VI. ULUSAL HAVACILIK VE UZAY KONFERANSI UHUK-2016-054

28-30 Eylül 2016, Kocaeli Üniversitesi, Kocaeli

HELİKOPTER KANADININ ÇIRPINMA ANALİZİ

Orhun Çiçek[1] ve Altan Kayran[2]
Orta Doğu Teknik Üniversitesi,
Ankara

ÖZET

Bu çalışmada döner kanatlar üzerindeki çırpınma kararsızlığının incelenmesi amaçlanmıştır. Çırpınma kararsızlığı daha çok sabit kanatlar için önem teşkil etse de, döner kanatların da çırpınma kararsızlığına girmesi mümkündür. Öyle ki, sertifikasyon otoriteleri tarafından helikopterin çırpınma kararsızlığına girmediği test ya da analiz sonuçları ile gösterilmesi istenmektedir. Dolayısı ile bu çalışma bir helikopterin uçuş testlerine gitmeden önce analitik yöntem ile çırpınma kararsızlığını belirleme, ayrıca belirlenen kararlılık sınırları içerisinde helikopter kanadının yapısal tasarımını en uygun koşula getirmede yardımcı olmayı amaçlamaktadır. Bu çalışmada gerçekleştirilecek olan çırpınma analizleri, literatürde klasik çırpınma olarak da adlandırılan, hatveleme ve flaplama serbestliklerinin birleşik hareketleri incelenerek gerçekleştirilecektir. Analizlerde kullanılacak olan yapısal model elastik bir kanadın flaplama ve hatveleme serbestlik denklemlerinden oluşacaktır. Aerodinamik model ise Theodersen'in kesitler için olan aerodinamik modeli ile oluşturulacaktır. Analizler helikopter askı durumundayken, rotorun dönüş esnasındaki en kritik azimutunda, anlık durdurulmuş pozisyonda incelenecektir. Veter yönündeki ağırlık merkezi konumu değiştirilerek gerçekleştirilecek olan analizlerin sonucuna göre sönüm değerleri elde edilecek ve bu sönüm değerlerine göre çırpınma kararlılık sınırları belirlenecektir.

GİRİŞ

Döner kanatların aeroelastik yapıları incelenirken karşılaşılan tehlikeli durumlardan biri de çırpınma kararsızlığıdır. Bu kararsızlık hava ile yapının elastik modları arasındaki enerji transferi sonucunda ortaya çıkmaktadır. Döner kanatların çırpınma analizlerini sabit kanat yöntemiyle çözmek yanlış olur. Veter yönündeki ağırlık merkezinin elastik eksene olan uzaklığı sonucunda merkez kaç kuvveti, flaplama ve hatveleme serbestliklerinin birleşik olmasını sağlar. Ayrıca rotorun dönüşünden dolayı hareket denklemlerine tenis raketi etkisi de dahil edilir. İleri hız analizlerinde oluşan periyodik kuvvetlerin varlığı da döner kanat analizlerini sabit kanatlardan ayırmaktadır [Chopra, 2011]. Döner kanatlardaki çırpınma kararsızlığından kaçınmak amacı ile hemen hemen her helikopterde ağırlık balansı yapılmaktadır. Kanadın ucuna yük taşımayan bir ağırlık elamanı koyularak yapılan bu balans sayesinde, veter yönündeki ağırlık merkezi elastik eksenin önüne doğru çekilmeye çalışılmakta ve bu sayede çırpınma kararlılığı sağlanmaktadır [Bramwell, 2001].

---

[1]Y. Lisans Öğrencisi, Havacılık ve Uzay Müh. Böl E-posta: orcicek@gmail.com
[2]Prof. Dr., Havacılık ve Uzay Müh. Böl., E-posta: akayran@metu.edu.tr

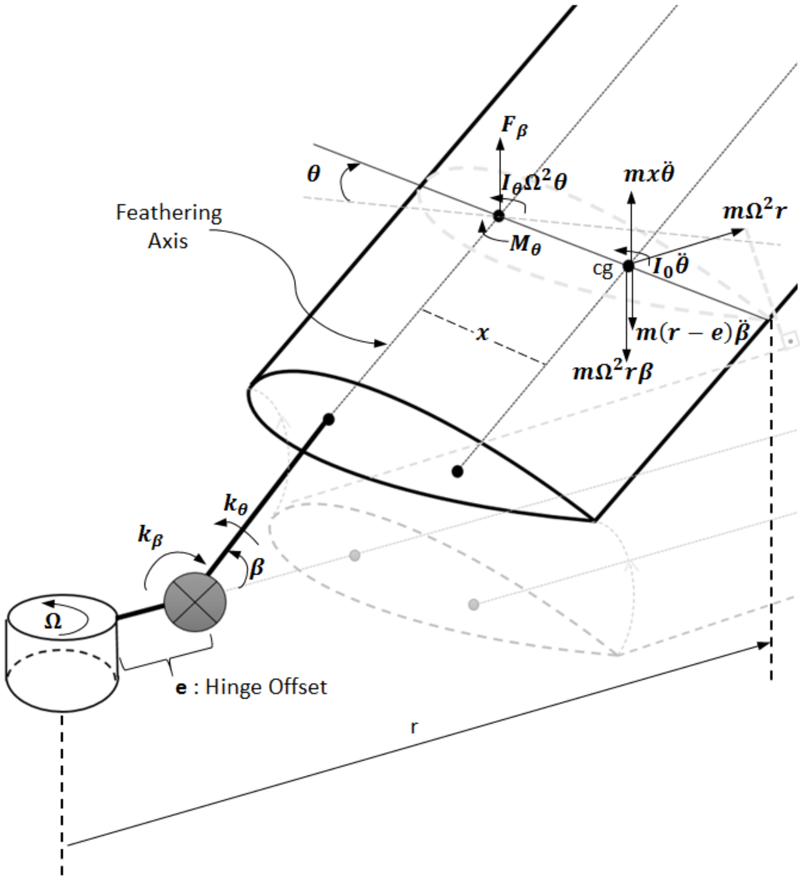
Çırpınma analizlerini gerçekleştirmek için literatürde üç temel çözüm tekniği bulunmaktadır. Bunlardan birincisi k metodu olarak adlandırılmaktadır. Bu metotta basit harmonik hareketi temel alan aerodinamik model kullanılmakta ve çözüm olarak da basit harmonik hareket varsayılmaktadır. Bu metot diğerleri arasında en basit yöntem olmakla birlikte, sadece çırpınma noktasında, yani sönümlemenin sıfır olduğu noktada doğru sonuç vermektedir. Bu metotta sisteme yapay sönümleme eklenmektedir. Bunun sebebi sistem için varsayılan harmonik hareketin devamlılığını sağlayabilmektir [Beaubien, 2006]. Bir diğer yöntem olan p-k metodunda ise aerodinamik olarak basit harmonik hareket kullanılırken, çözüm için genel hareket varsayılmaktadır. Bu yöntem özellikle sabit kanatlar için çok iyi sonuç vermektedir. Fakat çözüm için belirlenen başlangıç indirgenmiş frekans (k) değerinin seçilişine göre sonuç farklılık gösterebilmektedir. Yaygın olarak kullanılan sonuncu yöntem ise p metodudur. Bu metot hem aerodinamik hem de çözüm için genel hareket varsayımı üzerine oluşturulmuştur. Aerodinamik olarak diğer yöntemlere göre daha karmaşık olduğu için çözümü daha zor olsa da, sönüm değerini her noktada doğru vermektedir [Nibbelink, 1992]. Her noktada doğru sonuç verdiği için ve tekrarlamalı çözüm gerektirmeden tek bir aşamada çözüldüğünden dolayı hızlı çözüm sağladığı için bu makalede p metodu kullanılacaktır.

Çırpınma kararlılığı analizleri askı durumundaki helikopter rotorunun dönüş esnasındaki en kritik azimutunda sabit kesitli elastik kanat kullanarak üç boyutlu bir model ile gerçekleştirilecektir. Kesit denklemlerinden kanat genişliği boyunca olan üç boyutlu denklemlere geçiş Galerkin metodu ile gerçekleştirilecektir. Analizlerde kullanılacak olan sabit kesitin özellikleri UH60 helikopter kanadının özelliklerinin ortalaması alınarak oluşturulacaktır. Belirlenecek olan kesitlerdeki yapısal denklemler Theodersen'in teorisindeki aerodinamik denklemlerle birleştirilecek ve tek bir özdeğer problemi haline dönüştürülecektir. Daha sonra özdeğer problemi çözümünden elde edilen köklere bakılarak her bir modun frekansı ve sönümleme değeri belirlenecektir. Analizler veter yönündeki ağırlık merkezinin yeri değiştirilerek tekrarlanacaktır. Yapılan analizler sonucunda sönümleme değerinin negatiften pozitife geçtiği sınır noktası çırpınma kararlığı sınır noktası olarak belirlenecektir. Analizler çözüm hızı zamana bağlı analizlere göre daha iyi olduğu için özdeğer problemi formunda çözülerek gerçekleştirilecektir.

YÖNTEM

Yapısal Model

Elastik rotor kanadının iki boyutlu kesiti için flaplama ve hatveleme serbestliklerinin kuvvet denkliği aşağıdaki şekilde üç boyutlu biçimde incelenebilir. (Şekil 1)



Şekil 1: Kanat Kesiti İçin Flaplama ve Hatveleme Kuvvet Denkliği

Yukarıdaki şekildeki kuvvet denkliğine göre kanadın kesiti için flaplama ve hatveleme hareket denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$m\ddot{h} + mx_{cg}\ddot{\theta} - mx_{cg}\left(\theta + r\frac{d\theta}{dr}\right) + EI\frac{d^4h}{dr^4} - \frac{d}{dr}\left(m\Omega^2\int_r^R ydy\frac{dh}{dr}\right) = L_h \qquad (1)$$

$$mk_m^2\ddot{\theta} + mx_{cg}\ddot{h} + m\Omega^2k_m^2\theta + mx_{cg}\Omega^2 r\frac{dh}{dr} - GJ\frac{d^2\theta}{dr^2} - k_m^2\frac{d}{dr}\left(m\Omega^2\int_r^R ydy\frac{d\theta}{dr}\right) = M_\theta \qquad (2)$$

Denklem (1) kesit üzerindeki kuvvet denkliğine göre, denklem (2) ise kesit üzerindeki moment denkliğine göre elde edilmiştir. Denklem (1) ve denklem (2) içerisinde bulunan aerodinamik kuvvet ve momentler denklemlerden çıkarıldığı zaman elastik kanat kesiti için yapısal model elde edilir. Yapısal modelin doğruluğunu kontrol etmek amacı ile UH60 kanadının özellikleriyle (Çizelge 1) aerodinamik kuvvetler sıfır kabul edilerek çözüm yapıldı ve sonuçlar Dymore çoklu cisim dinamiği programında modellenen menteşeli döner kanadın doğal frekans sonuçları ile karşılaştırıldı. Çizelge 2 deki sonuçlara göre yapısal model ile Dymore sonuçları özellikle flaplama modlarında ve hatvelemenin ilk modunda birbirine yakınlık göstermektedir.

Çizelge 1: UH60 Kanat Kesit Özellikleri

Parametre	Değer	Birim
m	0.72	kg/m
e	0.38	m
R	8.18	m
ρ	1.20	kg/m^3
c	0.53	m
x	0	m
Ω	27.02	rad/s
k_m^2	$5.89 * 10^{-4}$	m
EI	65390	Nm^2
GJ	70820	Nm^2

Çizelge 2: Yapısal Denklem ile Dymore Modeli Doğal Frekans Karşılaştırması

Mod #	Dymore [rad/s]	Yapısal Denklem [rad/s]	Mod Tipi
1	27.99	27.99	Flaplama
2	103.78	103.80	Flaplama
3	2596.65	2598.16	Hatveleme
4	7789.51	7951.76	Hatveleme

Kesit denklemlerinden kanat genişliği boyunca olan üç boyutlu denklemlere geçiş Galerkin metodu ile sağlandı. Flaplama ve hatveleme için ilk iki mod şekilleri varsayılarak hareket terimleri denklem (3) ve (4) te görüldüğü gibi ifade edildi.

$$h(r,t) = \gamma_{h_1}(r)q_{h_1}(t) + \gamma_{h_2}(r)q_{h_2}(t) \tag{3}$$

$$\theta(r,t) = \gamma_{\theta_1}(r)q_{\theta_1}(t) + \gamma_{\theta_2}(r)q_{\theta_2}(t) \tag{4}$$

Varsayılan mod şekillerinin kanat genişliği boyunca değişimi aşağıdaki formüllerle ifade edildi.

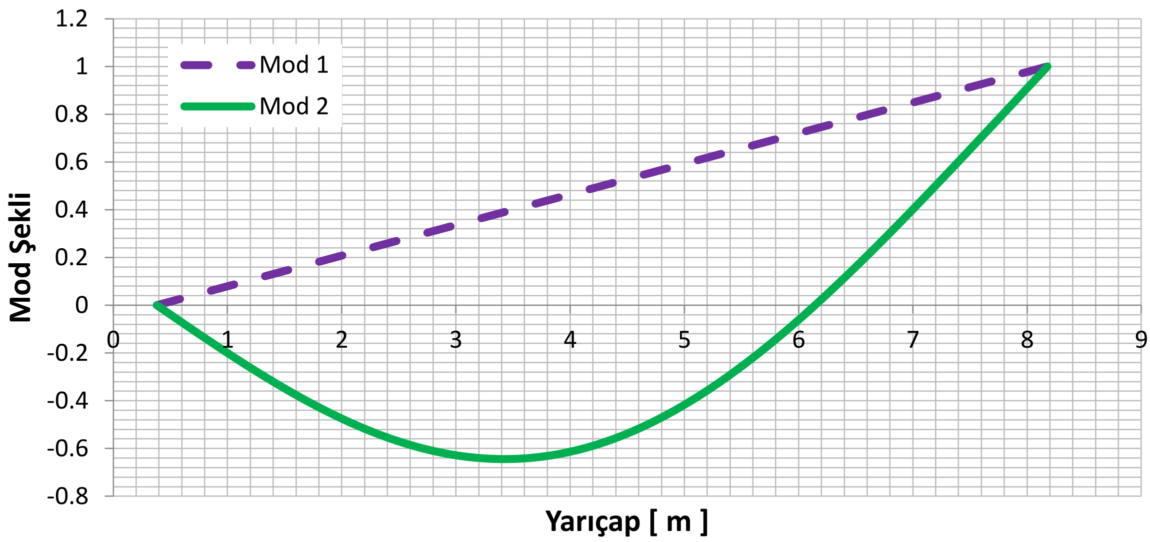
$$\gamma_{h_1}(r) = r \tag{5}$$

$$\gamma_{h_2}(r) = \frac{1}{16}(15r^7 - 63r^5 + 105r^3 - 41r) \tag{6}$$

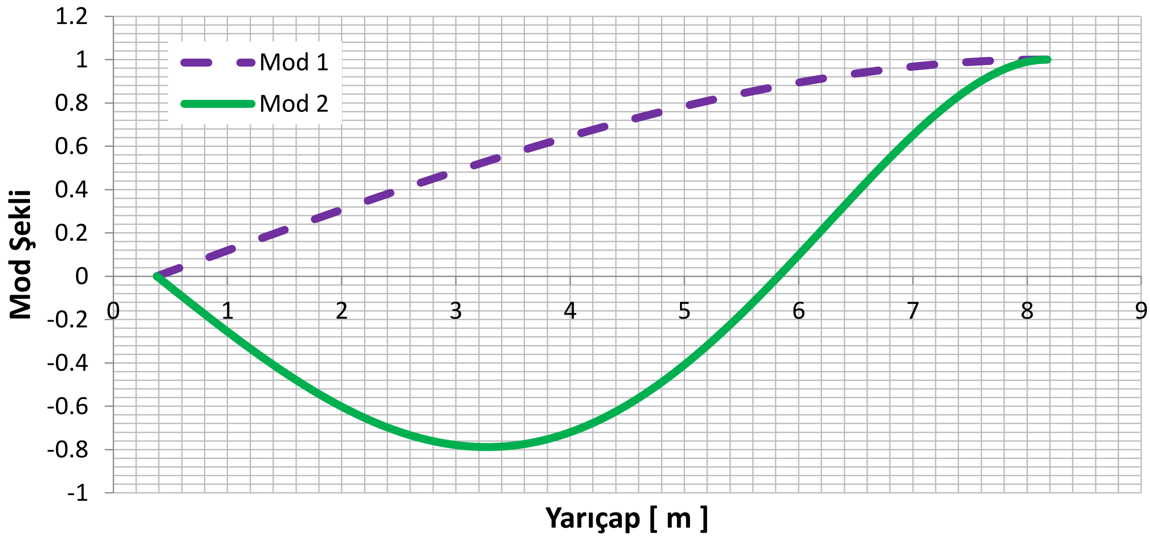
$$\gamma_{\theta_1}(r) = \frac{1}{2}(3r - r^3) \tag{7}$$

$$\gamma_{\theta_2}(r) = \frac{1}{32}(290r^3 - 153r^5 - 105r) \tag{8}$$

Flaplama mod şekilleri bir uçta menteşeli diğer uçta serbest sınır koşulunu sağlarken, hatveleme mod şekilleri ise bir uçta ankastre diğer uçta serbest sınır koşulunu sağlamaktadır. Varsayılan mod şekillerinin kanat boyunca grafiksel olarak değişimi Şekil 2 ve Şekil 3 te gösterilmiştir.



Şekil 2: Flaplama Mod Şekilleri



Şekil 3: Hatveleme Mod Şekilleri

Aerodinamik Model

Theodersen'in aerodinamik teorisi sıkışmayan akışta basit harmonik salınımlı ince kanatlar için türetilmiştir. Teorinin türetilmesi lineer potansiyel-akış teorisinin temellerine dayanır. Taşıma kuvveti hem sirkülar hem de sirkülar olmayan terimleri içerirken, çeyrek veter etrafındaki hatveleme momenti tamamen sirkülar olmayan terimlerden oluşur. Theodersen'in aerodinamik teorisine göre taşıma kuvveti ve hatveleme momenti denklemleri denklem (9) ve (10) da verilmiştir.

$$L_h = 2\pi\rho UbC(k)\left[\dot{h} + U\theta + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\theta}\right] + \pi\rho b^2\left(\ddot{h} + U\dot{\theta} - ba\ddot{\theta}\right) \quad (9)$$

$$M_\theta = -\pi\rho b^3\left[\frac{1}{2}\ddot{h} + U\dot{\theta} + b\left(\frac{1}{8} - \frac{a}{2}\right)\ddot{\theta}\right] \quad (10)$$

Denklemlerde görülen $C(k)$ sirkülar kısımı oluşturan terimdir ve karmaşık sayıdır. $C(k)$, indirgenmiş frekans (k) değerine bağlıdır ve denklem (11) de gösterildiği gibi hesaplanmıştır.

$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} \tag{11}$$

Denklem (11) de görülen $H_1^{(2)}(k)$ terimi ikinci dereceden Hankel fonsiyonudur ve denklem (12) de görüldüğü gibi birinci ve ikinci dereceden Bessel fonsiyonları şeklinde ifade edilebilir.

$$H_1^{(2)}(k) = J_n(k) - iY_n(k) \tag{12}$$

Denklemler içerisinde görülen indirgenmiş frekans değeri iki şekilde doğru olarak girilebilir. Birinci yöntem p-k metodu olarak bilinmektedir. Başlangıç olarak bir k değeri girilip çözüm yapılır. Çözüm sonucu elde edilen frekansa göre $k = bp/U$ formülü ile yeni bir k değeri hesaplanır ve girilen ile elde edilen k değeri arasında belli bir tolerans miktarı kadar fark kalana kadar bu işlem tekrarlanır. İstenilen tolerans miktarına ulaşınca elde edilen k değeri o adım için kullanılması gereken doğru k değeri olarak kabul edilir. İkinci ve bu makalede kullanılan yöntem ise p metodu olarak bilinmektedir. Bu yöntemde k değeri için bir tahmin yapılmaz ve olduğu gibi $k = bp/U$ yazılır, bu şekilde denklemin bilinmeyeni olan frekans değeri p özdeğer probleminin içerisine monte edilmiş olur.

Birleşik Çözüm

Yapısal modelin içerisinde bulunan aerodinamik terimler Theodersen'in aerodinamik teorisine göre yazıldığında denklem (13) ve (14) elde edilir. Hatveleme ekseni çeyrek veterden geçtiği için aerodinamik denklemler içerisinde bulunan a terimi "-0.5" olarak alınmıştır. Ayrıca rotorun dönüş hızından dolayı her kesit farklı hız göreceği için denklemler içerisinde bulunan hız terimi de $U = \Omega r$ şeklinde yazılmıştır.

$$\begin{aligned}(m - \pi\rho b^2)\ddot{h} + \left(mx_{cg} - \frac{1}{2}\pi\rho b^3\right)\ddot{\theta} - 2\pi\rho\Omega rbC(k)\dot{h} - (2\pi\rho\Omega rb^2C(k) + \pi\rho b^2\Omega r)\dot{\theta} + EI\frac{d^4h}{dr^4} \\ - \frac{d}{dr}\left(m\Omega^2\int_r^R ydy\frac{dh}{dr}\right) - mx_{cg}\left(\theta + r\frac{d\theta}{dr}\right) - 2\pi\rho\Omega^2r^2bC(k)\theta = 0\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\left(mx_{cg} + \frac{1}{2}\pi\rho b^3\right)\ddot{h} + \left(mk_m^2 + \frac{3}{8}\pi\rho b^4\right)\ddot{\theta} + \pi\rho b^3\Omega r\dot{\theta} + mx_{cg}\Omega^2r\frac{dh}{dr} + m\Omega^2k_m^2\theta - GJ\frac{d^2\theta}{dr^2} \\ - k_m^2\frac{d}{dr}\left(m\Omega^2\int_r^R ydy\frac{d\theta}{dr}\right) = 0\end{aligned} \tag{14}$$

Bir sonraki aşamada ise Galerkin metodu uygulanmıştır. Galerkin metoduna göre, hareketler kanat boyunca değişen mod şekillerine göre ifade edildikten sonra kuvvet denkliğinden oluşan denklem (13) $\left[\gamma_{h_m}(r)dr\right]$ ile çarpılmış ve moment denkliğinden oluşan denklem (14) $\left[\gamma_{\theta_k}(r)dr\right]$ ile çarpılmış ve kanat boyunca integrali alınmıştır. Böylece kesit denkleminden üç boyutlu denkleme geçiş sağlanmıştır. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra denklem (15) teki genel çözüm formu elde edilmiştir. Denklem (15) içerisinde bulunan matrislerin elemanlarının içerikleri ekler bölümünde verilmiştir.

$$[M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + [K]q = 0 \tag{15}$$

Çözümlerde harmonik hareket gibi bir varsayımda bulunulmadığı için q parametresi denklem (16) da gösterildiği gibi ifade edilebilir.

$$q(t) = \bar{q}e^{pt}$$
$$\dot{q}(t) = p\bar{q}e^{pt} = pq(t) \quad (16)$$
$$\ddot{q}(t) = p^2\bar{q}e^{pt} = p^2q(t)$$

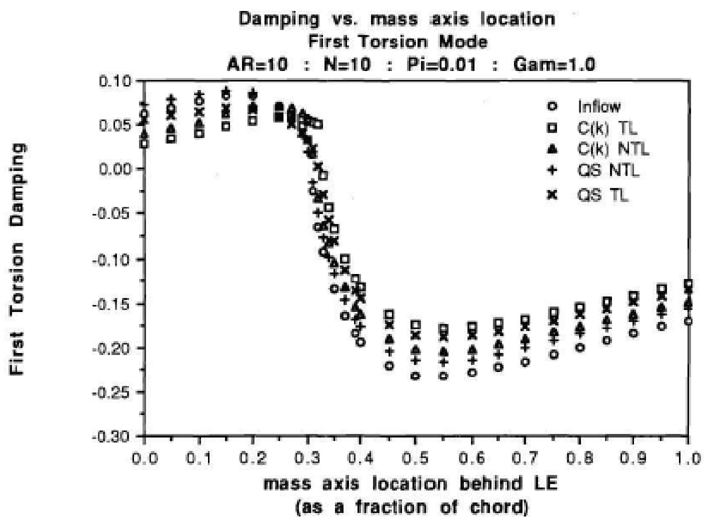
Denklem (16) da verilen gösterim denklem (15) içerisine monte edildiği zaman aşağıdaki çözüm formu elde edilir.

$$\{p^2[M] + p[C] + [K]\}q = 0 \quad (17)$$

$$\det(p^2[M] + p[C] + [K]) = 0 \quad (18)$$

Denklem (18) deki determinantın çözümünden elde edilen köklerin sanal kısımları frekansı verirken, reel kısımları da sönümleme değerini vermektedir.

Yapılacak olan analizlerin sonucunda Şekil 4 te gösterilen örnekte olduğu gibi sonuçların elde edilmesi planlanmaktadır. Şekildeki sonuçlar rotorun farklı modlarının, ileri uçuş hızına göre sönüm değeri değişimini göstermektedir. Sıfır sönüm noktasını kesen çizgiler o modlar için çırpınma kararlılık sınırını belirlemektedir. Literatürde yaygın olarak kullanılan çırpınma kararlılığı değişimi gözlemleme yöntemi bu şekildedir.



Şekil 4: Farklı Modlar İçin Sönüm Değerinin Veter Konumuna Göre Değişimi [Nibbelink, 1992]

SONUÇ

Bu çalışmada bir helikopterin çırpınma serbestliğinin sınırlarını belirlemek amacıyla oluşturulan yapısal ve aerodinamik modellerden bahsedilmiştir. Bu modellerin birleşik çözüm yöntemi kullanılarak yazılacak olan bir bilgisayar programı sayesinde devam eden bir proje sürecinde, rotor tasarımındaki değişikliklerin çırpınma kararsızlığına olan etkisi hemen anlaşılabilecek ve tasarım bu şekilde yönlendirilebilecektir. Ayrıca helikopterin sertifikasyonu açısından da önem teşkil eden çırpınma kararsızlığının olmadığının otoritelere belirtilmesi de bu programın gerçekleştireceği analizler sonucunda olacaktır. Özdeğer çözümü ile gerçekleşecek analizler, zamana bağlı analizlerine göre kıyaslandığında analiz süresinden tasarruf sağlayacaktır.

Kaynaklar

Beaubien, R., J., 2006., Improved Frequency Domain Flutter Analysis Using Computational Fluid Dynamics, Carleton University Yüksek Lisans Tezi

Bramwell, A. R. S., Done, G., Balmford, D., 2001., *Bramwell's Helicopter Dynamics*

Chopra, I., Datta, A., 2011., *Helicopter Dynamics*

Nibbelink, B., D., 1992., *Finite-State Inflow Applied to Aeroelastic Flutter of Fixed and Rotating Wings*, Georgia Institute of Technology Yüksek Lisans Tezi

EKLER

Ağırlık Matrisi

$$M_{1,1} = \int_e^R (m - \pi\rho b^2)\gamma_{h_1}^2 dr$$

$$M_{1,2} = 0$$

$$M_{1,3} = \int_e^R \left(mx_{cg} - \frac{1}{2}\pi\rho b^3\right)\gamma_{h_1}\gamma_{\theta_1} dr$$

$$M_{1,4} = \int_e^R \left(mx_{cg} - \frac{1}{2}\pi\rho b^3\right)\gamma_{h_1}\gamma_{\theta_2} dr$$

$$M_{2,1} = 0$$

$$M_{2,2} = \int_e^R (m - \pi\rho b^2)\gamma_{h_2}^2 dr$$

$$M_{2,3} = \int_e^R \left(mx_{cg} - \frac{1}{2}\pi\rho b^3\right)\gamma_{h_2}\gamma_{\theta_1} dr$$

$$M_{2,4} = \int_e^R \left(mx_{cg} - \frac{1}{2}\pi\rho b^3\right)\gamma_{h_2}\gamma_{\theta_2} dr$$

$$M_{3,1} = \int_e^R \left(mx_{cg} + \frac{1}{2}\pi\rho b^3\right)\gamma_{h_1}\gamma_{\theta_1} dr$$

$$M_{3,2} = \int_e^R \left(mx_{cg} + \frac{1}{2}\pi\rho b^3\right)\gamma_{h_2}\gamma_{\theta_1} dr$$

$$M_{3,3} = \int_e^R \left(mk_m^2 + \frac{3}{8}\pi\rho b^4\right)\gamma_{\theta_1}^2 dr$$

$$M_{3,4} = 0$$

$$M_{4,1} = \int_e^R \left(mx_{cg} + \frac{1}{2}\pi\rho b^3\right)\gamma_{h_1}\gamma_{\theta_2} dr$$

$$M_{4,2} = \int_e^R \left(mx_{cg} + \frac{1}{2}\pi\rho b^3\right)\gamma_{h_2}\gamma_{\theta_2} dr$$

$$M_{4,3} = 0$$

$$M_{4,4} = \int_e^R \left(mk_m^2 + \frac{3}{8}\pi\rho b^4\right)\gamma_{\theta_2}^2 dr$$

Sönümleme Matrisi

$$C_{1,1} = \int_e^R -2\pi\rho\Omega r b C(k)\gamma_{h_1}^2 dr$$

$$C_{1,2} = 0$$

$$C_{1,3} = \int_e^R -(2\pi\rho\Omega r b^2 C(k) + \pi\rho b^2 \Omega r)\gamma_{h_1}\gamma_{\theta_1} dr$$

$$C_{1,4} = \int_e^R -(2\pi\rho\Omega r b^2 C(k) + \pi\rho b^2 \Omega r)\gamma_{h_1}\gamma_{\theta_2} dr$$

$$C_{2,1} = 0$$

$$C_{2,2} = \int_e^R -2\pi\rho\Omega r b C(k)\gamma_{h_2}^2 dr$$

$$C_{2,3} = \int_e^R -(2\pi\rho\Omega r b^2 C(k) + \pi\rho b^2 \Omega r)\gamma_{h_2}\gamma_{\theta_1} dr$$

$$C_{2,4} = \int_e^R -(2\pi\rho\Omega r b^2 C(k) + \pi\rho b^2 \Omega r)\gamma_{h_2}\gamma_{\theta_2} dr$$

$$C_{3,1} = 0$$

$$C_{3,2} = 0$$

$$C_{3,3} = \int_e^R \pi\rho b^3 \Omega r \gamma_{\theta_1}^2 dr$$

$$C_{3,4} = 0$$

$$C_{4,1} = 0$$

$$C_{4,2} = 0$$

$$C_{4,3} = 0$$

$$C_{4,4} = \int_e^R \pi\rho b^3 \Omega r \gamma_{\theta_2}^2 dr$$

Sağlamlık Matrisi

$$K_{1,1} = \int_e^R \left\{ EI \frac{d^4}{dr^4}\gamma_{h_1}^2 - \frac{d}{dr}\left(m\Omega^2 \int_r^R y dy \frac{d}{dr}\left(\gamma_{h_1}^2\right) \right) \right\} dr$$

$$K_{1,2} = 0$$

$$K_{1,3} = \int_e^R \{ -m x_{cg}\gamma_{h_1}\gamma_{\theta_1} - m x_{cg} r \frac{d}{dr}\left(\gamma_{h_1}\gamma_{\theta_1}\right) - 2\pi\rho\Omega^2 r^2 b C(k)\left(\gamma_{h_1}\gamma_{\theta_1}\right) \} dr$$

$$K_{1,4}=\int_e^R\{-mx_{cg}\gamma_{h_1}\gamma_{\theta_2}-mx_{cg}r\frac{d}{dr}\left(\gamma_{h_1}\gamma_{\theta_2}\right)-2\pi\rho\Omega^2r^2bC(k)\left(\gamma_{h_1}\gamma_{\theta_2}\right)\}dr$$

$$K_{2,1}=0$$

$$K_{2,2}=\int_e^R\left\{EI\frac{d^4}{dr^4}\gamma_{h_2}^2-\frac{d}{dr}\left(m\Omega^2\int_r^R ydy\frac{d}{dr}\left(\gamma_{h_2}^2\right)\right)\right\}dr$$

$$K_{2,3}=\int_e^R\{-mx_{cg}\gamma_{h_2}\gamma_{\theta_1}-mx_{cg}r\frac{d}{dr}\left(\gamma_{h_2}\gamma_{\theta_1}\right)-2\pi\rho\Omega^2r^2bC(k)\left(\gamma_{h_2}\gamma_{\theta_1}\right)\}dr$$

$$K_{2,4}=\int_e^R\{-mx_{cg}\gamma_{h_2}\gamma_{\theta_2}-mx_{cg}r\frac{d}{dr}\left(\gamma_{h_2}\gamma_{\theta_2}\right)-2\pi\rho\Omega^2r^2bC(k)\left(\gamma_{h_2}\gamma_{\theta_2}\right)\}dr$$

$$K_{3,1}=\int_e^R mx_{cg}\Omega^2r\frac{d}{dr}\left(\gamma_{h_1}\gamma_{\theta_1}\right)dr$$

$$K_{3,2}=\int_e^R mx_{cg}\Omega^2r\frac{d}{dr}\left(\gamma_{h_2}\gamma_{\theta_1}\right)dr$$

$$K_{3,3}=\int_e^R\left\{m\Omega^2k_m^2\gamma_{\theta_1}^2--GJ\frac{d^2}{dr^2}\left(\gamma_{\theta_1}^2\right)-k_m^2\frac{d}{dr}\left(m\Omega^2\int_r^R ydy\frac{d}{dr}\left(\gamma_{\theta_1}^2\right)\right)\right\}dr$$

$$K_{3,4}=0$$

$$K_{4,1}=\int_e^R mx_{cg}\Omega^2r\frac{d}{dr}\left(\gamma_{h_1}\gamma_{\theta_2}\right)dr$$

$$K_{4,2}=\int_e^R mx_{cg}\Omega^2r\frac{d}{dr}\left(\gamma_{h_2}\gamma_{\theta_2}\right)dr$$

$$K_{4,3}=0$$

$$K_{4,4}=\int_e^R\left\{m\Omega^2k_m^2\gamma_{\theta_2}^2--GJ\frac{d^2}{dr^2}\left(\gamma_{\theta_2}^2\right)-k_m^2\frac{d}{dr}\left(m\Omega^2\int_r^R ydy\frac{d}{dr}\left(\gamma_{\theta_2}^2\right)\right)\right\}dr$$