

NOKTASAL KÜTLE TAŞIYAN ANKASTRE BİR KİRİŞİN BAĞLAŞIMLI EĞİLME VE BURULMA HAREKETİNİN DİNAMİK OLARAK İNCELENMESİ

Alev Kaçar Aksongur¹, Seher Eken²
İstanbul Teknik Üniversitesi, Uçak ve Uzay
Bilimleri Fakültesi, İstanbul

Metin O. Kaya³
İstanbul Teknik Üniversitesi, Uçak ve Uzay
Bilimleri Fakültesi, İstanbul

ÖZET

Bu çalışmada simetrik olmayan kesit alanına sahip ankastre bir kirişin noktasal kütle tesiri altında eğilme ve burulma titreşim hareketi incelenmiştir. Eğilme ve burulma modları bağlaşımlı olarak elde edilmiş, sonuçlar gerçek çözümlerle ve sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Matematik modelin ayrıklaştırılmasında Genişletilmiş Galerkin Yöntemi (EGM) kullanılmıştır. Bu yöntem ile yüksek modlarda dahi hızlı ve hassas çözümler elde edilmiştir. Çalışmanın ilk bölümünde simetrik kesitli kiriş için eğilme ve burulma modları etkileşimsiz olarak elde edilmiş, literatürdeki mevcut çalışmalar ve gerçek çözümlerle kıyaslanmıştır. Daha sonra simetrik olmayan kesite sahip kiriş modeli ele alınmış, noktasal kütlelerin kiriş uzunluğu boyunca çeşitli konumlardaki hali incelenmiştir. Sonuçlar ticari bir sonlu elemanlar programı ile kıyaslanarak kullanılan yöntem değerlendirilmiştir.

GİRİŞ

Uçak yapılarında kanadın titreşim davranışı motorun ağırlığı etkisiyle önemli ölçüde değişmekte, kanadın dinamik hareketi doğrudan etkilenmektedir. Aynı motor kullanıldığında dahi, konumdaki ufak bir değişiklik kanadın ağırlık merkezini ve ataletini doğrudan etkileyerek, yapının dinamik davranışının değişmesine yol açar. Özellikle kanat genişliği büyük olan yapılarda kütlelerin sönmülemeye yardımcı olacak şekilde yerleştirilmesi çok önemlidir. Günümüzde de sıklıkla görüldüğü üzere iki ve daha fazla motora sahip uçaklarda kütlelerin birbiri ile etkileşimi ile yapı karmaşık bir hal almaktadır.

Kanat yapılarının dinamik davranışı incelenirken sadece eğilme değil burulma modlarının da hesaba katılması gerekir. Simetrik olmayan kanat profili için eğilme ve burulma modları bağlaşımlı hale gelmektedir.

Literatürde çeşitli konumlardaki kütle etkisi altında kirişlerin dinamik davranışlarının incelenmesine dair az sayıda eser vardır. Özellikle eğilme ve burulma bağlaşımlı durumlar için karşılaştırma için yeterli kaynak bulunmamaktadır. Bu sebeple çalışmada etkileşimli eğilme-burulma modlarının kıyaslanması için sonlu elemanlar yöntemine başvurulmuştur. Çalışma, literatürde eksik olan, eğilme-burulma etkileşimli kiriş boyunca çeşitli konumlardaki noktasal kütlelerin, kirişin davranışına etkisini ortaya koymuştur.

Bu çalışmada motor taşıyan kanat yapılarının gerçekçi bir dinamik analizi yapılması amaçlanmıştır. Bu sebeple Şekil1'de görüldüğü gibi eğilme ve burulma davranışı sergileyen ankastre kiriş modeli ele alınmıştır. Kiriş kesidi kanat profiline benzer bir geometride seçilmiş olup kayma merkezi ve

¹ Alev Kaçar Aksongur, Uçak ve Uzay Müh. Böl., E-posta: kacaral@itu.edu.tr

² Dr. Seher Eken, Uçak ve Uzay Müh. Böl., E-posta: durmazseh@itu.edu.tr

³ Prof. Dr., Uçak Müh. Böl., E-posta: kayam@itu.edu.tr

ağırlık merkezi çakışık değildir. Bu sayede eğilme ve burulma modlarının bağımlı olması sağlanmıştır. Kütle kiriş uzunluğu boyunca farklı istasyonlara konularak, kütle konumunun kiriş dinamik davranışına etkisi görülmüştür. Literatürdeki çalışmalara ek olarak, etkileşimli modlarda kütle konumunun doğal frekansa etkisi, bir ticari sonlu elemanlar programı kullanılarak kıyaslanmıştır. Sonuçlar hem literatürle, hem de sonlu elemanlar yöntemi ile uyumlu olup arzu edilen hassasiyet elde edilmiştir.

Matematik model oluşturulurken hareket denklemleri Hamilton prensibi ile elde edilmiştir. Hareket denklemlerinin ayrıklaştırılması için hızlı ve hassas bir çözüm yöntemi olan Genişletilmiş Galerkin Yöntemi (Extended Galerkin Method - EGM) kullanılmıştır. Bu yöntemde sadece geometrik sınır koşullarını sağlamak yeterlidir. Doğal sınır koşulları hareket denklemlerinin içinde korunmaktadır [Fazelzadeh, Mazidi ve Kalantari, 2009]. Bu sayede karmaşık sınır koşullarında bile tatmin edici sonuçlar elde edilmektedir. Ayrıca EGM'nin yüksek frekanslarda dahi istenilen hassasiyeti sağlaması, yöntemin başlıca faydaları arasında sayılabilir.

HAREKET DENKLEMLERİ

Eğilme-burulma hareketi yapan, simetrik olmayan ve noktasal kütle taşıyan bir kirişin hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} m\ddot{w} + me\ddot{\theta} + EIw'''' + M\delta_D(x-\xi)\ddot{w} &= 0 \\ mk_m^2\ddot{\theta} + me\ddot{w} - GJ\theta'' + I_M\delta_D(x-\xi)\ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Burada,

- m : Kiriş kütlesi
- M : Noktasal kütle
- e : Kiriş kesidinin ağırlık merkezi ile kayma merkezi arasındaki uzaklık
- EI : Kiriş eğilme rijitliği
- GJ : Kiriş burulma rijitliği
- k_m : Kütle jiroskop yarıçapı
- I_M : Kütle atalet momenti

olarak tanımlanmıştır.

Kirişin ağırlık merkezi ile kayma merkezi çakışık olduğu durumda $e = 0$ olup kirişin eğilme ve burulma modları birbiri ile etkileşmez. $e > 0$ için kiriş eğilme ve burulma doğal frekansları birbiriyle bağımlı hale gelmektedir.

Hareket denklemlerinde kütle konumunu kesin olarak belirlemek amacıyla $\delta_D(x)$ Delta Dirac fonksiyonu kullanılmıştır. Hareket denklemleri Genişletilmiş Galerkin yöntemi kullanılarak ayrıklaştırılırsa eğilme ve burulma deplasmanları şekil fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$w(x,t) = [N_w]^T x \{q_w\}, \quad \theta(x,t) = [N_\theta]^T x \{q_\theta\} \quad (2)$$

$$\{q_w\} = \begin{Bmatrix} q_{w_1} \\ q_{w_2} \\ \vdots \\ q_{w_n} \end{Bmatrix}_{(nx1)}, \quad \{N_w\} = \begin{Bmatrix} N_{w_1} \\ N_{w_2} \\ \vdots \\ N_{w_n} \end{Bmatrix}_{(nx1)} \quad \text{ve} \quad \{q_\theta\} = \begin{Bmatrix} q_{\theta_1} \\ q_{\theta_2} \\ \vdots \\ q_{\theta_n} \end{Bmatrix}_{(nx1)}, \quad \{N_\theta\} = \begin{Bmatrix} N_{\theta_1} \\ N_{\theta_2} \\ \vdots \\ N_{\theta_n} \end{Bmatrix}_{(nx1)} \quad (3)$$

Burada n , şekil fonksiyonlarının derecesi olup istenilen hassasiyet derecesinde yüksek bir değer alınabilir. Hareket denklemleri boyutsuzlaştırılarak EGM ile yeniden yazılarak aşağıdaki forma getirilirse:

$$\delta q_w^T \int_0^1 [N_w N_w^T \ddot{q}_w + e N_w N_\theta^T \ddot{q}_\theta + \frac{EI}{mL^4} N_w N_w^T q_w + \frac{M}{mL} [N_w N_w^T \ddot{q}_w]_{\xi=\xi_s}] = 0 \quad (4)$$

$$\delta q_\theta^T \int_0^1 [N_\theta N_\theta^T \ddot{q}_\theta + \frac{e}{k_m^2} N_\theta N_w^T \ddot{q}_w - \frac{GJ}{mL^2 k_m^2} N_\theta N_\theta^T q_\theta + \frac{I_M}{mL k_m^2} [N_\theta N_\theta^T \ddot{q}_\theta]_{\xi=\xi_s}] = 0$$

Bu denklem sistemi, kütle ve katılık matrislerine ayrılarak ifade edilerek, doğal frekansların bulunması için aşağıdaki bilinen forma getirilmiş olur:

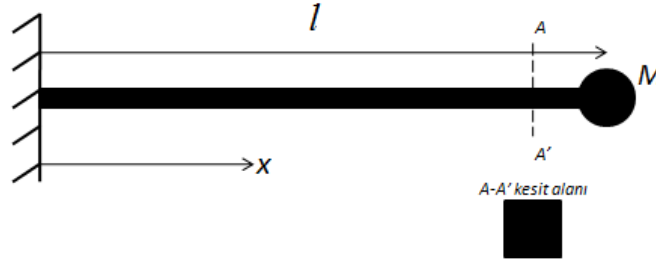
$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \quad (5)$$

Bu denklem sistemi çözülerek yapının eğilme ve burulma bağılaşımli doğal frekansları elde edilir.

UYGULAMALAR

Simetrik kesitli noktasal kütleli kiriş

Çalışmada ilk olarak Şekil 1'deki gibi ankastre bir kirişin noktasal yük altında bağılaşımli eğilme ve burulma davranışı incelenmiştir. Bunun için kirişin kesit alanı simetrik olup kesitin kayma merkezi ve ağırlık merkezi çakışmıştır. Noktasal kütleli farklı değerleri etkisi altında yapının doğal frekansının değişimi Tablo 1'de verilmiştir. Bu sonuçlar literatürdeki diğer yöntemler ve kesin çözümlerle karşılaştırılmış olup, EGM'nin hassas sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.



Şekil 1: Simetrik kesitli noktasal kütleli kiriş modeli

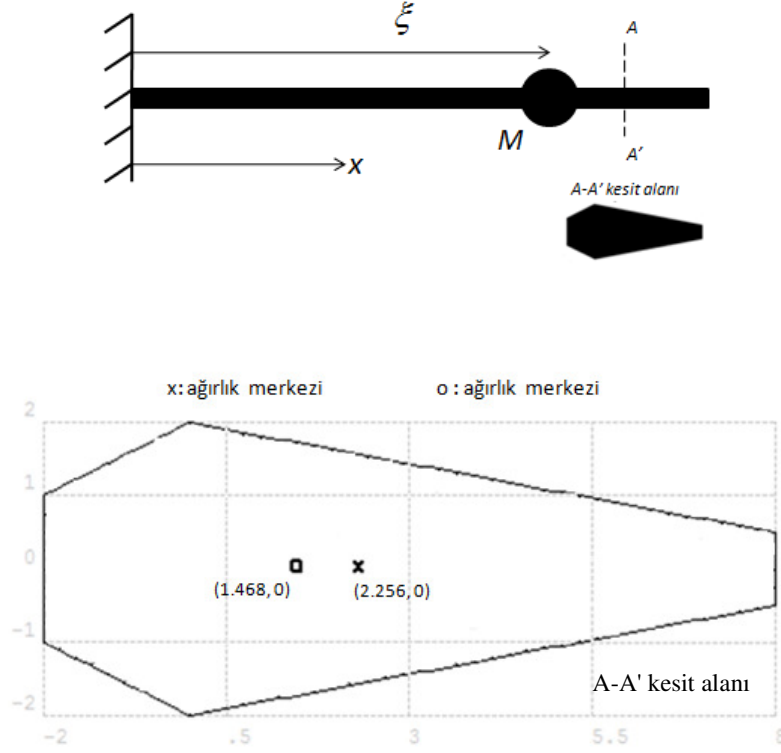
Tablo 1'deki sonuçlar incelendiğinde Galerkin yönteminin diğer çözüm yöntemlerine kıyasla yapının gerçek çözümüne ihmal edilebilir hatayla yakınsak olduğu görülebilir.

Tablo 1. Simetrik kesitli noktasal kütleli kiriş doğal frekansları

Ms	ω_1			ω_2			ω_3	
	EGM	[Gürgöze, 1984]	[Gern ve Librescu, 1998, Kehoe, 1995]	EGM	[Gürgöze, 1984]	[Gern ve Librescu, 1998, Kehoe, 1995]	EGM	[Gern ve Librescu, 1998, Kehoe, 1995]
0.2	2.61	2.61	2.61	18.21	18.38	18.21	53.56	53.56
1	1.56	1.56	1.56	16.25	16.56	16.25	50.9	50.9
2	1.16	1.16	1.16	15.88	16.19	15.86	51.21	50.45
5	0.76	0.76	0.76	15.62	15.95	15.6	50.92	50.16
10	0.54	0.54	0.54	15.53	15.87	15.51	50.82	50.06
100	0.17	0.17	0.17	15.44	15.79	15.43	50.73	49.97

Simetrik olmayan kesitli noktasal kütleli kiriş

Çalışmada ikinci olarak Şekil 2'deki gibi simetrik olmayan kesit alanına sahip kirişin eğilme ve burulma modlarının bağımsız halde doğal frekansları hesaplanmıştır. Tablo 2, kirişin özelliklerini tanımlamaktadır. Noktasal kütlelerin ağırlığı sabit tutulup kiriş uzunluğu boyunca farklı konumlardaki çözümleri elde edilmiştir. Sonuçlar sonlu elemanlar yöntemi ile ilk 6 mod için kıyaslanmıştır.

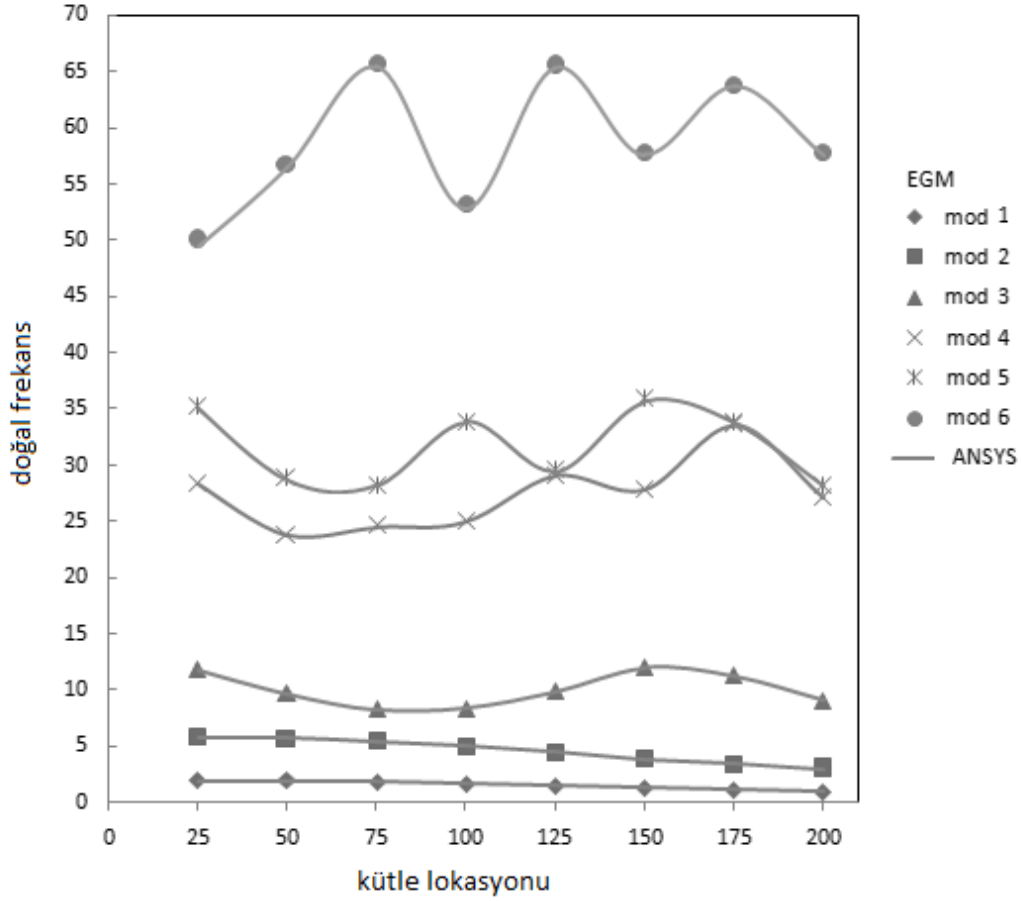


Şekil 2: Asimetrik kesitli noktasal kütleli kiriş modeli

Tablo 2. Simetrik olmayan kesitli noktasal kütleli kiriş özellikleri

Alan	A	m^2	26
Kiriş ağırlığı/uzunluk	m	kg/m	7.02E-05
Poisson oranı	ν		0.3
Young modülü	E	N/m ²	7.00E+04
Kayma merkezi (y,z)	SC	m	(1.468 , 0)
Ağırlık merkezi (y,z)	CG	m	(2.256 , 0)
Noktasal kütle	m_i	kg	0.01
Kiriş uzunluğu	l	m	200

Şekil 3te, ilk 6 doğal frekansın sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırılması görülmektedir. Kullanılan yöntem ile yüksek modlarda dahi sonlu elemanlar yöntemiyle son derece uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil 3: Simetrik olmayan noktasal kütleli kiriş doğal frekansları

SONUÇLAR

Bu çalışmada simetrik ve simetrik olmayan kesit alanına sahip, noktasal kütle etkisi altında iki farklı kiriş modelinin dinamik analizi ele alınmıştır. Kiriş yapısı eğilme ve burulma hareketi yapmaktadır. Simetrik kesitli kirişte eğilme ve burulma modları etkileşimsizken, simetrik olmayan kesit için bu modlar bağışımıdır. Kiriş yapının uzunluğu boyunca noktasal kütleler sisteme dahil edilmiş, bu noktasal kütlelerin yapının dinamik davranışına etkisi incelenmiştir.

Çalışmada Genişletilmiş Galerkin Yöntemi (EGM) kullanılmış olup sonuçlar, gerçek çözümler ve sonlu elemanlar yöntemi sonuçları ile uyum içindedir. Özellikle yüksek modlarda dahi yakınsak çözüm sağlanması EGM'nin avantajlarını göz önüne sermektedir. Çalışmanın sonraki aşamasında birden fazla kütleli durum incelenecektir.

Eğilme ve burulma bağışımsız kiriş modelinde kütle kanat ucunda sabit olup kütlelerin artan değerleri için beklenildiği gibi doğal frekansın kritik değerlere geldiği görülmektedir.

Bu sonuçlarla uyumlu olarak kütlelerin kanat üzerindeki yeri, kökten kanat ucuna kaydıka doğal frekansın düştüğü gözlemlenmiştir. Özellikle ilk 2 frekansta kritik doğal frekans değerleri, kütle kanat ucuna yaklaştıkça elde edilmiştir. Daha yüksek modlarda ise kanadın kararlı yapısını kaybetmekte olduğu gözlemlenmiştir.

Kaynaklar

Fazelzadeh, S. A., Mazidi, A., Kalantari, H., 2009. *Bending-Torsional Flutter of Wings with an Attached Mass Subjected to a Follower Force*, J. Sound and Vibration, 323, s.148-162

Gurgoze, M., 1984. *A note on the vibrations of restrained beams and rods with point masses*, J. Sound and Vibration, 96(4), s.461-468.

Gern, F. H., Librescu, L., 1998. *Effects Of Externally Mounted Stores On Aeroelasticity Of Advanced Swept Cantilevered Aircraft Wings*, Aerospace Science and Technology, 5, s.321-333

Kehoe, M.W., 1995. *A Historical Overview Of Flight Flutter Testing*, NASA Technical Memorandum