

ÜÇ BOYUTLU SINIR TABAKA AKIŞLARININ KARARLILIK ÖZELLİKLERİNİN DOĞRUSAL KARARLILIK TEORİSİ YAKLAŞIMI İLE BELİRLENMESİ

Yosheph Yang¹, Serkan Özgen²
Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara

ÖZET

Bu çalışmada üç boyutlu sınır tabaka akışlarının kararlılık özellikleri doğrusal kararlılık teorisi kullanılarak sayısal yaklaşımla ortaya çıkarılmıştır. Süpürme açısı sıfırdan farklı bir kanat düşünüldüğünde, veter boyunca ve vetere dik yöndeki hız bileşenlerinin sistematik olarak değiştirilmesi gerekmiş, bunun için Falkner-Skan-Cooke sınır tabaka çözümleri kullanılmıştır. Bu yaklaşıma göre akış parametreleri Falkner-Skan parametresi olan β ve vetere dik yöndeki potansiyel hız bileşeninin veter yönündeki potansiyel hız bileşenine oranını ifade eden akış açısı θ 'dır. Çözüm için öncelikle farklı β ve θ değerleri için hız profilleri sayısal olarak üretilmiştir. Hız profillerinin doğrulukları belirlendikten sonra bu hız profilleri doğrusal kararlılık teorisi kullanılarak türetilen kararlılık denklemlerine uygulanmış ve lokal kararlılık özellikleri yine sayısal olarak belirlenmiştir. Hem hız profili denklemlerinin, hem de kararlılık denklemlerinin çözümünde geliştirilmiş atış yöntemi kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar vetere dik yöndeki hız bileşeninin basınç gradyanı etkisini azalttığına işaret etmektedir. Yani hızlanan akışlarda ($\beta > 0$) vetere dik hız bileşeni akışı daha kararsız hale getirmekte, yavaşlayan akışlarda ($\beta < 0$) ise daha kararlı hale getirmektedir. Bu çıkarım literatürde yer alan sonuçlar ile nitelik olarak uyumludur.

GİRİŞ

Laminar akıştan türbülanslı akışa geçiş aerodinamik biliminin en önemli araştırma konularından biridir. Akışın laminar ya da türbülanslı olması bir uçak kanadının parazit sürüklenme kuvvetini, yeniden atmosfere giren bir uzay aracının ısı kalkanı tasarımını doğrudan etkileyen faktörlerdir. Akışın kararlı halden kararsız hale geçmesi türbülansa geçişin ilk aşamasıdır ve akış kararsızlıklarının tarif edilebilmesi önemli bir araştırma konusudur.

İki boyutlu akışların kararlılık analizleri ile ilgili literatürde birçok deneysel ve sayısal çalışma bulunmasına rağmen üç boyutlu akışlar ile ilgili çalışmalar çok daha azdır. Bu çalışmada üç boyutlu sınır tabaka akışlarının kararlılık özellikleri, Falkner-Skan-Cooke denklemlerinin çözümüyle elde edilen hız profillerinin, doğrusal kararlılık teorisine göre türetilmiş kararlılık denklemlerine uygulanmasıyla ortaya çıkarılmıştır. Çalışmada geliştirilmiş atış yöntemine dayalı sayısal bir yaklaşım benimsenmiştir.

YÖNTEM VE ÇÖZÜM

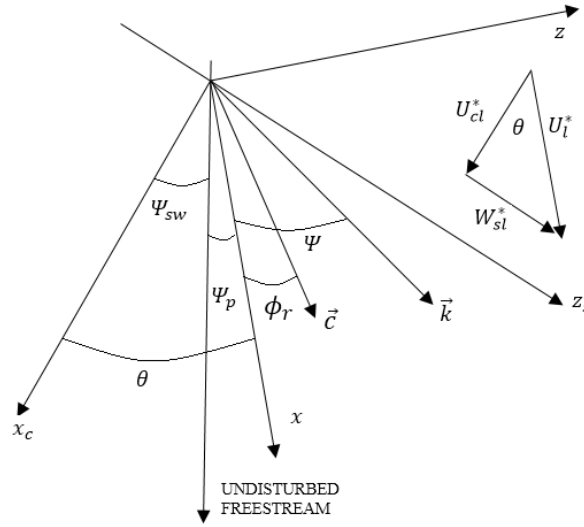
Sınır Tabaka Akışı Denklemleri

Bu çalışma için süpürme açısı sıfırdan farklı olan bir kama (wedge) geometrisi kullanılmıştır. Bu sayede veter boyunca ve vetere dik yöndeki akışın sadece iki parametre kullanılarak sistematik bir şekilde modellenmesi mümkün olmuştur. Bu parametreler Falkner-Skan parametresi olan β ve

¹ Yük. Lisans Öğr., Havacılık ve Uzay Müh. Böl., E-posta: yosheph.yang@metu.edu.tr

² Prof. Dr., Havacılık ve Uzay Müh. Böl., E-posta: sozgen@ae.metu.edu.tr

vetere dik yöndeki potansiyel hız bileşeninin veter yönündeki potansiyel hız bileşenine oranını ifade eden akış açısı θ 'dır. Bu akışa ait geometri Şekil 1'de sunulmaktadır [Mack, 1984].



Şekil 1: İncelenen akış geometrisi [Mack, 1984]

Şekil 1'e göre kama düzleminde hücum kenarına dik yöndeki (x_c^* yönünde) sürtünmesiz akış hızı Denklem 1'de gösterildiği gibi ifade edilmektedir:

$$U_{ce}^* = C^*(x_c^*)^m. \quad (1)$$

Bu denklemde kama açısı $\beta\pi/2$, Falkner-Skan parametresi ise $\beta = 2m/(m+1)$ olarak ifade edilmektedir. Basınç gradyanı parametresi ise $m = (x_c^*/U_{ce}^*)(dU_{ce}^*/dx_c^*)$ şeklindedir.

Hücum kenarı yönündeki (z_s^* yönünde) hız bileşeni ise

$$W_{se}^* = \text{sabit} \quad (2)$$

şeklindedir. Bu şekilde sürtünmesiz akış hız bileşenleri ile ifade edilen sınır tabaka akışını veter boyunca yani x_c^* yönünde tanımlayan denklem Falkner-Skan denklemidir [Mack, 1984]:

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0. \quad (3)$$

Boyutsuz akış fonksiyonu f ile veter boyunca sınır tabaka içindeki hız arasındaki bağıntı ise

$$f'(y) = U_c^*(y^*)/U_{ce}^* = U_c \quad (4)$$

olarak ifade edilebilir. Duvara dik yöndeki boyutsuz mesafe ise

$$y = y^*/L^* \quad (5)$$

olarak tanımlanmaktadır. Denklem 5'te L^* , Falkner-Skan uzunluk ölçüsü birimidir ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$L^* = [2\nu^*x_c^*/(m+1)U_{ce}^*]^{1/2}. \quad (6)$$

Denklem 3 çözüldükten sonra hücum kenarı yönündeki akış (z_s^* yönünde) Denklem 7 kullanılarak çözülebilir [Mack, 1984]:

$$g'' + fg' = 0. \quad (7)$$

Boyutsuz akış fonksiyonu g ile vetere dik yönde sınır tabaka içindeki hız arasındaki bağıntı Denklem 8'deki gibidir:

$$g(y) = W_s^*(y^*)/W_{se}^* = W_s. \quad (8)$$

Denklem 3 ve 8'in çözülebilmesi için gerekli sınır şartları ise Denklem 9 ve 10'da verilmiştir.

$$y = 0, f' = g = 0 \quad (9)$$

$$y \rightarrow \infty, f' \rightarrow 1, g \rightarrow 1 \quad (10)$$

Denklem 3, 7, 9 ve 10'dan oluşan denklem seti Nachtsheim ve Swigert'in önerdiği modifiye edilmiş atış yöntemi (modified shooting method) ile çözülmüştür [Nachtsheim, 1965; Swigert, 1965]. Bu şekilde hız profilleri istenilen β değeri için elde edilebilir. Şekil 2, 3 ve 4'te, sırasıyla $\beta = -0.05, 0$ ve 0.1 değerleri için veter yönünde ve vetere dik yönde elde edilen hız profillerini görülmektedir. Şekillerde Falkner-Skan parametresi'nin farklı değerleri için profillerde çok büyük bir değişiklik gözlenmemektedir. Burada belirtilmesi gereken önemli bir nokta ise vetere dik yöndeki hız profilinin Blasius profiline $\beta=0$ çok yakın olduğudur. Bu yakınlığa Mack tarafından da dikkat çekilmiştir [Mack, 1984].

Kararlılık Denklemleri

Denklem 3, 7, 9 ve 10'dan oluşan denklem setinin çözümüyle elde edilen hız profillerinin kararlılık denklemlerinde kullanılabilmesi için Şekil 1'de görülen potansiyel akış yönüne göre ifade edilmeleri gerekir. Buna göre asıl akış yönü x , buna dik yön ise z ile gösterilmiştir. Şekil 1'de ψ_{sw} , kama geometrisinin hücum kenarının süpürme açısını, θ ise potansiyel akışın vetere göre açısını ifade etmektedir:

$$\theta = \tan^{-1}(W_{se}^*/U_{ce}^*). \quad (11)$$

Yerel potansiyel akış hızının genliğinin $U_e^* = (U_{ce}^{*2} + W_{se}^{*2})^{1/2}$ olduğu düşünüldüğünde, x ve z yönlerindeki hız bileşenleri Denklem 12 ve 13'teki gibi ifade edilmektedir.

$$U(y) = f'(y) \cos^2 \theta + g(y) \sin^2 \theta \quad (12)$$

$$W(y) = [-f'(y) + g(y)] \cos \theta \sin \theta \quad (13)$$

Dikkat edilirse, $\theta=0^\circ$ olduğunda $U(y) = f'(y)$, $\theta=90^\circ$ olduğunda ise $U(y) = g(y)$ olmaktadır. $\theta=45^\circ$ olduğunda ise f' ve g , $U(y)$ profiline eşit katkıda bulunmaktadır. Denklem 12 ve 13'ten elde edilen profillere örnek olarak, $\theta=45^\circ$ ve $\beta=-0.05, 0$ ve 0.1 değerleri için profiller hesaplanmış ve Şekil 5, 6 ve 7'de sunulmuştur. Bu şekilde $\beta=-0.1$ ve $\theta=45^\circ$ için hesaplanan bileşke hız profili ise Şekil 8'de verilmektedir.

Denklem 12 ve 13'te verilen hız profilleri kararlılık denklemlerinde kullanılmak istenirse, kararlılık denklemlerini boyutsuz hale getirmek için kullanılan karakteristik hız ve uzunluk ölçüleri, Denklem 12 ve 13'te kullanılanlarla aynı olmalıdır. Bu bağlamda hız ölçüsü U_1^* iken, uzunluk ölçüsü Denklem 6'da ifade edilen Falkner-Skan uzunluk ölçüsü birimidir.

Buna göre, Reynolds sayısı ise Denklem 14'e göre ifade edilir:

$$Re = U_1^* L^* / \nu^*. \quad (14)$$

Kararlılık denklemleri, viskoz, sıkıştırılmaz akışa karşılık gelen Navier-Stokes denklemleri temel alınarak türetilir. Denklemlerdeki hız bileşenleri sürekli asıl akış ve süresiz bozulma bileşenlerinden oluşmaktadır. Bozulma bileşenleri Fourier modları cinsinden ifade edildiğinde ve sürekli akış için paralel akış kabulü yapıldığında aşağıdaki denklem seti elde edilir:

$$i(\alpha U + \beta W - \omega)(\alpha \bar{u} + \beta \bar{w}) + (\alpha DU + \beta DW) \bar{v} = -i(\alpha^2 + \beta^2) \bar{p} + \frac{1}{Re} [D^2 - (\alpha^2 + \beta^2)] (\alpha \bar{u} + \beta \bar{w}), \quad (15)$$

$$i(\alpha U + \beta W - \omega) \bar{v} = -D \bar{p} + \frac{1}{Re} [D^2 - (\alpha^2 + \beta^2)] \bar{v}, \quad (16)$$

$$i(\alpha U + \beta W - \omega)(\alpha \bar{w} - \beta \bar{u}) + (\alpha DW - \beta DU) \bar{v} = \frac{1}{Re} [D^2 - (\alpha^2 + \beta^2)] (\alpha \bar{w} - \beta \bar{u}), \quad (17)$$

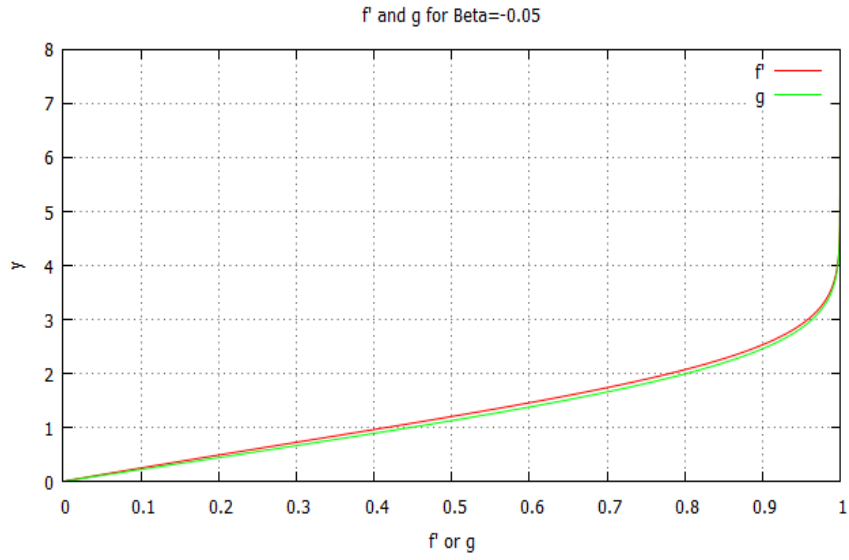
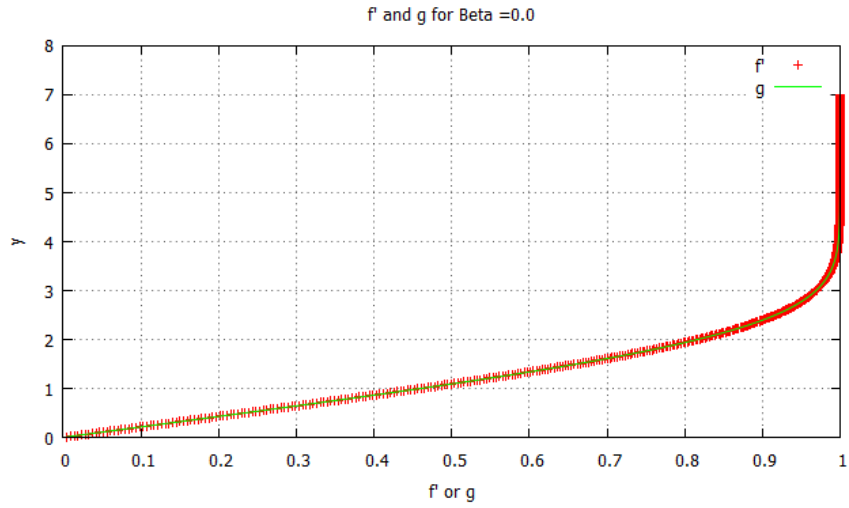
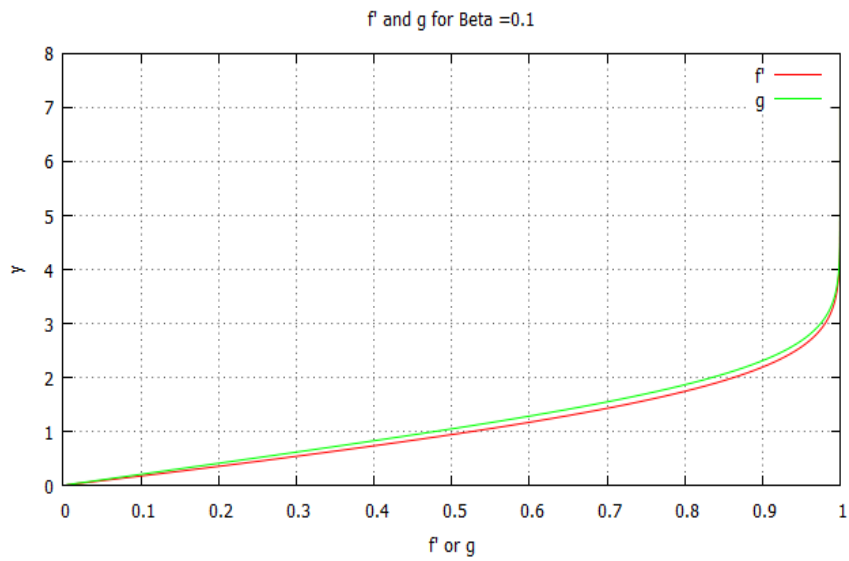
$$i(\alpha \bar{u} + \beta \bar{w}) + D \bar{v} = 0. \quad (18)$$

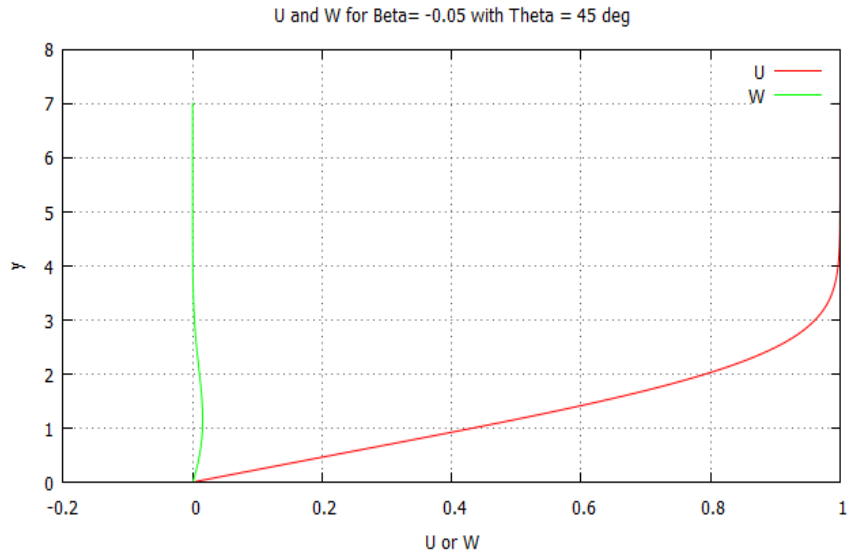
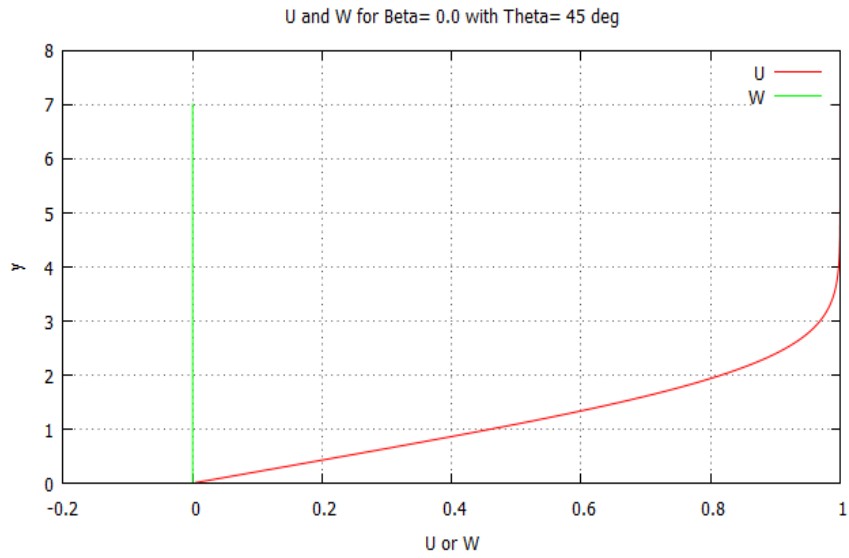
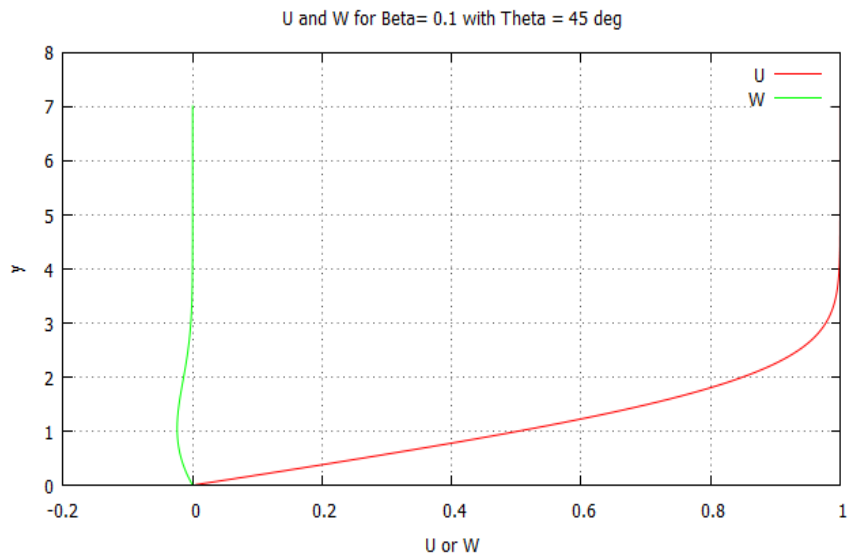
Yukarıdaki denklemlerde α ve β , x ve z yönlerindeki dalga sayılarını, ω ise bozulmanın frekansını ifade etmektedir. Duvara dik yöndeki türevleri ifade etmek için D sembolü kullanılmıştır.

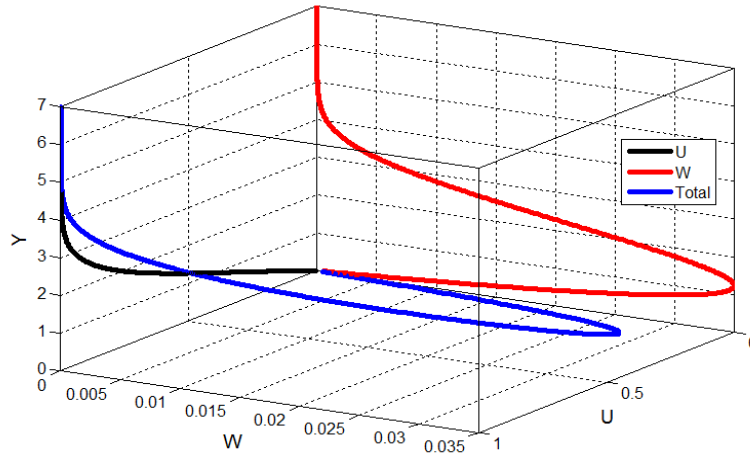
Bu denklemler için sınır şartları ise Denklem 20 ve 21'de verilmiştir.

$$y = 0, \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0, \quad (19)$$

$$y \rightarrow \infty, \bar{u} \rightarrow 0, \bar{v} \rightarrow 0, \bar{w} \rightarrow 0. \quad (20)$$

Şekil 2: $\beta=-0.05$ için hız profilleri.Şekil 3: $\beta=0$ için hız profilleri.Şekil 4: $\beta=0.1$ için hız profilleri.

Şekil 5: $\beta=-0.05$ ve $\theta=45^\circ$ için hız profilleri.Şekil 6: $\beta=0$ ve $\theta=45^\circ$ için hız profilleri.Şekil 7: $\beta=0.1$ ve $\theta=45^\circ$ için hız profilleri.



Şekil 8: $\beta=-0.1$ ve $\theta=45^\circ$ için hesaplanan bileşke hız profili.

Çözüm Yöntemi

Çözüm yönteminin adımları aşağıda kısaca özetlenmiştir [Özgen, 2004]:

- Denklemler 15-18'de verilen denklem seti, dördüncü mertebeye indirgenir ve dört birinci mertebeden adi diferansiyel denklem cinsinden yazılır.
- Bu dört denklem için duvardan uzak serbest akış bölgesinde asimptotik çözümler bulunur.
- Dört denklem serbest akış bölgesindeki asimptotik çözümlerden başlayarak duvara doğru entegre edilir ve duvarda Denklem 19'da verilen kaymazlık şartı sağlanmaya çalışılır.
- Sistem bu haliyle bir Eigenvalue (özdeğer) problemidir ve yukarıda özetlenen çözüm yönteminde Denklem 19'da verilen duvar sınır şartları problemin özdeğerleri olan α , β , Re ve ω belli kombinasyonları için sağlanmaktadır. Bu kombinasyonların belirlenmesi için simpleks yöntemine dayalı bir fonksiyon minimizasyon yöntemi ve iki değişkenli Newton iterasyon yöntemi uygulanmıştır.

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, yukarıda özetlenen yaklaşımla elde edilen sonuçlar üç farklı Falkner-Skan parametresine karşılık gelen akış durumları için sunulmaktadır. Burada Squire teoreminin geçerli olduğu düşünülerek dalga açısının sıfır olduğu kabul edilmiştir, $\psi=0$ ve $W(y) = 0$.

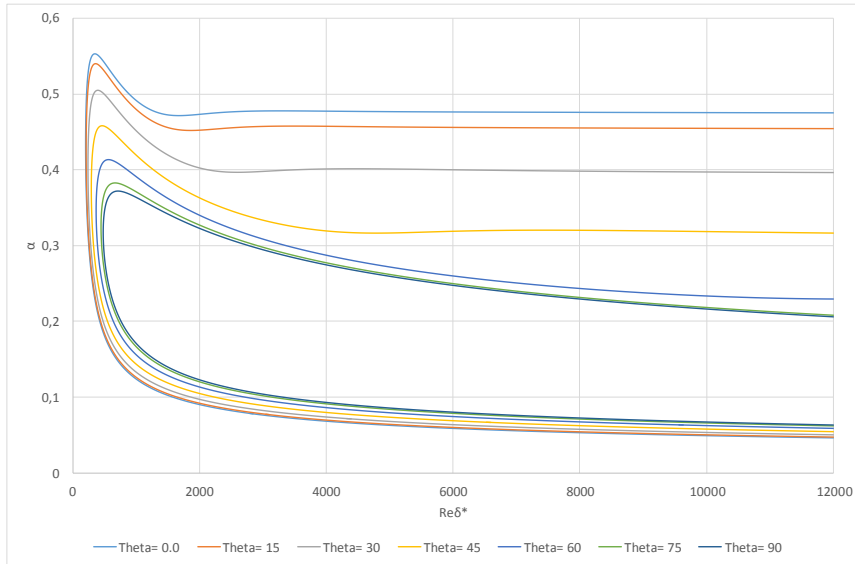
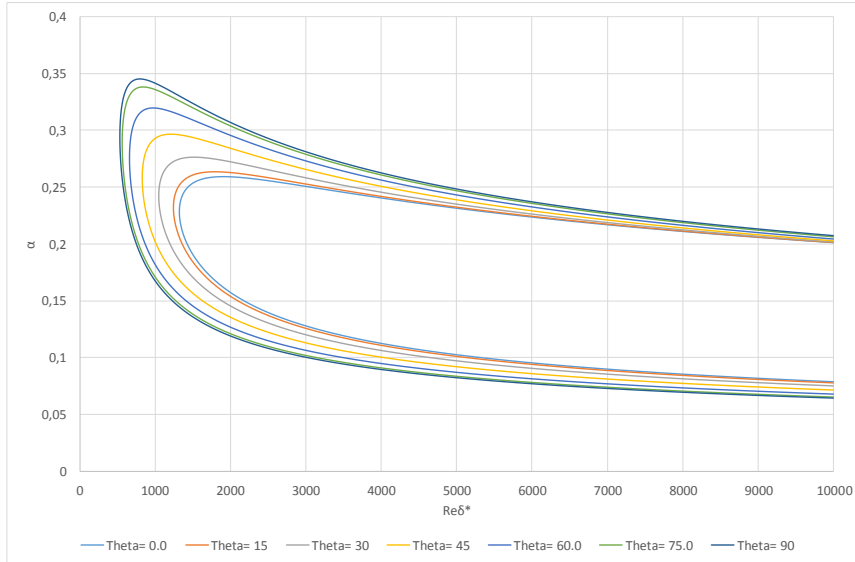
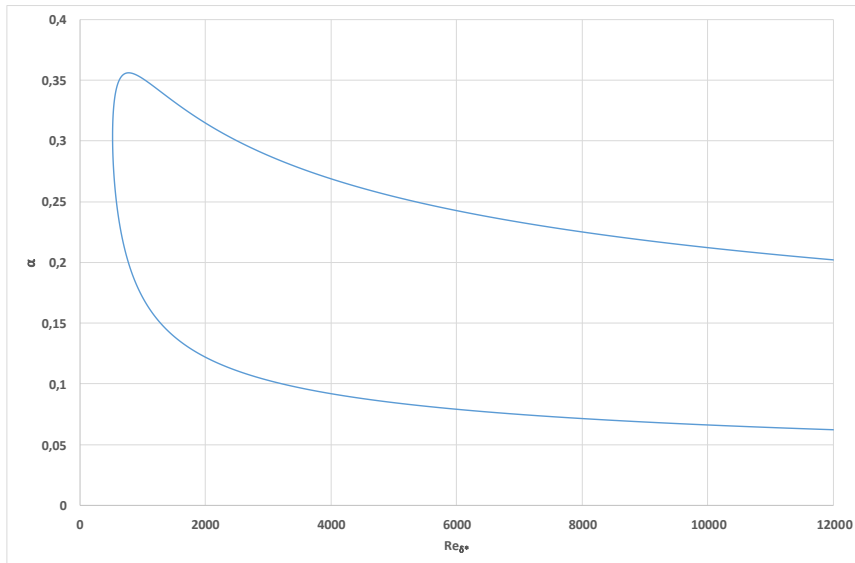
Şekil 9, $\beta=-0.1$ (yavaşlayan akış) için akış açısının nötr kararlılık eğrilerine olan etkisi gösterilmiştir. Akış açısı arttıkça kritik Reynolds sayısının arttığı, nötr kararlılık eğrisinin biçiminin viskoz olmayan akış özelliklerinden uzaklaşıp, viskoz akışa ait nötr kararlılık eğrilerine yakınsadığı görülmektedir. Özet olarak, akış açısının artması akışı daha kararlı hale getirmektedir.

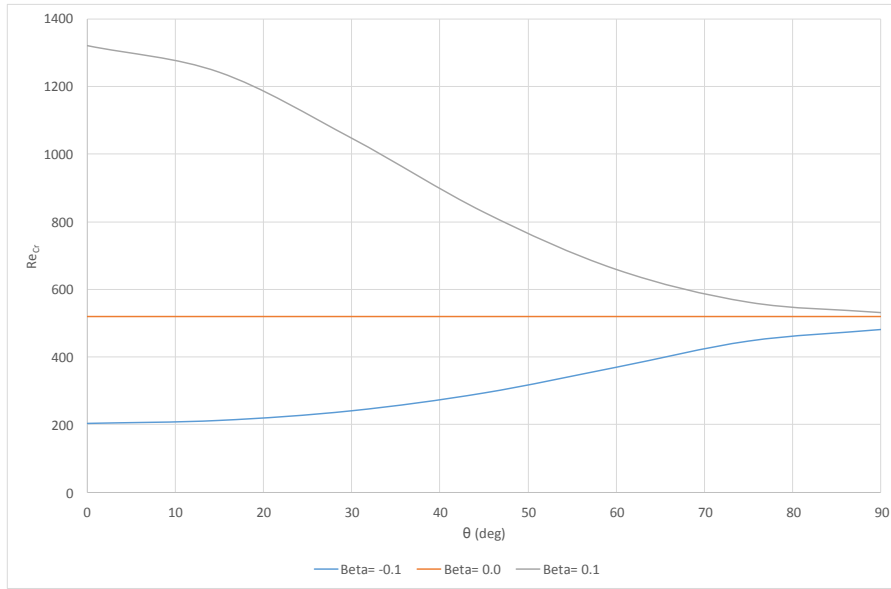
Şekil 10'da bu defa $\beta=0.1$ (hızlanan akış) için akış açısının nötr kararlılık eğrilerine olan etkisi gösterilmektedir. Eğriler genel olarak viskoz akış özellikleri göstermektedir ancak akış açısı arttıkça kritik Reynolds sayısı azalmaktadır. Dolayısıyla, akış açısının artması akışı daha kararsız hale getirmektedir.

Şekil 11'de ise $\beta=0$ (düz plaka akışı) için akış açısının nötr kararlılık eğrilerine etkisinin olmadığı görülmektedir, yani akış açısı kaç olursa olsun aynı nötr kararlılık eğrisi elde edilmektedir. Bunun nedeni Denklem 3, 7 ve 12 incelendiğinde anlaşılabilir. $\beta=0$ için Denklem 3 ve 7 aynı profili vermektedir, yani $f'(y)=g(y)$. Denklem 12'de $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ olduğu için $f'(y) = g(y) = U(y)$ sonucuna ulaşılmaktadır.

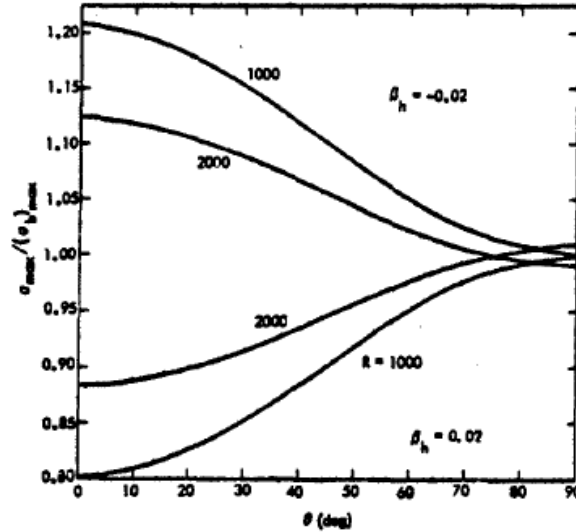
Son olarak Şekil 9, 10 ve 11'de sunulan sonuçların özeti niteliğinde olan ve farklı β değerleri için akış açısının kritik Reynolds sayısına etkisini gösteren eğriler Şekil 12'de sunulmuştur.

Bu sonuçlardan yapılacak en önemli çıkarım akış açısının yani üç boyutlu akış etkilerinin basınç gradyanı etkisini azalttığıdır. Bir diğer deyişle yavaşlayan akışlar akış açısı arttıkça (üç boyutlu akış etkileri arttıkça) daha kararlı hale gelmekte, hızlanan akışlar ise daha kararsız hale gelmektedir. Bu çıkarımlar literatürde benzer akışlar için verilen sonuçlarla nitelik olarak uyumludur.

Şekil 9: $\beta=-0.1$ için nötr kararlılık eğrileri.Şekil 10: $\beta=0.1$ için nötr kararlılık eğrileri.Şekil 11: $\beta=0$ için nötr kararlılık eğrisi.



Şekil 12: Akış açısının kritik Reynolds sayısına etkisi.



Şekil 13: Akış açısının maksimum genişleme katsayısına etkisi [Mack, 1984]

Bu çıkarımı desteklemek için Şekil 13'te görülen sayısal analiz sonuçlarına bakmak yerinde olacaktır. Bu şekilde iki farklı Falkner-Skan parametresi için iki farklı Reynolds sayısında elde edilen genişleme katsayılarının akış açısına göre değişimi görülmektedir. Şekilden görülebileceği gibi $\beta = -0.02$ için akış açısı arttıkça akış daha kararlı hale, $\beta = 0.02$ için ise akış açısı arttıkça akış daha kararsız hale gelmektedir. Bu davranışlar Şekil 12'de görülen davranışlar ile benzerlik göstermektedir.

Şekil 12 biraz daha dikkatli incelenecek olursa yukarıda açıklanan ek bazı faydalı çıkarımlarda bulunulabilir. Örneğin $\theta = 0^\circ$ için kritik Reynolds sayısı değerleri iki boyutlu akış için aynı Falkner-Skan değerlerine karşılık gelen kritik Reynolds sayılarına eşittir. Bu aslında beklenen bir durumdur çünkü Denklem 12 ve 13'e göre $\theta = 0^\circ$ olduğunda $U(y) = f'(y)$ ve $W(y) = 0$ olmaktadır.

Öte yandan $\theta = 90^\circ$ için kritik Reynolds sayısı değerleri hem $\beta = -0.1$, hem de $\beta = 0.1$ için Blasius akışının ($\beta = 0$) kritik Reynolds sayısı değeri olan 520'ye çok yakındır. Bu çıkarım da Denklem 12 ve 13'ün incelenmesiyle anlaşılabilir. Buna göre $\theta = 90^\circ$ olduğunda $U(y) = g(y)$ ve $W(y) = 0$ olmaktadır. Yukarıda bulunduğu ve açıklandığı gibi $g(y)$ profili Blasius profiline çok yakın bir profildir, dolayısıyla bu profilin kritik Reynolds sayısı değerinin Blasius profilininkine yakın olması beklenen bir durumdur.

Kaynaklar

Mack, L.M., 1984. *Boundary-Layer Linear Stability Theory*, AGARD Report No. 709 – Special Course on Stability and Transition of Laminar Flow.

Nachtsheim, P.G., Swigert, P., 1965. Satisfaction of the asymptotic boundary conditions in numerical solution of the system of non-linear equations of boundary-layer type, NASA TND-3004.

Özgen, S., 2004. Effect of heat transfer on stability and transition characteristics of boundary layers, *Heat and Mass Transfer* 47, 4697-4712.