

## DEĞİŞKEN GENLİKLİ YÜKLEME ALTINDA GENİŞLETİLMİŞ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇATLAK İLERLEMESİ ANALİZİ

Haydar DİRİK<sup>1</sup>  
Orta Doğu Teknik Üniversitesi  
Tusaş -Türk Havacılık ve Uzay Sanayii A.Ş.  
Ankara

Tuncay YALÇINKAYA<sup>2</sup>  
Orta Doğu Teknik Üniversitesi  
Ankara

### ÖZET

*Yorulma çatlaklarının değişken genlikli yükleme altında ilerleme miktarının ve ömrünün belirlenmesi havacılık yapılarında sertifikasyon kuralları gereği önemli bir konudur. Havacılık yapılarında çevrimsel yüklemelerden dolayı malzemede yorulma ve buna bağlı olarak çatlaklar oluşur ve bu çatlaklar yapıların görevini yerine getiremeyecekleri boyutlara ulaşabilir. Bu konudaki deneysel çalışmalar uzun zaman ve yüksek maliyet gerektirdiği için analitik ve sayısal metodların önemi her geçen gün artmaktadır. Bu çalışmada genişletilmiş sonlu elemanlar yönteminin (Extended Finite Element Method (XFEM)) gerilme yoğunluğu faktörü hesaplama kabiliyeti, NASGRO çatlak ilerleme denklemi ve genelleştirilmiş Willenborg çatlak ilerleme gecikmesi modeli ile birleştirilerek otomatik çatlak ilerletme analizi yapan bir algoritma geliştirilmiş ve burdan elde edilen sonuçlar NASGRO yazılımının sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Sonuçların önemli oranda uyum içinde oldukları görülmüştür.*

### GİRİŞ

Havacılık endüstrisinde birçok yapı ve bileşenleri servis ömürleri boyunca çok çeşitli çevrimsel yüklemelere maruz kalmaktadırlar. Çevrimsel sabit genlikli yükleme durumlarında yorulma çatlakları ilerlemesi çatlak uzunluğu, bileşen geometrisi, ve uygulanan yüke bağlı iken değişken genlikli yükleme durumunda bu etkilere ek olarak yükleme geçmişi etkisi ön plana çıkmaktadır. Değişken genlikli yükün uygulanma şekline göre (üst yükleme, alt yükleme ve bunların kombinasyonu) yorulma çatlakları ilerleme hızı ve dolayısı ile yorulma ömrü değişkenlik göstermektedir.

Literatürde yorulma çatlakları ilerlemesini analiz etmek için birçok analitik metot önerilmiştir. Bu metotlardan ilki Paris ve Erdoğan tarafından önerilen Paris yasasıdır [Paris, Erdogan, 1963]. Paris yasası gerilme yoğunluğu faktörü tabanlıdır ve malzeme tipine göre değişkenlik gösteren deneysel sabitler kullanmaktadır. Forman ve diğerleri kırılma bölgesinin etkisini hesaba katmak için kritik gerilme yoğunluğu faktörünü Paris denklemine kazandırmıştır [Forman, Kearney, Engle, 1967]. Bu yöntem, Walker tarafından ortalama gerilme genliğini de hesaba katacak şekilde modifiye edilmiştir [Walker,1970]. Hartman ve Schijve gerilme yoğunluğu faktörü aralığının eşik değerini hesaba katarak Paris denkleminin çatlak nüvelenmesi bölgesinde hesaba katmasını sağlamıştır [Hartman, Schijve ,1970]. Bu çalışmada çatlak ilerleme miktarı çatlak nüvelenmesi anından son kırılma anına kadar bütün bölgelerin etkisini hesaba katan NASGRO çatlak ilerleme denklemi [Nasgro, 2002] ile belirlenmiştir. Yükleme sabit genlikli olduğunda çatlak ilerleme analizi yüksek doğruluk oranı ile tahmin edilebilmektedir. Fakat, değişken genlikli yükleme durumlarında çatlak ucundaki plastik bölgenin etkisinden dolayı çatlak ilerlemesinin yavaşladığı bilinmektedir. Bu etkiyi hesaba katmak için genelleştirilmiş Willenborg modeli kullanılmıştır [Willenborg, Engle ,Wood, 1971]. Bu analitik yöntemler kullanılarak standart geometrilerde çatlak ilerleme analizi yapan NASGRO ve AFGROW gibi yazılımlar geliştirilmiştir. Bu yazılımlar yalnızca belirli standart geometriler için çalışmakta ve yapı kompleks olduğunda bu yazılımların yetenekleri sınırlı kalmaktadır. Kompleks yapılar için en iyi yöntem olarak sonlu elemanlar sayısal yaklaşımı kullanılmaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi

<sup>1</sup> Haydar DİRİK., E-posta: haydar.dirik@tai.com.tr

<sup>2</sup> Yard. Doç. Dr. Tuncay YALÇINKAYA, Havacılık ve Uzay Müh. Böl., E-posta: yalcinka@metu.edu.tr

kompleks yapılarda kullanılmadan önce basit ve analitik sonucu bilinen geometriler ve malzemeler üzerinde sonuçların güvenilirliğinin gösterilmesi gerekmektedir. Geleneksel sonlu elemanlar yöntemi ile çatlak ilerlemesi analizi yapılırken sonlu eleman ağının çatlak geometrisine uygun olması gerekmektedir. Bu da beraberinde çatlak ilerledikçe sonlu elemanlar ağının sürekli güncellenmesi zorunluluğunu getirmektedir. Bu zorluğu aşmak için genişletilmiş sonlu elemanlar metodu geliştirilmiştir [Belytschko, Black, 1999]. Bu metodun kullanılması kullanıcıyı sonlu eleman ağının sürekli güncelleme yükünden kurtarmaktadır. Genişletilmiş sonlu elemanlar modelinin sonlu eleman analizi yapan yazılımlara kazandırılması ile bu yöntem kullanılarak durağan veya ilerleyen çatlaklar modellemek mümkün hale gelmiştir. Fakat ilerleyen çatlak modellemesi yakınsama problemleri sebebiyle çok verimli kullanılamamaktadır. Bu sebeple bu çalışmada çatlak durağan olarak modellenip yazılan program aracılığı ile ilerletilmektedir. ABAQUS sonlu eleman analizi yazılımı içinde mevcut olan genişletilmiş sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak eksenel yükleme spektrumları için sınır değer problemleri çözülmüş ve sonuçlar kısaca tartışılmıştır.

### Çalışmada Kullanılan Çatlak İlerleme Denklemi ve İlerleme Gecikmesi Modeli

Çatlak ilerleme analizinde kullanılan NASGRO denklemi aşağıdaki gibi verilir [Nasgro, 2002].

$$\frac{da}{dN} = C \left[ \left( \frac{1-f}{1-R} \right) \Delta K \right]^n \frac{\left( 1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p}{\left( 1 - \frac{\Delta K_{max}}{K_c} \right)^q} \quad (1)$$

Burada  $N$  yük çevrim sayısı,  $a$  çatlak boyu,  $\Delta K$  bir yük çevriminde maksimum ve minimum gerilme yoğunluğu faktörü arasındaki fark olarak tanımlanan gerilme yoğunluğu faktörü aralığı,  $\Delta K_{th}$  çatlak ilerlemesi için gerekli gerilme yoğunluğu faktörünün eşik değeri,  $K_c$  kritik gerilme yoğunluğu faktörü  $C, n, p$  ve  $q$  deneysel olarak belirlenen malzeme parametreleri,  $f$  çatlak kapanma parametresidir.

Değişken genlikli yükleme durumunda yükleme geçmişinin çatlak ilerlemesi üzerinde önemli oranda etkisi olduğu bilinmektedir. Literatürde değişken genlikli yükleme durumunun çatlak ilerlemesi üzerine etkisini inceleyen bir çok model bulunmaktadır. Bu çalışmada genelleştirilmiş Willenborg modeli kullanılmıştır. Genelleştirilmiş Willenborg modelinin kullanılmasının sebepleri arasında kolay uygulanabilirliği ve literatürde sonuçlarının doğruluğunun ispatlanması gösterilebilir. Genelleştirilmiş Willenborg modelinde normal gerilme yoğunluğu faktörü yerine efektif gerilme yoğunluğu faktörü kullanılır. Efektif gerilme yoğunluğu faktörü şu şekilde verilmektedir.  $K_i^{eff} = K_i - K_R$  burada  $K_i$  normal gerilme yoğunluğu faktörü  $K_R$  kalıntı gerilme yoğunluğu faktörüdür. Kalıntı gerilme yoğunluğu faktörü Gallagher ve Hughes tarafından bir malzeme parametresi ile kalibre edildiğinde daha doğru sonuçlar alındığı görülmüştür [Gallagher, Hughes, 1974]. Gallagher ve Hughes kalıntı gerilme yoğunluğu faktörünün  $K_R = \Phi K_R^W$  şeklinde kullanılmasını önermişlerdir. Bu modelde çatlak ilerlemesi normal gerilme oranı yerine efektif gerilme oranı kullanılarak hesaplanır.

$$R_{eff} = \frac{K_{min,i}^{eff}}{K_{max,i}^{eff}} = \frac{K_{min,i} - K_R}{K_{max,i} - K_R} \quad (2)$$

Böylece çatlak ilerleme miktarı aşağıdaki gibi verilir.

$$\Delta a_i = \frac{da}{dN} = f(\Delta K, R_{eff}) \quad (3)$$

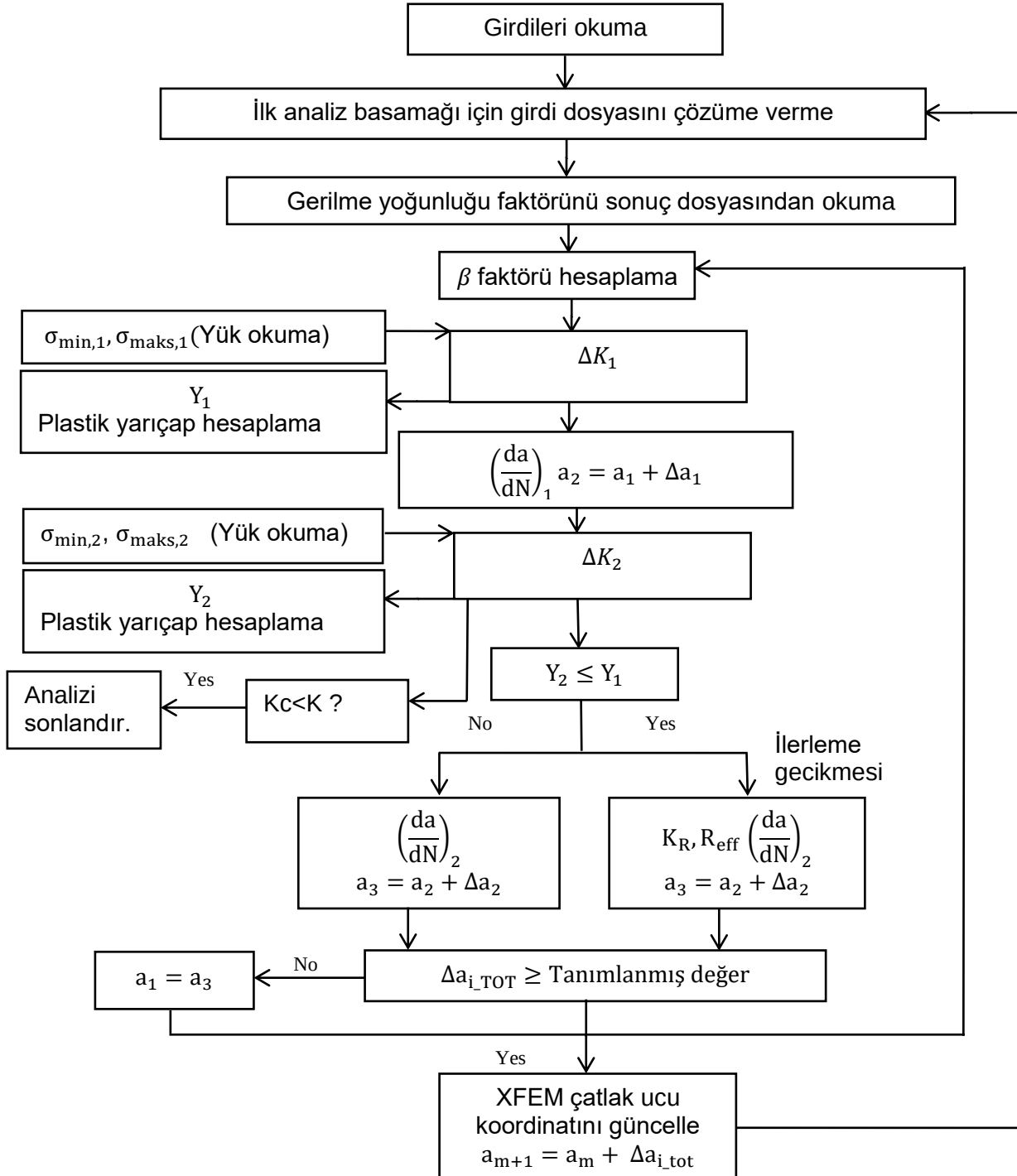
### Genişletilmiş Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bu çalışmada gerilme yoğunluğu faktörünün belirlenmesi için genelleştirilmiş sonlu elemanlar yöntemi kullanılmış olup bu yöntem kısaca şöyle açıklanabilir.  $\Gamma$  modeldeki tüm düğüm noktalarını,  $\Gamma_t$  ve  $\Gamma_c$  sırası ile çatlak yüzündeki ve çatlak ucundaki düğüm noktalarını temsil etmek üzere, genelleştirilmiş sonlu elemanlar yönteminde yer değiştirme vektörü şu şekilde verilir.

$$u_{xfem} = \sum_{i \in \Gamma} N_i(x)(u_i) + \sum_{i \in \Gamma_c} N_i(x)H(x)a_i + \sum_{i \in \Gamma_t} \left[ N_i(x) \sum_{\alpha=1}^4 F_{\alpha}(x)b_i^{\alpha} \right] \quad (4)$$

Burada  $u_{xfem}$  yerdeğiştirme vektörü,  $N_i$  düğümsel şekil fonksiyonu,  $u_i$  zenginleştirilmemiş düğüm noktaları için düğümsel yer değiştirme vektörü,  $H(x)$  bulunulan tarafa göre +1 ve -1 değerlerini alan heaviside fonksiyonu,  $a_i$  heaviside fonksiyonu ile ilgili düğümsel zenginleştirilmiş serbestlik derecesi vektörü,  $F_{\alpha}(x)$  asimptotik çatlak ucu fonksiyonu ve  $b_i^{\alpha}$  çatlak ucu zenginleştirmesi ile ilgili düğümsel zenginleştirilmiş serbestlik derecesi vektörüdür.

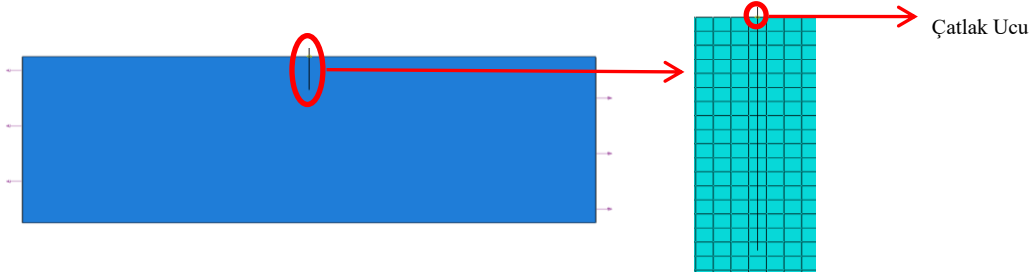
### Model Algoritması



Şekil 1: Çatlak İlerletme Algoritması.

## Problem Tanımı ve Malzeme Özellikleri

Bu bölümde 5 mm boyunda kenar çatlaklı içeren 2 mm kalınlığında ve 50 mm genişliğinde bir Al 2024-T3 plakada eksenel yükleme spektrumları için ömür tahmini analizi yapılmıştır.



Şekil 2: Sınır Değer Probleminde Kullanılan Plaka ve Çatlak Geometrisi.

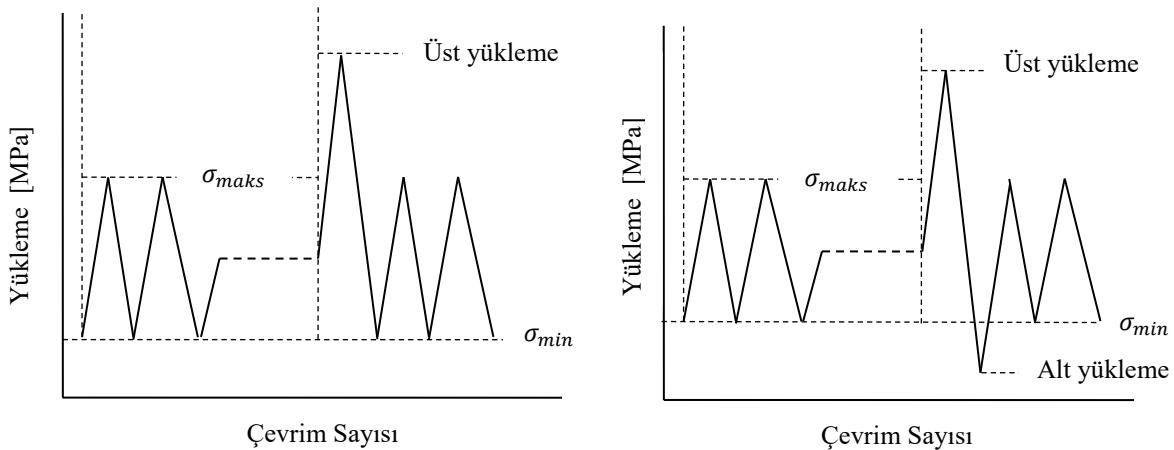
Şekil 2’de sonlu eleman modeli görülmektedir. Sonlu eleman modelinde 3 boyutlu C3D8 tipi hexahedral elemanlar kullanılmıştır. Çizelge 1’de Al-2024-T3 malzemesi için NASGRO malzeme veritabanında mevcut olan malzeme parametreleri verilmiştir.

Çizelge 1: Al-2024-T3 Malzeme Özellikleri.

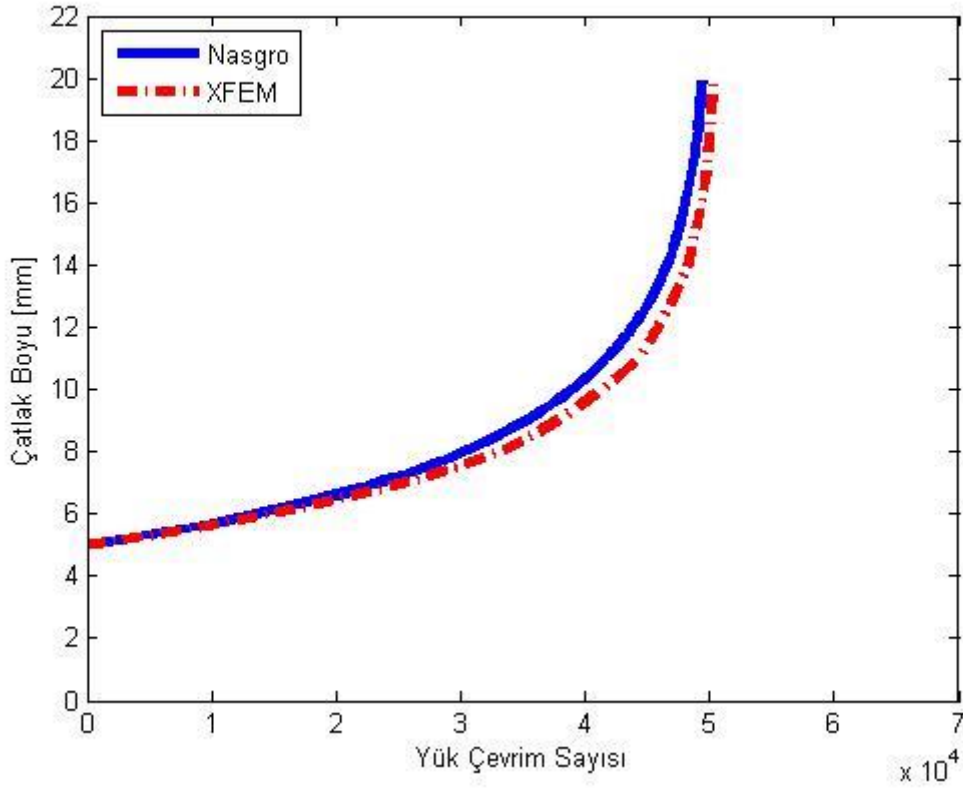
| Malzeme    | Akma Gerilmesi [MPa] | Elastik modül [MPa] | C                  | n   | p    | q |
|------------|----------------------|---------------------|--------------------|-----|------|---|
| Al 2024-T3 | 365                  | 69600               | $2.382 * 10^{-12}$ | 3.2 | 0.15 | 1 |

## Model Doğrulama Çalışması

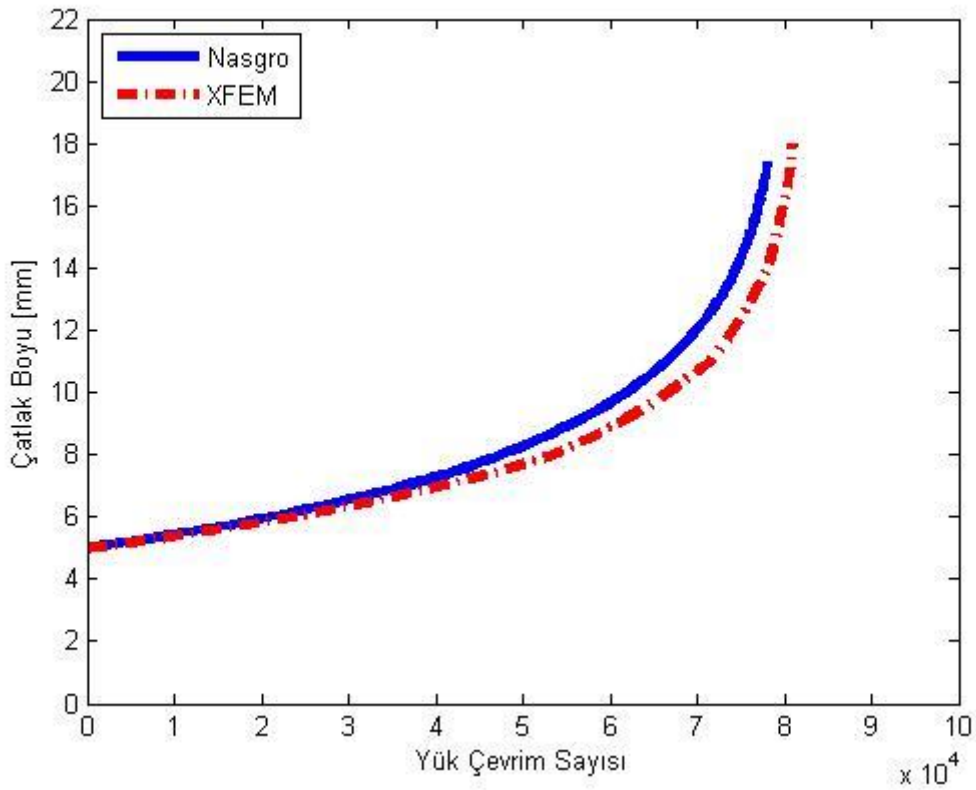
Sabit genlikte ve değişken genlikte üç farklı yükleme spektrumu altında çatlak ilerleme analizlerinden elde edilen sonuçlar NASGRO yazılımından alınan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sabit genlikli yükleme durumu için 25 MPa minimum, 75 MPa maksimum gerilme yükü çevrimsel olarak yapı kritik gerilme yoğunluğu faktörüne ulaşana kadar uygulanmıştır. Birinci değişken genlikli yükleme durumu için yukarıda bahsedilen sabit genlikli yükleme durumuna ek olarak 125 MPa anlık üst yükleme uygulanmıştır. İkinci değişken genlikli yükleme durumu için sabit genlikli yükleme durumuna ek olarak 125 MPa üst yükleme ve 5 MPa alt yükleme ardışık olarak uygulanmıştır. Şekil 3’de kullanılan değişken genlikli yükleme spektrumlarının şematik gösterimi verilmiştir. Şekil 4 sabit genlikli, Şekil 5 ve 6 değişken genlikli yükleme durumları için NASGRO yazılımının ve geliştirilen otomatik çatlak ilerletme programının sonuçlarını karşılaştırılmıştır.



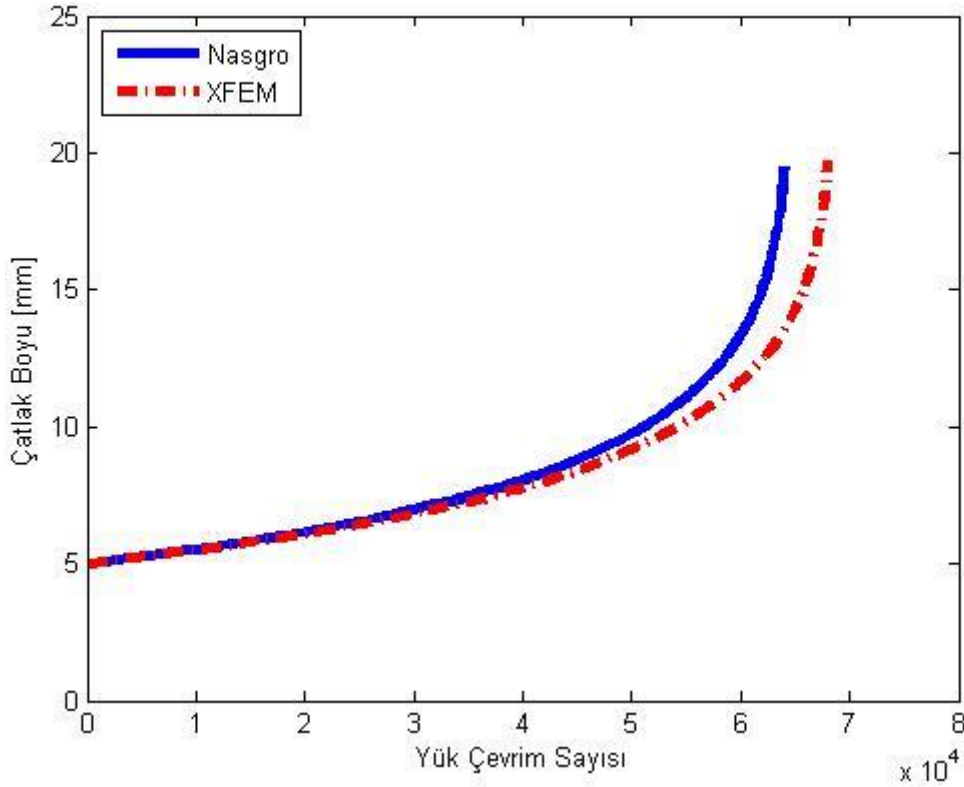
Şekil 3: Değişken Genlikli Yükleme Spektrumlarının Şematik Gösterimi.



Şekil 4: Sabit Genlikli Yükleme Durumu için Çatlak Boyu–Yük Çevrim Sayısı Grafiği.

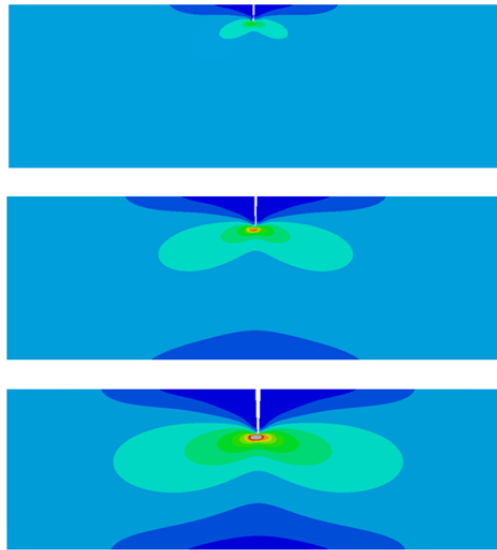


Şekil 5: Değişken Genlikli Yükleme Durumu (Üst Yükleme) için Çatlak Boyu–Yük Çevrim Sayısı Grafiği.



Şekil 6: Değişken Genlikli Yükleme Durumu (Üst Yükleme-Alt Yükleme) için Çatlak Boyu-Yük Çevrim Sayısı Grafiği.

Şekil 4, 5 ve 6'dan anlaşıldığı üzere NASGRO yazılımının sonuçları ile genişletilmiş sonlu elamanlar metodu tabanlı olarak geliştirilen algoritmanın sonuçları birbiriyle uyum içerisinde. Şekil 4 ve 5 karşılaştırıldığında anlık üst yüklemenin çatlak ilerlemesini yavaşlattığı görülmektedir. Şekil 5 ve 6 karşılaştırıldığında anlık üst yüklemeye ardışık olarak uygulanan alt yüklemenin gecikme etkisini azalttığı görülmektedir. Şekil 7'de analiz basamaklarından alınan görseller sunulmuş olup beklendiği gibi çatlak eksenel yükleme altında yükleme doğrultusuna dik ve ikinci mod gerilme yoğunluğu faktörünün sıfır olduğu yönde ilerlemektedir.



Şekil 7: Sonlu Elemanlar Programı ABAQUS' da Yorulma Çatlağı İlerlemesi.

## SONUÇ

Yapılan çalışma sonucunda genişletilmiş sonlu elaman metodunun sonlu elaman ağından bağımsız çatlak modelleme yeteneği ve gerilme yoğunluğu faktörü belirleme kapasitesinin verimli olarak çalıştığı ve verdiği sonuçların analitik sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmüştür. Geliştirilen algoritma sayesinde kullanıcı sonuç dosyalarından analiz boyunca her yükleme çevriminde gerilme yoğunluğu faktörünü ve çatlak boyunu birebir izleyebilmekte ve her çatlak ilerleme analizi basamağında çatlağın konumunu takip edebilmektedir. Ayrıca değişken genlikli yüklemelerin neden olduğu çatlak yavaşlaması programa eklenen Genelleştirilmiş Willenborg modeli sayesinde hesaba katılmakta ve değişken genlikli yükleme durumları için gerçekçi ömür tahmini analizleri yapılabilmektedir. Bu algoritma sayesinde kullanıcı analiz prosesinin arka planında neler olduğunu bilmekte ve kontrol edebilmektedir. Modelin güvenilirliği bu çalışmada gösterilmiş olup kompleks yapılarda kullanılabileceği yorumlanabilir.

## Kaynaklar

- Belytschko, T., Black, T., 1999. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing., Int. J. Numer. Meth. Eng., 45, s.601–620.
- Forman, R.G., Kearney, V.E., Engle, R.M., 1967. Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. J. Basic Eng. 89, 459–464.
- Gallagher, J., Hughes, T., 1974. Influence of yield strength on overload affected fatigue crack growth behaviour in 4340 steel. AFFDL-TR-74-28 .
- Hartman, A., Schijve, J., 1970. The effects of environment and load frequency on the crack propagation law for macro fatigue crack growth in aluminium alloys. Eng. Fract. Mech. 1, s.615 – 631.
- NASGRO, 2002. Fracture mechanics and fatigue crack growth analysis software, reference manual., NASA Johnson Space Center and Southwest Research Institute.
- Paris, P. C., Erdogan, F. A., 1963. A critical analysis of crack propagation, J. Basic Eng., 85, s.528–533.
- Walker, E. K., 1970. The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7076-T6 aluminum., In: Effect of environment and complex load history on fatigue life. ASTM STR 462. Philadelphia: American Society for Testing and Materials, s.1–4.
- Willenborg, J., Engle, R. M., Wood, H. A. 1971. A Crack Growth Retardation Model Using an Effective Stress Concept., AFFDL-TM-71-1-FBR, Wright Patterson Air Force Laboratory.