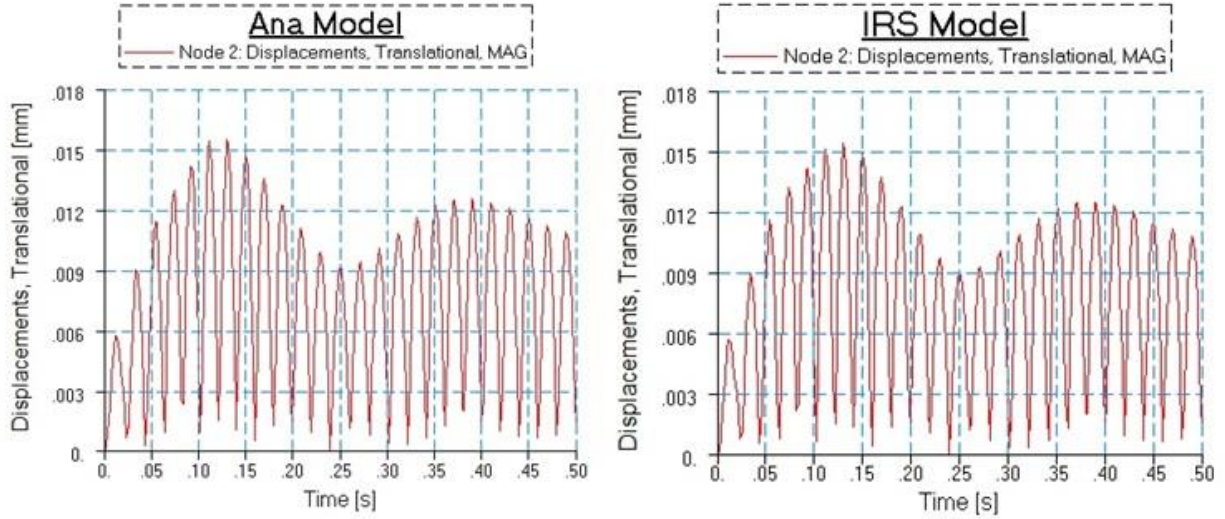
Model	Frekans cevap analizinde kullanılan frekans çözünürlüğü			
	0.25 [Hz]	0.1 [Hz]	0.05 [Hz]	0.025 [Hz]
Analiz Süresi [s]				
Ana Model	4.83	6.90	10.32	18.18
IRS Model	2.74	2.86	3.08	3.52

Ek olarak, ana model ve IRS indirgenmiş model ile gerçekleştirilen zamana bağlı analizlerde dikey dengeleyicinin en üst düğüm noktasından y yönünde 25 Hz frekans değerinde sinüs dalgası içeren birim kuvvet 0.5 saniye boyunca uygulanmıştır. Çözüm çıktısı olarak düğüm noktalarındaki deplasman değerleri istenmiştir.

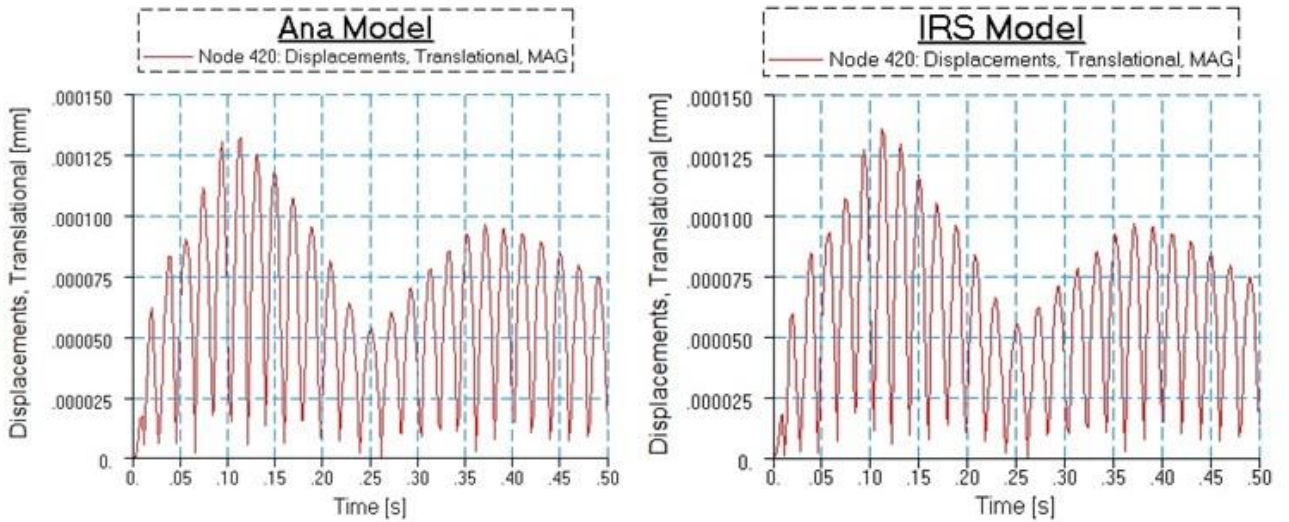


Şekil 10: Birim Kuvvet-Zaman Grafiği

Frekans cevap analizi sonucunda seçilen 2 ve 420 numaralı düğüm noktalarındaki zamana bağlı deplasman grafikleri ana model ve IRS model için Şekil 11 ve 12’de verilmiştir.



Şekil 11: Düğüm noktası 2 - Deplasman-Zaman Grafiği



Şekil 12: Düğüm noktası 420 - Deplasman-Zaman Grafiği

Şekil 11 ve 12'de verilmiş olan zamana bağlı deplasman grafiklerine bakıldığında ana model ve indirgenmiş IRS model için kuyruk konisi, dikey ve yatay dengeleyiciden alınan bazı düğüm noktaları için sonuçlar birbirine oldukça yakındır. Sonuç olarak indirgenmiş modelin daha sonraki analizlerde kullanılabileceği değerlendirilmiştir.

Ana modelin ve indirgenmiş IRS modelin zamana bağlı analiz süreleri farklı zaman aralıklı çözümlere göre Çizelge 3'te verilmiştir. Analiz süreleri göz önüne alındığında çözüm zaman adımı azalırken ana modelin çözüm süresi katlanarak artmaktadır. Bunun aksine IRS modelin çözüm süresi neredeyse artış göstermemektedir.

Çizelge 3: Ana model ve IRS model zamana bağlı analiz süresi değerleri

Model	Analiz Süresi [s]			
	0.005 [s]	0.002 [s]	0.001 [s]	0.0005 [s]
Ana Model	3.96	4.84	6.15	8.99
IRS Model	2.87	2.98	3.09	3.31

SONUÇ

Bu çalışmada literatürde yer alan model indirgeme yöntemlerini bir helikopter alt yapısı olan kuyruk sonlu elemanlar modeline uygulayarak daha düşük dereceli modeller elde edilmiştir. Ana model ve indirgenmiş modellerde gerçekleştirilen doğal frekans analizi sonucunda elde edilen ilk 5 doğal frekans için karşılaştırma yapılmıştır. Yapılan kıyaslamaların sonucunda ana modelin doğal frekanslarına en yakın sonucu veren ve mod şekillerini en iyi temsil eden yöntem olarak IRS metodu seçilmiştir. IRS yöntemiyle elde edilen indirgenmiş model ile gerçekleştirilen frekans cevap ve zamana bağlı analizlerin sonucunda bazı düğüm noktalarındaki deplasman değerlerinin ana model ile kıyaslaması yapılmıştır. Ana modelin ve indirgenmiş modelin doğal frekans sonuçları ile frekans cevap ve zamana bağlı analizlerden elde edilen deplasman değerlerinin birbirine yakın geldiği gözlemlenmiştir. Sonuçlar göz önüne alındığında IRS model indirgeme yöntemi kullanılarak ana modelin dinamik karakteristiğini yansıtabilen düşük derecede bir model elde edilmiştir. Ek olarak çeşitli frekans çözünürlüklerine ve zaman aralıklarına göre ana modelin ve indirgenmiş modelin sırasıyla frekans cevap ve zamana bağlı analiz süreleri karşılaştırılmıştır. Yapılan kıyaslamalar neticesinde indirgenmiş modelin çok tekrar gerektiren tasarım optimizasyonu, aeroelastik analizlerde kullanılabileceği belirlenmiştir.

Kaynaklar

- Downs, B., 1979. *Accurate Reduction of Stiffness and Mass Matrices for Vibration Analysis and a Rationale for Selecting Master Degrees of Freedom.*, Journal of Mechanical Design, Cilt., 102(2), s. 412-416.
- Guyan, R. J., 1965. *Reduction of Stiffness and Mass Matrices.*, AIAA J. 3, USA.
- Henshell, R. D. And Ong, J. H., 1975. *Automatic Masters for Eigenvalue Economization.*, Earthquake Engineering Structural Dynamics, Cilt., 3, s. 375-383.
- Kammer, D. C., 1987. *Test-Analysis-Model Development using an Exact Modal Reduction.*, The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis., 2(4): s.174-179.
- Kozak, M. T., 2006. *Investigation of Model Updating Techniques and Their Applications to Aircraft Structures.* Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ.
- Levy, R., 1971. *Guyan Reduction Solutions Recycled for Improved Accuracy.*, Nastran-Users Experiences, NASA, s. 201-220.
- O'Callahan, J., 1989. *A Procedure for an Improved Reduced System (IRS) Model.*, Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, Nevada.
- Raymund, M., Shah, V. N., 1982. *Analytical Selection of Masters for the Reduced Eigenvalue Problem.*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Cilt. 18, s.89-98