

SONLU HACİMLER YÖNTEMİ İLE NAVIER-STOKES DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ VE HELİKOPTER AERODİNAMİĞİNE UYGULANMASI

Yusuf Okan Pekel*
Aselsan A.Ş., Ankara

Yusuf Özyörük†
ODTÜ, Ankara

ÖZET

Günümüzde helikopterdeki mürettebat ve yolcuların konforu ile birlikte ses seviyelerinin azaltılması için ağırlık olarak ek maliyet getirecek olan farklı yalıtım uygulamaları yapılmaktadır. Bunun yanında çevresel bir etki olarak helikopterlerin yaratmış olduğu ses seviyelerinin azaltılması da popüler bir konudur. Döner kanat platformlarında ana ses kaynaklarından birisi pal-vorteks etkileşiminden kaynaklanan gürültüdür. Bu tür gürültünün azaltılması için literatürde farklı uygulamalar mevcuttur. Bunlardan aktif kontrol edilebilen kanatçık uygulamaları dikkat çekicidir. Aktif kontrol edilebilen kanatçık uygulamalarında, pallere konulacak kanatçıkların yeri, büyüklüğü ve kontrol parametreleri, sönmülenebilecek ses seviyelerini değiştirmektedir. Bu parametrelerin belirlenebilmesi için ya çokça deneysel çalışmalar ya da sayısal olarak döner kanat çözümünün yapılarak pal vorteks etkileşim seviyelerinin belirlenmesi gerekmektedir. İkinci yöntem gelişen bilgisayar teknolojileri sayesinde daha ucuzdur. Bu kapsamda helikopter rotor ve gövdeleri etrafındaki karmaşık türbülanslı hava akışı alanlarını çözmek amacıyla düzensiz ağlarda sonlu hacimler şeması kullanarak Navier-Stokes denklemlerinin çözümünü yapabilen bir kod geliştirilmektedir. Bu kod farklı tipte eleman yapısındaki çözüm ağlarını çözebilecek niteliktedir. Döner kanat gibi önemli deplasman hareketi içeren yapılarda Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) yöntemi yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yöntem sayesinde karmaşık ve önemli miktarlarda deplasman içinde olan pal hareketleri rahatca çözümlenebilmektedir. Geliştirilmekte olan kod, literatürden bir test koşulu referans alınarak sınanmıştır. Elde edilen sonuçlar ile literatürdeki sonuçlar bir miktar farklılık göstermektedir. Bu farklılığın nedeni çözüm ağının yeterli seviyede sık olmamasından kaynaklandığı değerlendirilmiştir. Devam eden kod geliştirme çalışmaları kapsamında, vizkoz çözümler için Navier-Stokes denklemleri kodlanmış ve türbülans modeli olarak da Spalart-Allmaras türbülans modeli eklenmiştir. İlerleyen dönemlerde mevcut kodun vizkoz çözümlerini ve türbülans modelini doğrulamak ve paralel çözüm yapabilecek bir kabiliyete ulaşması hedeflenmiştir.

*Doktora öğrencisi, E-posta: yopekel@aselsan.com.tr

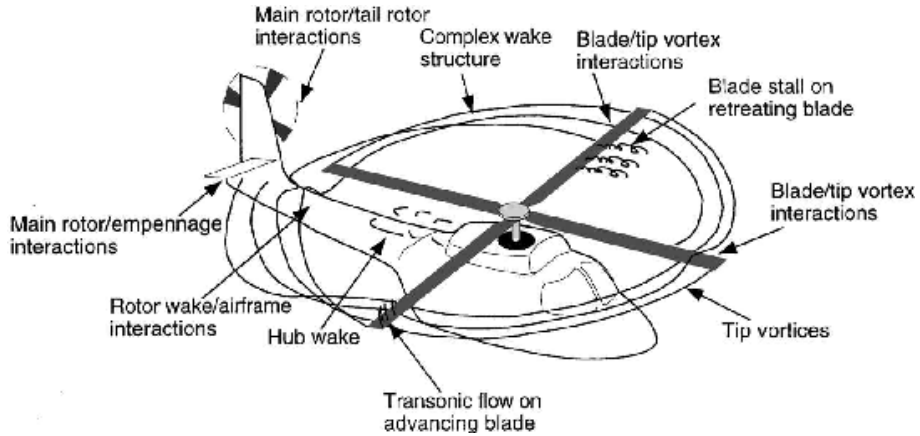
†Prof. Dr., Havacılık ve Uzay Müh. Böl., E-posta: yusuf.ozyoruk@ae.metu.edu.tr

GİRİŞ

Helikopterler dönen paller vasıtasıyla kaldırma kuvveti elde eden hava araçları olduğundan dolayı karmaşık bir yapıya sahiptirler. Rotor, fonksiyonları düşünüldüğünde helikopterlerin temel yapı taşıdır. Hem dikey yönde helikopterin ağırlığını karşılayacak kaldırma kuvvetini hem de düz uçuş ve manevralar için ihtiyaç duyulan itki kuvvetini yaratmaktadır.

Döner pallerden elde edilebilecek kaldırma kuvveti miktarı palin göreceği lokal hücum açısına ve lokal dinamik basınca göre değişmektedir. Farklı uçuş rejimlerinde palin karşılaşıcağı hız dağılımı büyük farklılık göstermektedir. Örneğin askı (hover) konumunda paller azimuth boyunca eksen simetri ve radyal olarak doğrusal bir hız dağılımına sahiptirler. Fakat düz uçuş koşulunda, hem uçuş hızı hem de palin dönüşünden kaynaklı lokal hız bileşenleri birleştiğinde eksen simetrik hız dağılımı bozulmaktadır. Bu farklılık rotor üzerinde dengelenmemiş bir yük dağılımına sebep olmaktadır. Yük dağılımındaki bu farklılık rotorun flap hareketini (pallerin belli bir miktar aşağı ya da yukarı hareketi) yapmasının nedenidir.

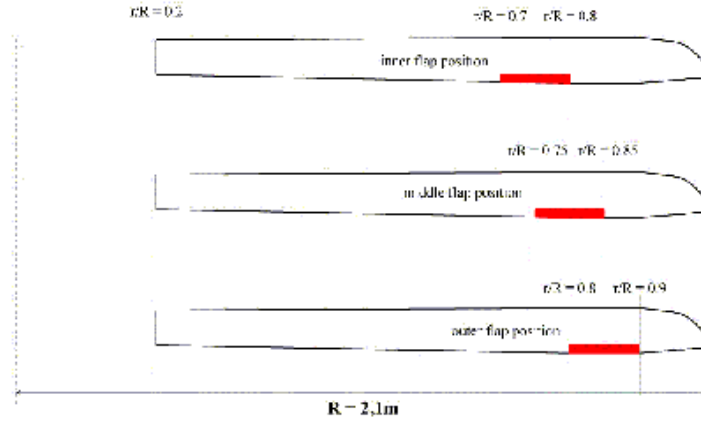
Helikopterde döner pallerden gelen hava akışının gövde ile birleşimi helikopter etrafında karmaşık bir hava akış alanı yaratmaktadır. Helikopter etrafındaki karmaşık hava akışı Şekil 1'de gösterilmiştir. Döner kanatlardaki en baskın hava akışı, yüksek dinamik basınçtan dolayı pal kaçış kenarından kopan kuvvetli hava burgaçlarıdır (vorteks). Hava burgaçlarının kuvveti ve bulunduğu konumları, diğer paller ya da gövde ile etkileşime sebep olabilmektedir. Kanat ucu hava burgaçları, sürekliliğini koruyabilen, yüksek oranda dağılma özelliği olmayan ve belli bir miktar rotor dönüşü dahilinde bile kaybolmayan bir yapıya sahiptirler. Bu özelliklerinden dolayı kanat ucundan çıkan hava burgaçları, özellikle düz uçuş koşulunda takip eden diğer paller ile etkileşime girmektedir ve pal-vorteks etkileşimi (BVI) olarak adlandırılan etkileri yaratmaktadır. Bu etkiler yüksek seviyede ses oluşumuna ve yüksek titreşim seviyelerine sebep olmaktadır. Bundan dolayı BVI gürültüsü döner kanatlardaki en önemli ses kaynaklarından biridir.



Şekil 1: Helikopter etrafındaki karmaşık hava akışı [Ramasamy, M., 2004]

BVI etkileşimini azaltmak için uygulanabilecek çözümler arasında aktif kontrol edilebilen kanatçık uygulamaları günümüzde popülerdir. Kaçış kenarına yerleştirilen aktif olarak kontrol edilebilen kanatçık mekanizması pal üzerindeki hava akışını dolayısıyla hava burgacı etkileşimini kontrol etmeye yaramaktadır. Literatürde aktif pal konsepti üzerine yapılan çalışmalara erişmek mümkündür. Bu çalışmalar arasında ONERA ve DLR, aktif pal konsepti üzerine bir çalışma grubu oluşturmuş ve helikopterin rotor pallerinde aktif olarak kontrol edilebilen kanatçık yapılarının olası faydalarını hem teorik hem de deneysel olarak araştırmışlardır [Höfinger, M., Leconte, P., 2004]. Bu araştırmalar sonucunda aktif kontrol edilebilen kanatçık yapısının yerinin önemli olduğu anlaşılmış ve iç kısma konumlandırılan kanatçık yapısının titreşim seviyelerinin azalmasında, dış tarafa

konumlandırılan kanatçık yapılarının ise ses seviyelerinin azalmasında etkili olduğu görülmüştür. Aktif kontrol edilebilen kanatçık yapılarının örnek konumları Şekil 2'de gösterilmiştir.



Şekil 2: Aktif kontrol yapabilen pal yapıları [Höfingler, M., 2004]

Literatürdeki çalışmalar ışığında kontrol edilebilen kanatçık yapılarının büyüklüğü, yeri ve kontrol parametreleri hava burgacı ile pallerin etkileşiminin azaltılmasında önemli rol oynamaktadır. Bu sebepten dolayı kontrol yüzeyinin farklı büyüklük ve değişik konumlardaki durumlarının, etkileşime olan etkisinin belirlenmesi gerekmektedir.

Bütün isterler göz önüne alındığında, palin hareketlerinin modellenebildiği, hava burgacı ile pal etkileşimlerin çözümlenebildiği ve ses seviyelerinin elde edilebileceği, bütünleşik bir döner kanat sayısal çözümünün yapılmasına ihtiyaç bulunmaktadır. Bu çalışmada, bahsedilen türden analizler gerçekleştirme yeteneğine haiz olacak bir kod geliştirme çalışmaları anlatılmaktadır. Yöntem olarak farklı eleman tiplerini barındıran çözüm ağlarını çözebilecek sonlu hacim yöntemi ile birlikte büyük deplasman hareketlerine olanak sağlayabilen ALE yaklaşımı kullanılmaktadır. Aşağıda yöntemin anlatımını müteakip, şu ana kadar geliştirilmiş bulunan sürümün doğrulama işlemi için literatürde bulunan bir rotor çözümü ile elde edilen sayısal çözümlerin kıyaslanması verilmekte ve tartışılmaktadır.

YÖNTEM

Helikopter düz uçuş koşulunda çırpıntı hareketinden dolayı pal hareketlerinde büyük yer değişiklikleri gözlemlenebilmektedir. Ayrıca dönen pal hareketi türbülanslı ve hava burgaçlı bir hava akışı da yaratmaktadır. Rotor etrafındaki akışın karakteristiğinden dolayı viskoz akışkan terimlerinin ve türbülansın da hesaplamalara dahil edilmesi gerekmektedir. Ayrıca pal hareketlerinde büyük yer değişiklikleri sayısal olarak çözümde, çözüm ağının büyük oranda değişmesi sayısal çözüm ağının kalitesinin bozulmasına ve çözümün yakınsamasını zorlaştırmaktadır. Bundan dolayı yüksek ağ hareketlerine ihtiyaç duyulan analizlerde ALE denklemlerinin [Donea, J., 2004] kullanılması daha uygun bir yaklaşımdır. Navier-Stokes denklemleri, Spalart-Allmaran türbülans modeli ve ALE yönteminin uygulaması aşağıda anlatılmaktadır.

Navier-Stokes Denklemleri

Skalar bir nicelik olan U için korunum denklemlerinin genel ifadesi 1 no'lu denklemde ile verilmiştir. Bu denklemde U^* , U değerinin birim kütledeki ifadesidir.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \int_{\partial\Omega} [U(\vec{V} \cdot \hat{n}) - K\rho(\nabla U^* \cdot \hat{n})] dS = \int_{\Omega} Q_v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{Q}_s \cdot \hat{n} dS \quad (1)$$

Korunum denklemlerinin vektörel bir nicelik olan \vec{U} için ifadesi 2 no'lu denklem ile verilmiştir.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{U} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\vec{F}_c - \vec{F}_d) \cdot \hat{n} dS = \int_{\Omega} \vec{Q}_v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{Q}_s \cdot \hat{n} dS \quad (2)$$

Bu denklemlerde, \vec{F}_c taşınım akı (convective flux) tensörü, \vec{F}_d yayılım (diffusive) akı tensörü, \vec{Q}_v hacim kaynak terimi ve \vec{Q}_s yüzey kaynak terimi olarak kullanılmaktadır.

Vizkoz Gerilim (Viscous Stresses): Vizkoz terimler akışkandaki moleküler aktivitelerin yaratmış olduğu momentum yayılımından kaynaklanmaktadır. Bu terimler $\bar{\tau}$ stres tensörü ile ifade edilir. Kartezyen koordinat sisteminde, bu tensör 3 no'lu denklem ile ifade edilmektedir.

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (3)$$

3 no'lu denklem içerisinde basma/çekme yönündeki stres birleşenleri (normal stres) τ_{xx}, τ_{yy} ve τ_{zz} ile ifade edilmektedir. Diğer terimler ise kesme gerilmesi (shear stres) birleşenlerini temsil etmektedir. Viskoz stres terimleri ortamın dinamik özelliklerinden etkilenmektedirler. Newtonian akışkanlar için, kesme gerilmesi stres değerleri hızın değişim oranları ile orantılıdır. Bundan dolayı viskoz stres tensörünün bileşenleri 4-9 no'lu denklemler ile ifade edilmektedir.

$$\tau_{xx} = \lambda \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

$$\tau_{yy} = \lambda \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5)$$

$$\tau_{zz} = \lambda \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (9)$$

Bu denklemlerde, λ ikincil viskozite katsayısı ve μ dinamik viskozite katsayısıdır.

Basma/çekme yönündeki stres denklemlerini çözebilmek için bilinmeyen terimler ile denklem sayısını eşitleyebilmek için Stokes [Stokes, G.G.,1845] "bulk viscosity" adı altında hipotez geliştirmiştir. Bu hipoteze göre viskozite aynı sıcaklıkta sabit oranda hacim değişimi sırasında akışkanın içerisindeki enerjinin iletimini tariflemektedir. Bu ifade 10 no'lu denklemdeki gibi belirtilmektedir.

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \quad \text{veya} \quad \lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (10)$$

Çok yüksek sıcaklık ve basınç değeri gibi istisnalar dışında, Stokes hipotezi denklem takımlarından terimini elimine etmek için kullanılabilir. Bu hipotez kullanıldığında, basma/çekme yönündeki viskoz stres ifadeleri 11-13 no'lu denklemleri ile ifade edilmektedir.

$$\tau_{xx} = 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \quad (11)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \quad (12)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \quad (13)$$

Navier-Stokes Denklemleri ile Sistem Tanımı: Farklı akış terimlerini daha iyi anlayabilmek için, korunum kanunları tek bir denklem içerisinde bütünleştirilmiştir. Bu denklem içerisinde iki akı vektörü (\vec{F}_c ve \vec{F}_v) tanımlanmıştır. \vec{F}_c taşınım akı vektörünü, \vec{F}_v ise yayılım akı vektörünü göstermektedir. Bunun yanında kaynak terimler olarak tanımlanan \vec{Q} ifadesi, gövdeye etki eden kuvvet ve hacimsel ısınmalardan kaynaklı tüm hacim kaynak terimlerini içermektedir.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{W} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\vec{F}_c - \vec{F}_v) dS = \int_{\Omega} \vec{Q} d\Omega \quad (14)$$

Bu denklemlerde, \vec{W} korunum değişkenlerini, \vec{F}_c taşınım akısı vektörünü, \vec{F}_v yayılım akısı vektörünü ve \vec{Q} kaynak terimleri temsil etmektedir.

Korunum değişkenleri üç boyutta 15 no'lu denklemde belirtilen beş bileşenden oluşmaktadır.

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (15)$$

İletim akısının vektörel ifadesi, hız vektörü $\vec{V} = [u, v, w]^T$ ile birim normal vektörün $\hat{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ skalar çarpımları cinsinden yazılabilmektedir.

$$\vec{F}_c = \begin{bmatrix} \rho V_n \\ \rho u V_n + n_x p \\ \rho v V_n + n_y p \\ \rho w V_n + n_z p \\ \rho H V_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

Bu denklemde $V_n = \vec{V} \cdot \hat{n}$ olup 17 no'lu denklemdeki gibi ifade edilmektedir.

$$V_n = un_x + vn_y + wn_z \quad (17)$$

Toplam entalpi H 18 no'lu denklemdeki gibi ifade edilmektedir.

$$H = E + \frac{p}{\rho} \quad (18)$$

Yayılım akısının vektörel ifadesi ise 19 no'lu denklemde belirtilmiştir.

$$\vec{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} \\ n_x \tau_{yx} + n_y \tau_{yy} + n_z \tau_{yz} \\ n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z \tau_{zz} \\ n_x \Theta_x + n_y \Theta_y + n_z \Theta_z \end{bmatrix} \quad (19)$$

burada

$$\Theta_x = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (20)$$

$$\Theta_y = u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (21)$$

$$\Theta_z = u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (22)$$

terimleri vizkoz stresin yaptığı işin yanısıra ısı iletimini de göstermektedir.

Kaynak terimleri ise 23 no'lu denklemde gösterilmiştir.

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_{e,x} \\ \rho f_{e,y} \\ \rho f_{e,z} \\ \rho \vec{f}_e \cdot \vec{V} + \dot{q}h \end{bmatrix} \quad (23)$$

3 boyutlu N-S (Navier-Stokes) denklemlerinde beş adet ana bileşen olmasına rağmen $[\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E]$, yedi adet bilinmeyen mevcuttur $[\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E, p, T]$. Bundan dolayı denklem takımların çözülebilmesi amacıyla iki adet ekstra denklem takımına ihtiyaç bulunmaktadır. Bu iki denklem takımı termodinamik ilişkilerden elde edilmektedir. 1) Basınç, yoğunluğun ve sıcaklığın fonksiyonu cinsinden yazılmalıdır. 2) İçsel enerji ya da entalpi, basınç ya da sıcaklığın fonksiyonu cinsinden yazılmalıdır. Bunun yanı sıra denklem takımının çözülebilmesi için viskozite katsayısı μ ve ısı iletim katsayısı k , akışın fonksiyonu cinsinden ifade edilmelidir.

$$p = (\gamma - 1)\rho(E - \vec{V} \cdot \vec{V}/2) \quad (24)$$

$$\mu = \frac{1.45T^{3/2}}{T + 110} 10^{-6} \quad (25)$$

$$k = C_p \frac{\mu}{Pr}, \quad Pr \approx 0.72 \quad (26)$$

$$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (27)$$

Ayrıştırma (Discretization)

N-S denklem takımları için uygulanan nümerik çözümlerin temel noktası zaman ve düzlemde ayrıklaştırma yöntemidir. Çözüm ağına bağlı olarak, uygun kontrol hacimleri kullanılarak iletim, yayılım ve kaynak terimlerin entegralleri hesaplanabilir. Yüzey entegrali yaklaşık olarak kontrol yüzeylerinden geçen akıların toplamı cinsinden ifade edilebilir. Bu tanımlama uzaysal ayrıklaştırma olarak tanımlanmaktadır.

İletim akıları düşünüldüğünde, kontrol hacminin yüzeylerinde değerlerin biliniyor olmasına rağmen akış değişkenlerinin bilinmiyor olması en temel problemlerden birisidir. Bunun çözülebilmesi amacıyla ya akı değerlerinin interpolasyonunun yapılması ya da akış değişkenlerinin kullanılıyor olması gerekmektedir. Geliştirilen kodda "upwind discretization scheme" kullanılmıştır.

Viskoz akıların kontrol hacmindeki yüzeylerde hesaplanması sırasında kullanılan genel yöntem akış değerlerinin aritmetik ortalamasının alınması yöntemidir. Geliştirilen kodda aritmetik ortalama yaklaşımı kullanılmıştır.

Gradyanların Hesaplanması: Viskoz akı hesaplamaları için hız bileşenlerinin ve sıcaklığın gradyanlarının hesaplanması gerekmektedir. Bundan dolayı geliştirilen kodda bu değerlerin hesaplanması için Green Gauss teoremi kullanılmıştır.

Green Gauss Teoremi herhangi skalar bir U değeri için, yüzey entegralinin U değeri ve basma/çekme yönündeki vektörlerinin çarpımının belli bir hacimde toplamı olarak ifade etmektedir.

$$\nabla U = \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega} U \hat{n} dS \quad (28)$$

Geliştirilen kodda hücre merkezli düzen (cell centered scheme) kullanılmıştır. N_f tane yüzeyi olan i endeksli bir hücre için gradyanların hücre merkezindeki değeri aşağıdaki 29 no'lu denklem kullanılarak elde edilmiştir.

$$\nabla U = \frac{1}{\Omega} \sum_{j=1}^{N_f} \frac{1}{2} (U_i + U_j) \hat{n}_{ij} \Delta S_{ij} \quad (29)$$

burada U_j gradyanı alınan değişkenin j endeksli komşu hücredeki değeridir.

Viskoz akıların ayrıştırılması: Yayılım akıların, \vec{F}_v , hesaplanabilmesi için, akış niceliklerinin ve birinci derece türevlerinin kontrol hacminin yüzeylerinde elde edilmesi gerekmektedir. Viskoz akıların hesaplanması için kullanılan kontrol hacmi, iletim akıların hesaplanması için kullanılan kontrol hacmi ile tutarlı ayrıklaştırılmanın yapılabilmesi ve hesaplamaların kolaylaştırılması için aynı kabul edilmiştir.

Viskoz akıların eliptik özelliklerinden dolayı, viskoz terimlerin hesaplanmasında kullanılan hız bileşenleri, dinamik viskozite ve ısı iletim katsayısı değerleri yüzeylerde ortalama alınmaktadır. Endeksleri i ve j olan iki hücrenin paylaştığı yüzeydeki değişken değeri basitçe

$$U_{ij} = \frac{1}{2}(U_i + U_j) \quad (30)$$

şeklinde ifade edilir. Gradyanların kontrol hacminde hesaplanması sonrası, yüzeylerin orta noktasına basit ortalama yöntemi kullanılarak taşınması sağlanabilir.

$$\nabla U_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla U_i + \nabla U_j) \quad (31)$$

Türbülans Modellemesi

Dönen kanatlar etrafında akışın türbülanslı bir yapıya sahip olmasından dolayı, bu kaotik akışın modellenmesi gerekmektedir. Moleküller ve katı duvar arasında artan momentum ve enerji transferinden dolayı, türbülanslı akışlar laminar akışlara nazaran daha fazla yüksek yüzey sürtünme ve ısı transferi oranlarına sebep olmaktadır.

Günümüzde türbülanslı akışların çözümü halen zorluğunu korumaktadır. Tüm akış tiplerini çözebilen ortak bir türbülans modeli olmadığı için, akış tipi için en uygun türbülans modelinin kullanılması gerekmektedir.

Reynolds averaged Navier-Stokes (RANS) denklemlerinde Reynolds stres değerini en kolay hesaplanma yöntemi birinci derece modellerdir. Bu modeller arasında Spalart-Allmaras türbülans modelinin kanat profili ve kanat etrafındaki akışları iyi çözdüğü bilindiğinden, geliştirilen kodda Spalart-Allmaras türbülans modeli kullanılmıştır. Türbülans modellerindeki temel amaç eddy viskozite teriminin, μ_t , modellenmesidir.

Spalart-Allmaras: Spalart-Allmaras türbülans modeli eddy viskozite terimi, $\bar{\nu}$, için iletim denklemleri kullanılmaktadır. Bu model genellikle iz akımı ve düz plaka problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Ayrıca ters basınç gradyanlı türbülanslı hava akışlarında iyi sonuçlar verdiği bilinmektedir. Bunların yanı sıra tek denklem kullanıyor olması ve çözüm içerisindeki başka bir noktaya bağımlı olmaması düzensiz yapıdaki elemanlar için de uygundur. Spalart-Allmaras türbülans modeli hızlı ve sağlıklı yakınsayabilen bir türbülans modelidir. Bahsedilen bu avantajlardan dolayı, geliştirilen kodda Spalart-Allmaras türbülans modeli kullanılmıştır.

Spalart-Allmaras türbülans modeli diferansiyel formunda tensor formatında 32 no'lu denklemde gösterildiği gibi ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\nu}u_j) &= C_{b1}(1 - f_{t2})\bar{S}\bar{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu_L + \bar{\nu}) \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial x_j} \right] + C_{b2} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial x_j} \right\} \\ &\quad - \left(C_{w1}f_w - \frac{C_{b1}}{K^2}f_{t2} \right) (\bar{\nu}/d)^2 + f_{t1} \|\Delta \vec{V}\|_2^2 \end{aligned} \quad (32)$$

32 no'lu denklemde eşitliğin sağ tarafında bulunan terimler sırasıyla, eddy viskozite üretim terimi (eddy viscosity production), yayılım korunumu (conservative diffusion), korunumsuz yayılım (non-conservative diffusion), yakın duvar türbülans yıkımı (near wall turbulence destruction),

üretim teriminin geçiş sönümlenmesi (transition damping of production) ve türbülansın geçiş kaynağı (transition source of turbulence) 'nı tariflemektedir.

Sonlu hacimler şemasının uygulaması sırasındaki dönüştürme işleminin uygulanması sonucu Spalart-Allmaras türbülans modeli 33 no'lu denklemde gösterilmiştir.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \bar{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (F_{c,T} - F_{v,T}) dS = \int_{\Omega} Q_T d\Omega \quad (33)$$

bu denklemde Ω kontrol hacmini, $\partial\Omega$ kontrol yüzeyini göstermektedir.

İletim akısı 34 no'lu denklemde gösterilmiştir.

$$\vec{F}_{c,T} = \bar{v} V \quad (34)$$

Yayılim akısı 35 no'lu denklemde gösterilmiş ve birinci dereceden upwind uygulaması ile ayrıklaştırılmaktadır.

$$\vec{F}_{v,T} = n_x \tau_{xx}^T + n_y \tau_{xy}^T + n_z \tau_{xz}^T \quad (35)$$

bu denklemde n_x, n_y, n_z birim normal vektörünün komponentlerini tariflemektedir. Basma/çekme yönündeki viskoz stress terimleri 36-38 no'lu denklemlerde gösterilmiştir.

$$\tau_{xx}^T = \frac{1}{\sigma} (\nu_L + \bar{v}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \quad (36)$$

$$\tau_{yy}^T = \frac{1}{\sigma} (\nu_L + \bar{v}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad (37)$$

$$\tau_{zz}^T = \frac{1}{\sigma} (\nu_L + \bar{v}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad (38)$$

Kaynak terimler ise 39 no'lu denklemde gösterilmiştir.

$$Q_T = C_{b1}(1 - f_{t2})\bar{S}\bar{v} + \frac{C_{b2}}{\sigma} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] - \left[C_{w1}f_w - \frac{C_{b1}}{K^2}f_{t2} \right] \left(\frac{\bar{v}}{d} \right)^2 + f_{t1} \|\Delta \vec{V}\|_2^2 \quad (39)$$

Bu denklem içerisinde, Laminar kinematic viscosite

$$\nu_L = \frac{\mu_L}{\rho} \quad (40)$$

Türbülans eddy viskosite

$$\mu_T = f_{v1}\rho\bar{v} \quad (41)$$

Üretim terimleri

$$\bar{S} = f_{v3}S + \frac{\bar{v}}{K^2 d^2} f_{v2} \quad (42)$$

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3} \quad (43)$$

$$f_{v2} = \left(1 + \frac{\chi}{C_{v2}} \right)^{-3} \quad (44)$$

$$f_{v3} = \frac{(1 + \chi f_{v1})(1 - f_{v2})}{\max(\chi, 0.001)} \quad (45)$$

$$\chi = \frac{\bar{v}}{\nu_L} \quad (46)$$

Eddy viskositenin yıkımının kontrolü ve

$$f_w = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6} \quad (47)$$

$$g = r + C_{w2}(r^6 - r) \quad (48)$$

$$r = \frac{\bar{v}}{\bar{S}K^2d^2} \quad (49)$$

Laminar-Türbülans geçişi

$$f_{t1} = C_{t1}g_t \exp\left(-C_{t1}\frac{\omega t^2}{\Delta U^2}(d^2 + g_t^2 d_t^2)\right) \quad (50)$$

$$f_{t2} = C_{t3} \exp(-C_{t4}\chi^2) \quad (51)$$

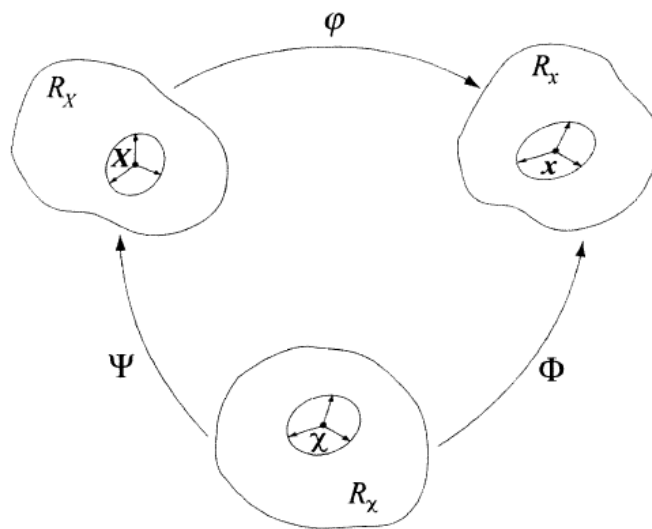
$$g_t = \min\left[0.1, \frac{\|\Delta \vec{V}\|_2}{\omega_t \Delta x_t}\right] \quad (52)$$

yukarıda gösterilen denklem takımları ile hesaplanmaktadır. Spalart-Allmaras türbülans modelinde kullanılan sabit katsayı değerleri aşağıdaki belirtilmiştir.

$$\begin{aligned} C_{b1} &= 0.1355, C_{b2} = 0.622, C_{\nu1} = 7.1, C_{\nu2} = 5 \\ \sigma &= \frac{2}{3}, K = 0.41 \\ C_{w1} &= \frac{C_{b1}}{K^2} + \frac{(1+C_{b2})}{\sigma}, C_{w2} = 0.3, C_{w3} = 2, C_{t1} = 1 \\ C_{t2} &= 2, C_{t3} = 1.3, C_{t4} = 0.5 \end{aligned}$$

ALE yönteminin uygulanması

ALE yöntemi hareket tanımlamasında, madde (R_x) ve uzamsal (R_x) konfigürasyonları referans olarak alınmamaktadır. Bu sebepten dolayı başka bir etki alanına (domain) ihtiyaç duyulmaktadır. Referans koordinatların, χ , çözüm ağı noktalarını tariflendiği başka bir etki alanı, R_χ , referans olarak alınmaktadır [Donea.J., 2004]. Şekil 3'de bu etki alanları arasındaki dönüşümleri göstermektedir.



Şekil 3: ALE yöntemindeki etki alanları arası hareket tanımlama için dönüşümler [Donea, J., 2004]

ALE yaklaşımında v, \hat{v}, ω hızları 53-55 no'lu denklemler ile gösterilmiştir. Buna göre; Çözüm ağı hızı :

$$\hat{v}(\chi, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\chi} \quad (53)$$

Maddenin referans ilgi alanındaki hızı :

$$\omega = \left. \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \quad (54)$$

Maddenin hızı :

$$\mathbf{v} = \hat{v} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \chi} \cdot \omega \quad (55)$$

53-55 no'lu denklemlerin kullanımıyla iletim (convective) hızı c elde edilebilir. İletim hızı maddenin hızı ile çözüm ağı hızı arasındaki fark olarak 56 no'lu denklemden gösterildiği gibi tariflenmektedir. İletim hızı :

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \chi} \cdot \omega \quad (56)$$

Korunum denklemlerini ALE formunda yazabilmek için, zaman türevleri arasında bir ilişki bulunması gerekmektedir. Bu ilişki madde zaman türevleri (material time derivatives) ile referans zaman türevleri arasında yazılmalıdır. Temel ALE denklemlerinde madde zaman türevleri, referans zaman türevleri ve uzaysal zaman türevleri arasındaki ilişki fiziksel bir değer olan f için 57 no'lu denklemden belirtilmektedir.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\chi} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{c} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\chi} + \mathbf{c} \cdot \nabla f \quad (57)$$

Diferansiyel formatta ALE denklemleri, korunum denklemlerinin 58-60 no'lu denklemlerde belirtilen maddi (material) türevleri kullanılarak elde edilebilir.

Kütlenin Korunumu Denklemi ;

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (58)$$

Momentumun Korunumu Denklemi;

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (59)$$

Enerjinin Korunumu Denklemi;

$$\rho = \frac{dE}{dt} = \rho \left(\left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \nabla E \right) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} \quad (60)$$

denklemlerinde ρ kütle yoğunluğunu, \mathbf{v} madde hızını, $\boldsymbol{\sigma}$ Cauchy stress tensörünü, E spesifik toplam enerjiyi, \mathbf{b} ise yüzey kuvvet vektörünü temsil etmektedir. 58-60 no'lu denklemler kullanılarak ALE formunda korunum denklemleri elde edilmek istenirse, madde hızının \mathbf{v} , $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{v}$ iletim hızı ile ilgili iletim terimlerinde değiştirilmesi gerekmektedir. Bu denklemden \hat{v} çözüm ağı hızını temsil

etmektedir. Bu değişiklik yapıldığında ALE formunda elde edilen korunum denklemleri 61-63 no'lu denklemler arasında belirtildiği forma ulaşmaktadır.

ALE Formunda Kütleinin Korunumu Denklemi ;

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (61)$$

ALE Formunda Momentumun Korunumu Denklemi;

$$\rho \left(\left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (62)$$

ALE Formunda Enerjinin Korunumu Denklemi;

$$\rho \left(\left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \cdot \nabla E \right) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} \quad (63)$$

Integral formunda elde edilen ALE denklemleri 64-66 no'lu denklemler arasında belirtilmiştir.

Integral Formunda ALE Kütleinin Korunumu Denklemi ;

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \int_{V_t} \rho dV + \int_{S_t} \rho \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (64)$$

Integral Formunda ALE Momentumun Korunumu Denklemi;

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \int_{V_t} \rho \mathbf{v} dV + \int_{S_t} \rho \mathbf{v} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_t} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}) dV \quad (65)$$

Integral Formunda ALE Enerjinin Korunumu Denklemi;

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \int_{V_t} \rho E dV + \int_{S_t} \rho E \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_t} (\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b}) dV \quad (66)$$

bu denklemlerde

V_t : herhangi bir hacim

$S_t = \partial V_t$ ise hacmin sınırlarını tariflemektedir.

Integral formatında belirtilen ALE denklemlerinde $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ ya da $(\mathbf{c} = 0)$ olma koşulu denklemlerin Lagrangian formatında çözüm yapacağını, $\hat{\mathbf{v}} = 0$ ya da $\mathbf{c} = \mathbf{v}$ olma koşulu denklemlerin Eulerian formatında çözüm yapılacağını göstermektedir.

Geliştirilen kod, hücre yüzeylerindeki nümerik akı (flux) hesaplamalarını Standart ROE metodu ile hesaplamaktadır. ALE algoritması için nümerik akı değerleri sol ve sağ yöndeki fiziksel akı hesaplamalarından elde edilmektedir.

$$F^\perp = \frac{1}{2} \left(\hat{F}(U_R) + \hat{F}(U_L) \right) - \frac{1}{2} |\hat{A}| (U_R - U_L) \quad (67)$$

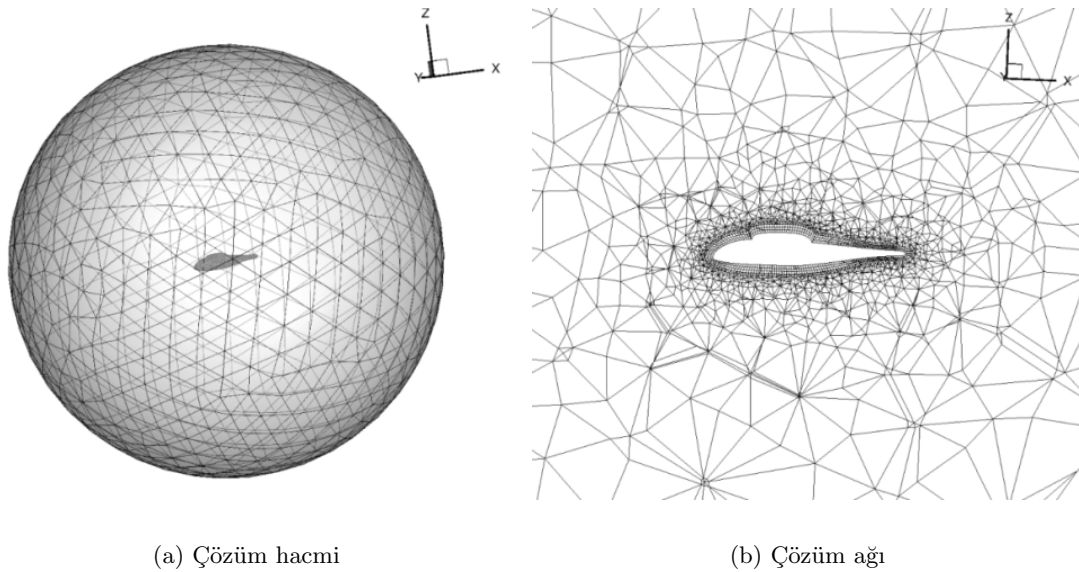
ALE algoritması için ROE şemasındaki fiziksel akı hesaplamasının göreceli hız ile hesaplanması gerekmektedir. Ayrıca $|\hat{A}|$ matrisi özdeğerleri, sabit çözüm ağı özdeğerlerinden çözüm ağı hızının çıkartılması ile elde edilmektedir.

UYGULAMALAR

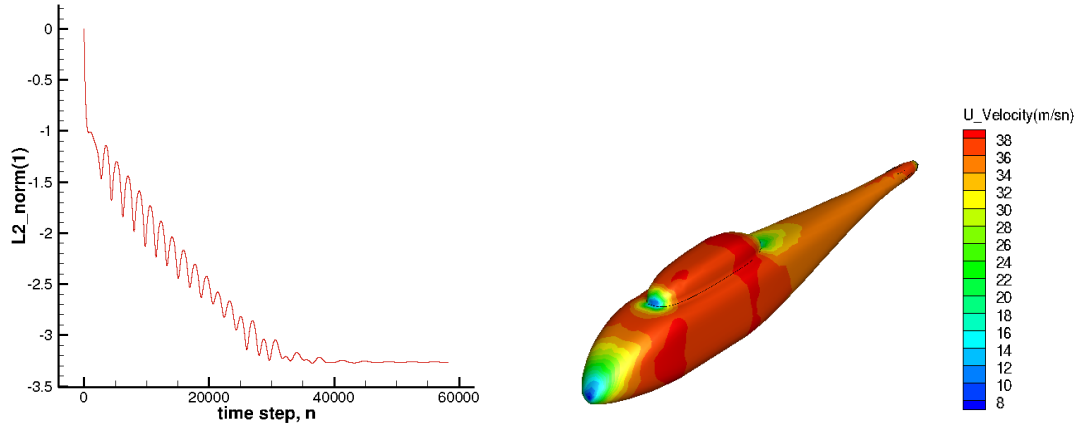
Bu bölümde yukarıda anlatılan kodun geliştirilmesi sürecine gerçekleştirilen ilk deneme çalışma safhalarından, HAD (Hesaplama Akışkanlar Dinamiği) analizlerinin yapılabilmesinin ilk koşulu olan çözücüye uygun çözüm ağı dosyalarının hazırlanması ve daha sonra Euler denklemleri kullanılarak basit modeller üzerine başarı ile hesaplamaların tamamlanması ve ilgili sonuçların sunulması anlatılmaktadır. Sınanan ilk model, literatürde deneysel ve sayısal çalışmalar için tasarlanmış bulunan ve ROBIN olarak adlandırılan helikopter gövde modelidir. İkincisi ise NACA 0012 profilinden oluşturulmuş ve askı konumunda deneysel olarak sınanmış bir rotor geometrisidir.

Robin geometrisi

Şekil 4 ROBIN geometrisi için hazırlanan çözüm ağı ve simetri ekseninden alınan kesit üzerindeki yüzey ağını göstermektedir. Geliştirilen kod tamamen hibrid elemanlardan oluşan yapısal olmayan çözüm ağlarında uygun olduğundan, hazırlanan çözüm ağı sınaama amacıyla 6 yüzlü ve 4 yüzlü hücrelerin karışımından oluşturulmuştur. ROBIN geometrisi $\alpha = 2.86^\circ$ hücum açısında ve $M = 0.087$ serbest akım hızında vizkozitesiz olarak çözülmüştür. Şekil 5(a) analiz boyunca elde edilen yakınsama eğrisini göstermektedir. Şekil 5(b) ise ROBIN geometrisi üzerindeki x -yönündeki hız dağılımını göstermektedir. Elde edilen sonuçlar sonrasında burun bölgesinde akışın yavaşladığı ve yüksek yoğunluk değişiminin olduğu, gövde etrafında ise akışın hızlandığı görülmüştür. Ayrıca akış kopmasının beklendiği bölgelerde de akışın yavaşlama etkisi yakalanabilmiştir. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda akışın genel karakteristiğinin yakalandığı değerlendirilmiştir. Bu sonuçlar ayrıca geliştirilen kodun 6 yüzlü ve 4 yüzlü elemanların karışımından oluşan çözüm ağlarında kodun sorunsuz çalışabildiğini göstermiştir.



Şekil 4: Robin çözüm ağı yapısı.



(a) Yakınsama grafiği

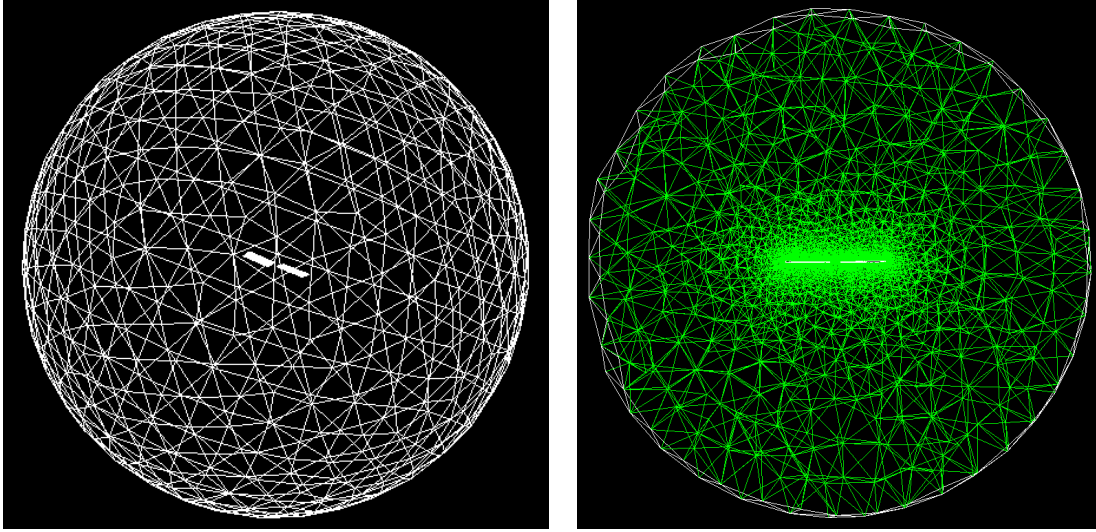
(b) Yüzey x -yönü hızı dağılımı

Şekil 5: ROBIN Euler çözümü.

NACA 0012 Rotor

İkinci deneme ALE'ye uygun olarak hareketli bir yüzey problemini içermektedir. Spesifik olarak NACA 0012 kesitinden elde edilmiş bulunan bir rotorun askı konumunda aerodinamik benzetimi gerçekleştirilmektedir. Rotor palleri kök ve uç yarıçapları sırasıyla 0.127 m ve 1.143 m olup, her bir palin açıklık oranı (yarıçap / veter uzunluğu) 6'dır. Twist açısı 0° olup, sinanan askı konumunda rotor hızı 2500 devir/dk, pal kök hücum açısı 8° 'dir. Literatürde bu konfigürasyon ve aerodinamik koşullar [Caradonna, F.X., Tung, C.,1981] deneyleri ile çalışılmıştır.

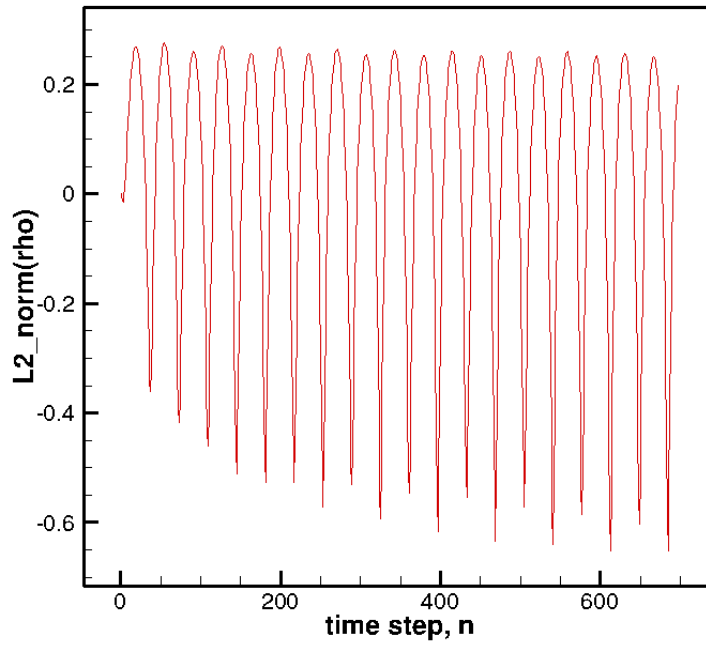
Şekil 6(a) NACA 0012 rotor problemi için hazırlanan çözüm ağının genel yapısını ve Şekil 6(b) paller boyunca alınan düşey kesitteki ağ yapısını göstermektedir. Şekil 7 ise yapılan analiz sonucunda elde edilen yakınsama grafiğini vermektedir. Çözüm mutlak koordinat (yere bağlı koordinat) sisteminde gerçekleştirildiği için yakınsama grafiği beklendiği gibi osilasyonlu yapıya sahiptir. Çözümün başında akış alanı, serbest akım değerlerine yani askı konumuna tekabül eden sıfır akış koşullarına eşitlenmiştir. Bundan dolayı rotorun döndürülmesiyle akış zaman içerisinde gelişmekte ve oturmaktadır. Bu durum Şekil 8'de 1. turdan 4. tura kadar gösterilmektedir. Görüldüğü gibi pal uçlarına doğru yerel pal hızı daha fazla olduğundan bu bölgelerdeki basınç değişimleri beklendiği gibi daha şiddetli olarak hesaplanmıştır. Sekizinci turdan sonra elde edilen sonuçların ne derece doğru hesaplandığı Şekil 9'da [Caradonna, F.X., Tung, C.,1981] deneyleri ile kıyaslanarak gösterilmeye çalışılmıştır. Bu sonuçlar doğrultusunda belli yerlerde test verisine yaklaşıldığı fakat bazı noktalarda ise farklılıkların olduğu gözlemlenmiştir. Bazı noktalarda gözüken farklılıkların rotor çözümleri için gereken sıklıkta bir çözüm ağının yaratılmamasına bağlanmıştır. Daha yoğun çözüm ağı ile deneysel sonuçlara daha yakın değerler elde edileceği düşünülmektedir.



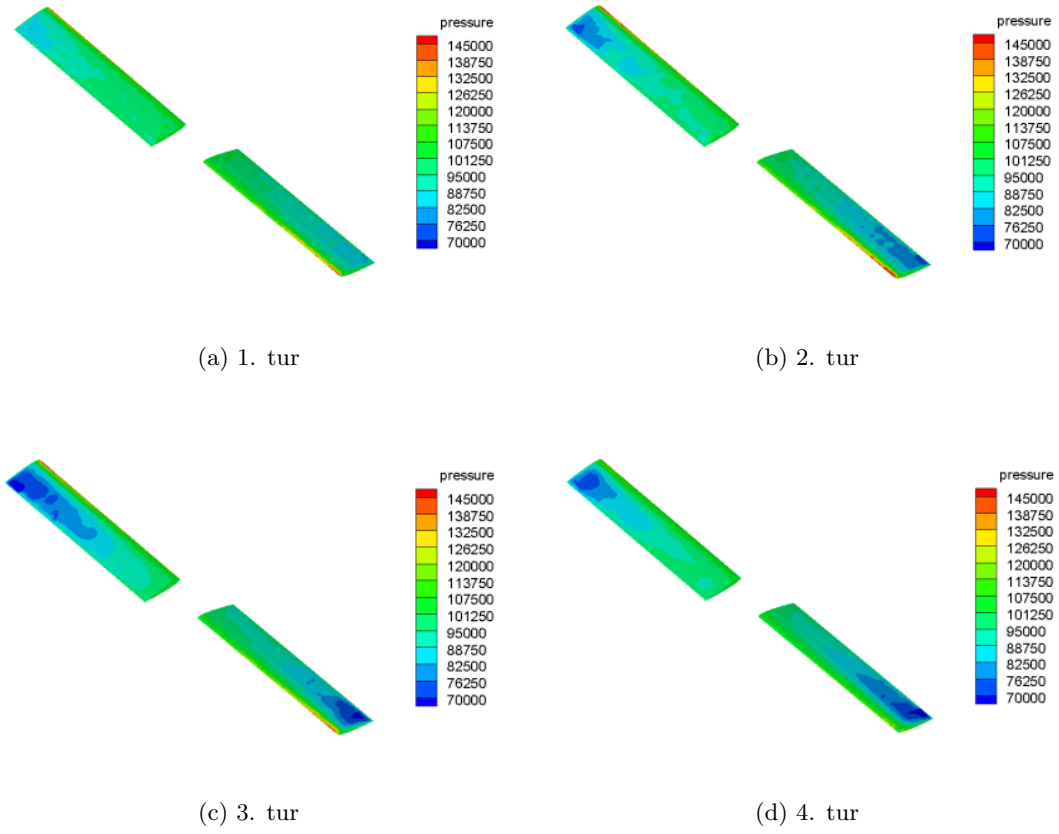
(a) Çözüm hacmi

(b) Çözüm ağı

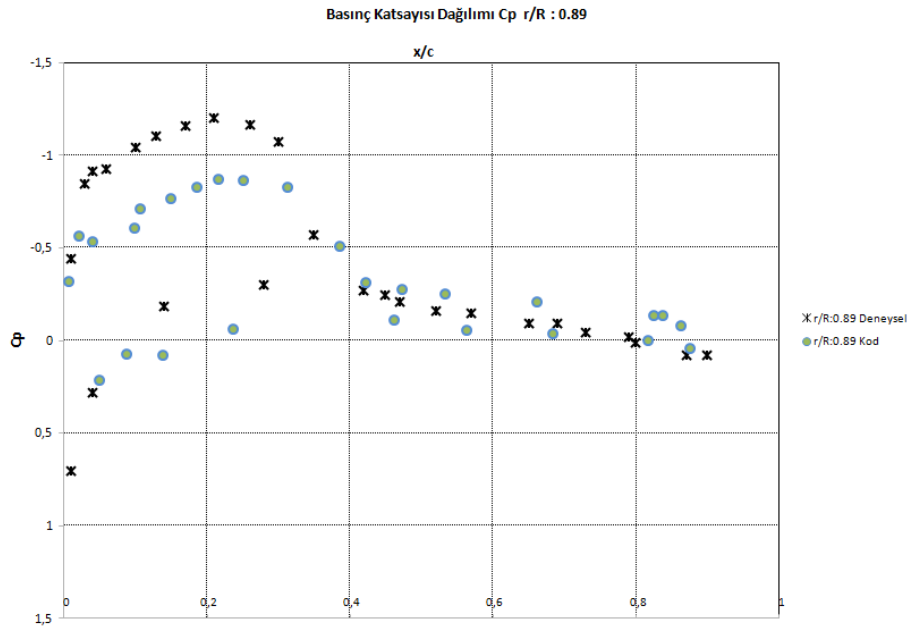
Şekil 6: NACA 0012 rotor çözüm ağı yapısı.



Şekil 7: NACA 0012 rotor çözümü yakınsama grafiği.



Şekil 8: NACA 0012 rotor basınç dağılımı gelişimi.



Şekil 9: NACA 0012 rotor basınç katsayısı karşılaştırması.

SONUÇ

Bu çalışmada, döner kanat yapısındaki hava araçlarında meydana gelen gürültü seviyelerin azaltılmasına yönelik tasarlanacak olan kontrol yüzeylerinin büyüklüğü, konumu ve kontrol parametrelerinin belirlenebilmesi için sonlu hacimler tabanlı bir çözücü geliştirilme süreci anlatılmıştır. Yöntem çözüm ağının uygun bir formatta çözücüye sağlanması ile başlayıp daha sonradan Navier-Stokes denklemlerinin uygulanması ile sonuç elde etme çalışmalarını kapsamaktadır. Yüksek yer değiştirmeye ihtiyaç duyulan analizlerde ALE yönteminin kullanılması hem çözüm karmaşıklığını hem de yakınsama miktarlarını iyileştirmektedir. Sonuçlar test verileri ile kıyaslandığında bir miktar farklılıklar gözlemlenmektedir. Bu farklılığın nedeni olarak ise döner kanat gibi karmaşık akış alanına sahip olan simülasyonlarda daha yoğun çözüm ağının kullanılması gerektiğidir. Ayrıca döner kanat akış alanı, türbülanslı bir yapıya sahip olduğundan dolayı, sürtünme ve türbülansın da modellenmelere eklenmesi gerektiği bilinmektedir. Mevcut durumda koda vizkoz terimler ve Spalart-Allmaras türbülans modeli yerleştirilmiştir ve doğrulama çalışmaları devam etmektedir.

İleriki çalışmalarda kodun çözüm sürelerini kısaltabilmek adına paralel bir yapıya kavuşturulması ve dinamik çözüm ağı güncelleme özelliğinin koda eklenmesi planlanmaktadır.

Kaynaklar

Caradonna, F.X. ve Tung, C., 1981. *Experimental and Analytical Studies of a Model Helicopter Rotor in Hover*, NASA-TM-81232

Donea, J., Huerta, A., Ponthot, J. ve Rodriguez-Ferran, A., 2003. *Finite Element Methods For Flow Problems*, Wiley

Donea, J. ve Huerta, A., 2003. *Finite Element Methods For Flow Problems*, Wiley

Höfingler, M. ve Leconte, P., 2004. *Development of an active flap rotor model*, 6th ONERA-DLR Aerospace Symposium

Ramasamy, M., 2004. *Contributions To The Measurement And Analysis Of Helicopter Blade Tip Vortices*, Ph.D, University of Maryland

Stokes, G.G., 1845. *On the Theories of Internal Friction of Fluids in Motion*, Trans. Cambridge Phil. Soc., pp. 287-305.