

KÜÇÜK UYDULARDA İKİLİ VE ÜÇLÜ VEKTÖR GÖZLEMLERİ İLE YÖNELİMİN BELİRLENMESİ

Demet Çilden¹ ve Cengiz Hacızade²
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ÖZET

Bu çalışmada, küçük uydunun yöneliminin belirlenmesinde uygulanacak yöntemlerin geliştirilmesi amacıyla, kullanılması gereken yönelim temsilleri ve koordinat sistemleri saptanmıştır. Belirlenen metotlar farklı algılayıcı konfigürasyonları üzerinde ayrı ayrı uygulanmış ve elde edilen veriler karşılaştırılarak optimum sonuca varmak amaçlanmıştır. Uygulanacak yöntemler (SVD, q, QUEST); özyineli (recursive) metotlarının yanında, uzun süreli yakınsayamama veya anlık yönelim bilgisi ihtiyacı durumunda kullanılmak üzere seçilmiştir. Tüm yöntemler Wahba'nın tanımladığı kayıp fonksiyonunu minimuma indirmeyi amaçlamaktadır ve bunu tekillik sorunundan kaçınmak amacıyla -seçenek olduğu durumlar için- kuaterniyon kullanarak yapmaktadır. Küçük uydularda sıkça kullanılan manyetometre, güneş algılayıcı, ufuk algılayıcı seçilmiş ve konfigürasyon olabilecek tüm durumlar göz önüne alınarak, hız ve dayanıklılık açısından karşılaştırılmıştır. Bulunan tüm sonuçlar için yöntemler arasında geçiş anları belirlenebilmektedir. Sonuçlar karşılaştırıldığında ise, kuaterniyon kullanılan SVD Yöntemi en dayanıklı sonucu vererek, kabul edilebilir bir kestirim yapmıştır.

GİRİŞ

Küçük uydular günümüzde birçok alanda araştırma ve gözlem yapmak amaçlı uzaya gönderilmektedir. Her bir alt sistemi uzayda test etme ve minyatür tarzda geliştirilen altsistemlerin optimum şekilde cevap verme şansını artıran bu uyduların yönelimini belirlemede birçok yöntem kullanılmaktadır. Küçük uyduların öncülüğünü yapan, kütle ve boyutları küçük ve ucuz olan küp uyduların; 1999 yılında Kaliforniya Politeknik Devlet Üniversitesi ve Standford Üniversitesi tarafından duyurulmasıyla [CalPolySLO] uzay görevlerine üniversitelerin de katılımı artmıştır.

Uydunun faydalı yüküne de bağlı olarak, ileri düzeyde yönelim kontrolüne ihtiyaç duyulabilir. Birçok alt sistemden oluşabilen küçük uyduların Yönelim Belirleme ve Kontrol Altsistemi (YBKS) bu ihtiyacı karşılamak için sensörler ve modellerin de yardımıyla otonom olarak uyduyu istenen yöne doğrultabilir, bu da görev başarı oranını artırıcı bir fayda daha sağlar.

Dünya'nın manyetik alanı, Güneş ve Nadir gibi çok fazla kullanılan parametrelerin yönünü veren birim vektörlerin belli referans sistemleri içerisinde ifade edilmesiyle yönelim belirlenir. Bu çalışmada, anlık metotlar kullanılarak, vektör sayısının artışının yönelimdeki doğruluğa etkisi karşılaştırılmış ve tartışılmıştır. Bunu yaparken, tekillik sorunu ile karşılaşmamak adına kuaterniyonların kullanılmasına karar verilmiş; ilgili dönüşümler ise bu hesapların ardından yapılmıştır. Çalışmanın önemli kısımları ayrı başlıklar altında toplanarak sıralanmıştır. Referans

¹ Yüksek Lisans Öğrencisi, Disiplinlerarası Uçak ve Uzay Müh. Böl. E-posta: cilden@itu.edu.tr

² Prof. Dr., Uçak Müh. Böl., E-posta: cingiz@itu.edu.tr

sistemleri ile kuaterniyonlar başta olmak üzere Wahba problemi, kullanılan anlık yöntemler ile hata analizi ve sonuç kısımları genel iskeleti oluşturmaktadır.

REFERANS SİSTEMLERİ

Katı cisim rotasyonu, üç boyutlu sağ el Kartezyen koordinat sisteminde -üç tane eş ve dik birim vektör- tanımlanabilir. Dünya merkezini orijin kabul eden ve Newton kurallarının geçerli olduğu Eylemsiz Dünya Merkezli Referans Sisteminde (ECI) jeografik kuzey kutbu z-eksenini, bahar gündönümü ile ekvator düzleminin kesiştiği noktaya doğru olan vektör x-eksenini ve sağ el kuralına göre tamamlanan vektör ise y-eksenini gösterir. Bu sistem katı cisimlerin hareket denklemlerinin tanımlanması için en uygundur.

YBKS donanımının oryantasyonu; Gövde Referans Sisteminde tanımlandığından, Yörünge ile arasındaki fark, uydunun yönelimini verir. Yörünge Koordinat Sisteminde, x-ekseni yer değiştirme yönünü (yarıçap vektörüne dik) ve z-ekseni de Dünya'nın merkezini hedef alır. Yönelimi (yuvarlanma, yunuslama ve sapma açıları) 'sıfır' derece olan bir uydu Yörünge Sisteminde doğrudan ifade edilebilir. Bu iki referans sistemi arasındaki dönüşüm bir A matrisi ile yapılırsa, bu matrisin ortogonal olmasının yanında transpozunun kendisiyle çarpımının sonucu 'birim matris', A matrisinin determinantı ise 'bir' vermelidir. A matrisi toplamda dokuz olmak üzere üç tanesi serbestlik derecesi ve altı tanesi de koşul olan parametrelerden oluşur.

Kuaterniyonlar, fiziksel bir anlam ifade etmese de içeriğinde trigonometrik fonksiyon barındırmadıklarından ve az parametreye sahip olduklarından tercih edilirler. Bir noktadan başlayan genel yer değiştirmeyi bu nokta üstündeki bir eksenin rotasyonu olarak tanımlayan Euler teoremi kuaterniyonun temel anlamını kazandırmıştır. Böylece, üç eleman dönme eksenini, kalan skaler eleman ise dönme eksenini etrafındaki dönüş açısını ifade eder. Kuaterniyonlar, a,b,c ve d ile aşağıdaki gibi temsil edilebilir. i, j, k Hamilton'ın hiper imajinari rakamlarını belirtir. Yani, kuaterniyon üç hiper imajineri, bir reel sayıdan oluşan bir karmaşık sayıyı ifade eder [Hanson, 2006].

$$q = ia + jb + kc + d$$

1

WAHBA PROBLEMİ VE KAYIP FONKSİYONU

Yönelim belirleme gözlemlerindeki birim vektörler (Dünya'nın Manyetik Alanı, Güneş'e Yönelme, Nadir Vektörü); sensörler ve modellerden bulunan değerlere göre oluşturulur. Bu çalışmada güneş sensörü, manyetometre ve ufuk sensörü gibi yönelim belirlemeye yarayan sensörler kullanılmıştır. Referans Sistemleri konusu içerisinde de yer alan A dönüşüm matrisi yardımıyla hata ve gürültüler de göz önüne alınarak elde edilen sonuçlar, belli metotlar ile harmanlanarak kuaterniyonlar elde edilir, ardından da Euler açılarına geçiş yapılabilir. Bu metotların çıkış noktası olan Wahba problemi ise bir kayıp fonksiyonu (L) tanımlar.

$$L(A) = \frac{1}{2} \sum_i a_i |b_i - Ar_i|^2$$

2

b_i : Gövde eksen takımındaki birim vektörler

r_i : Yörünge eksen takımındaki birim vektörler

a_i : Negatif olmayan yük (varyansın tersi: σ_i^{-2})

$$\lambda_0 \equiv \sum a_i$$

$$B \equiv \sum a_i b_i r_i^T$$

3

$$L(A) = \lambda_0 - tr(AB^T)$$

4

Buradan (AB^T) matrisinin diagonaleri toplamı(trace fonksiyonu)'nın en büyük değerinin, hata fonksiyonunu minimize edeceği açıkça görülebilmektedir. Bu hatayı minimize etmek için ise SVD, q metodu, QUEST, FOAM ve ESOQ gibi yöntemler kullanılmaktadır. İki vektörlü algoritmada en dayanıklı sonucu SVD ve q metodu, en hızlı sonucu ise FOAM vermiştir [Markley, 1988].

SVD (Tekil Değer Ayrışımı) Yöntemi

Denklemlerde geçen B matrisi tekil değer ayrışması ile iki ortogonal matris (U, V) cinsinden ifade edilebilir. Buradaki tekil değerler ise $\sum 11 \geq \sum 22 \geq \sum 33 \geq 0$ olarak sıralanırsa; B matrisi, diyagonal dışında tüm değerleri sıfır olan kare matris (diag fonksiyonu) yardımıyla yazılabilir [Markley&Mortari, 2000]:

$$B = U \sum V^T = U \text{diag} \left[\sum 11 \sum 22 \sum 33 \right] V^T \quad 5$$

Sonuçta optimum yönelim (A) transformasyon matrisi aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$A_{opt} = U \text{diag} \left[1 \quad 1 \quad \det(U) \det(V) \right] V^T \quad 6$$

İkincil tekil değerlerin ($s_1 \ s_2 \ s_3$) tanımlanmasıyla, açılı hataları vektörünün kovaryansı (P) anlık olarak aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$s_1 = \sum 11 \quad 7$$

$$s_2 = \sum 22 \quad 8$$

$$s_3 = \det(U) \det(V) \sum 33 \quad 9$$

$$P = U \text{diag} \left[(s_2 + s_3)^{-1} \quad (s_3 + s_1)^{-1} \quad (s_1 + s_2)^{-1} \right] U^T \quad 10$$

Yönelimin gözlemlenemediği durumlarda P sonsuza gider. İki vektörlü algoritmada güneş sensörünün kullanıldığı durumda; Güneş'in görünmediği zaman aralıklarında veya vektörlerin birbirine paralel olduğu durumlarda da bu hata sonsuza gidecektir.

q Yöntemi

Yönelim matrisi kuaterniyonlar cinsinden parametrize edilebilir. Davenport, birim kuaterniyonları kullanarak, uydu yönelimini bulmak için aşağıdaki çözümü önermiştir [Markley, 1988, Shuster, 1993]:

$$q = \begin{bmatrix} q \\ q_4 \end{bmatrix} \quad 11$$

$$\text{tr}(AB^T) = q^T K q \quad 12$$

$$K \equiv \begin{bmatrix} S - \text{Itr}(B) & z \\ z^T & \text{tr}(B) \end{bmatrix} \quad 13$$

$$S \equiv B + B^T \quad 14$$

$$z \equiv \begin{Bmatrix} B_{23} - B_{32} \\ B_{31} - B_{13} \\ B_{12} - B_{21} \end{Bmatrix} = \sum_i a_i b_i \times r_i \quad 15$$

$$Kq_{opt} \equiv \lambda_{\text{maksimum}} q_{opt} \quad 16$$

Wahba'nın kayıp fonksiyonunu minimum yapmak için 12 numaralı denklemden yola çıkarak bir K matrisi tanımlanmaktadır. Buna göre, temelde B matrisinin kullanımıyla elde edilen değişkenler 16 numaralı denkleme girerek maksimum özdeğere karşılık gelen özvektörün bulunmasına olanak sağlamaktadır. Maksimum özvektör ise denklemden görüldüğü üzere optimum kuaterniyonun kendisidir. Fakat sonuçların daha net anlaşılması için 'Vektör Gözlemleri' başlığı altındaki tüm sonuçlar Euler açılarına çevrilerek gösterilmiş, en dayanıklı yöntem de buna göre seçilmiştir.

Maksimum özdeğer bulunurken çakışma gibi bir durum olursa Markley ve Mortari'ye göre q yönteminin hatası gibi düşünülmemelidir [Markley&Mortari, 2000]. Burada kullanılan veriler yönelim bulmaya uygun değildir sonucu çıkarılabilir. Grafiklerde görülen sıçramalar da bahsedilen durum kaynaklı vektörlerin paralel veya gözlemlenemez olması yüzünden ortaya çıkmaktadır.

QUEST (Kuaterniyon Kestirici) Yöntemi

q yönteminin daha hızlı hesap yapabilmesi için bazı kabuller yapılarak bilgisayarın iş yükü azalabilmektedir. Bunun yanında Newton Raphson nümerik çözümü de kullanan QUEST yöntemi de uydu görevlerinde özellikle geçmiş yıllar için sıklıkla kullanılmıştır [Bar-Itzhack, 1996, Chaudhuri&Karandikar, 1996]. Bilgisayar teknolojisinin ilerlemesi, seçilecek yöntemin puanlaması yapılırken hız kısmını arka plana itmektedir ve dayanıklılık ilkesini ön plana çıkarmaktadır. Denklem (17) ile tanımlanan Gibbs Vektörü (\underline{g}) kuaterniyonun vektörel kısımlarının skaler kısma bölünmesiyle aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\underline{g} = \begin{pmatrix} g1 \\ g2 \\ g3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1/q_4 \\ q_2/q_4 \\ q_3/q_4 \end{pmatrix} \quad 17$$

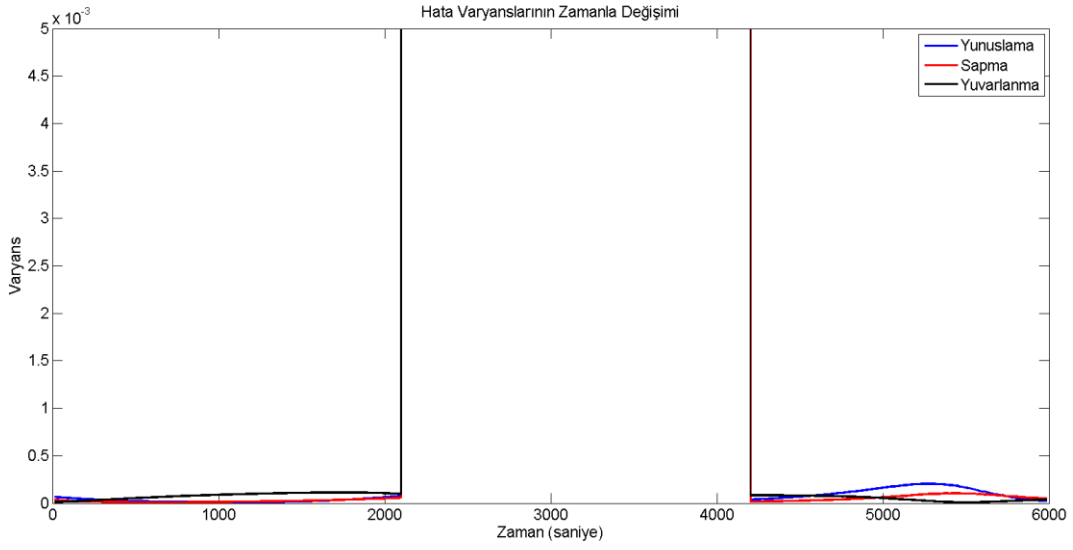
$$(S - \sigma I)\underline{q} + zq_4 = \lambda_{\text{maksimum}} \underline{q} \quad 18$$

$$(S - \sigma I - I)\underline{g} + z = 0 \quad 19$$

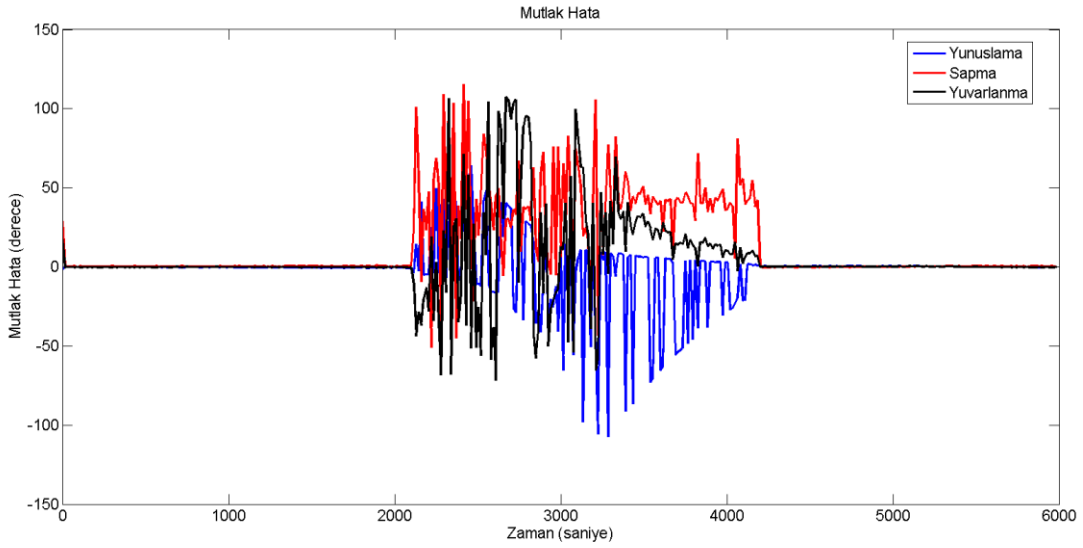
Diğer parametreler q yöntemiyle aynı olmakla birlikte $\lambda_{\text{maksimum}}$ değeri '1' olarak atanır ve 19 numaralı denklemin, kuaterniyonların kareleri toplamının '1' olması ilkesiyle birleşimi sonucu kuaterniyonlar bulunabilmektedir. Fakat paydadaki değişken, açının $\pm 180^\circ$ olduğu durumlar için sonuçları ani sıçramalar şeklinde etkilemektedir [Wertz, 1994]. Bu sıçramalar, hem kovaryans hem de mutlak hata grafiklerinde açıkça görülmektedir. Şekil 6'da üç vektörün kullanıldığı mutlak hata grafiği QUEST yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçları vermektedir.

VEKTÖR GÖZLEMLERİ

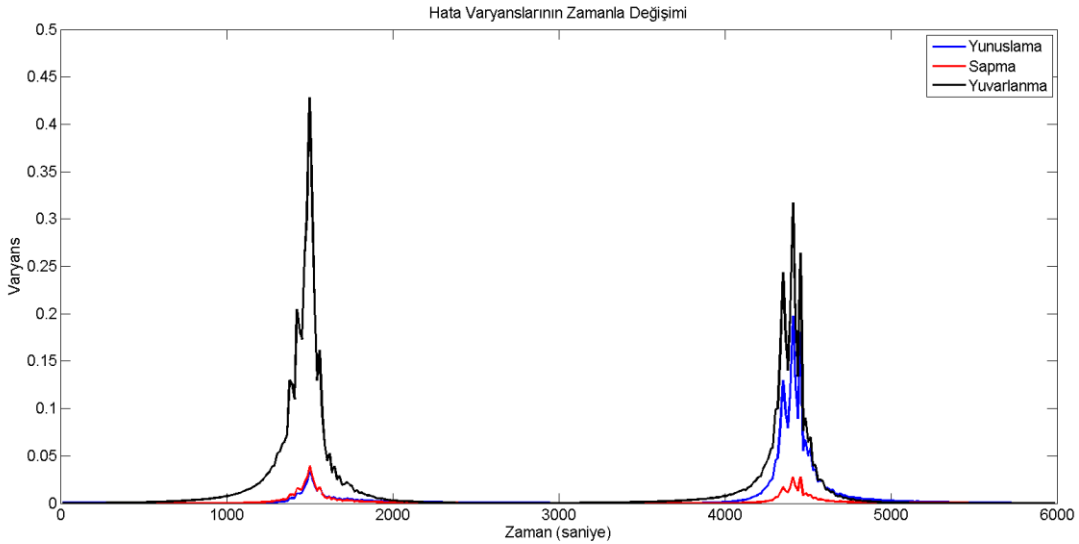
Grafikler, yöntemlerin simülasyon sonuçlarını yaklaşık bir yörünge periyodu süresince göstermektedir. Şekil 1-4 SVD yöntemi sonuçlarını kapsamaktadır. İlk grafikte, Güneş'in görülmediği zaman aralıklarında (2100 – 4200 saniye aralığı), beklenildiği gibi iki vektörlü algoritma doğru sonuç veremez, çünkü bu aralıkta yönelimin gözlemlenemez olması için, güneş vektörü (0,0,0)'a ayarlanmıştır. Sonsuza giden değerler, diğerlerinin gözlemlenebilmesi için belli mertebeden sonra kesilmiştir.



Şekil 1 : Manyetometre ve Güneş Sensörü Ölçümlerinden Elde Edilen Anlık Varyans (SVD) Simülasyon ortamında tanımlanan dinamik denklemler kullanılarak elde edilen Euler açıları ile SVD yöntemi sonuçları karşılaştırılarak mutlak hata bulunmuştur.



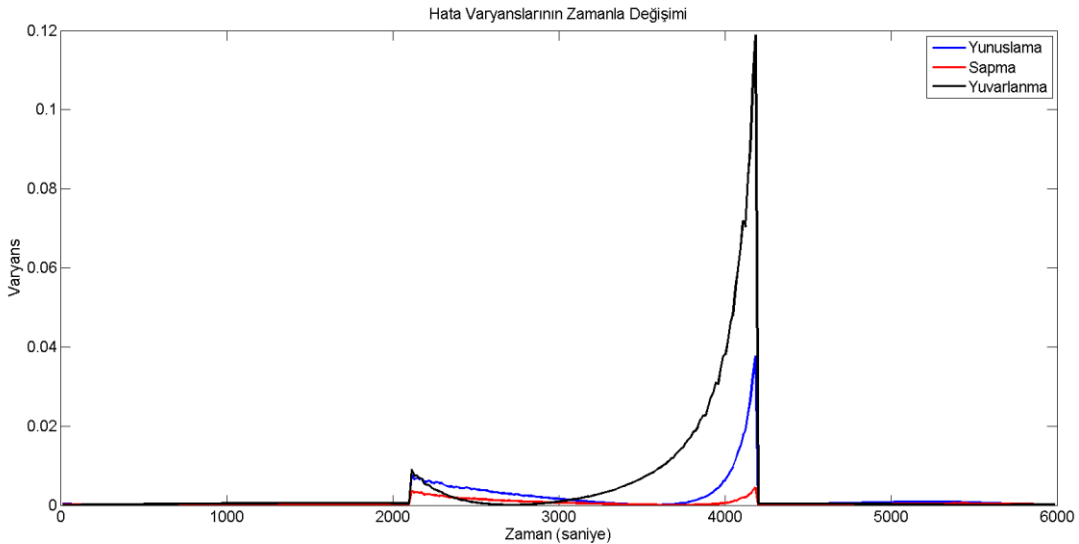
Şekil 2 : Manyetometre ve Güneş Sensörü Ölçümleri Sonucu Elde Edilen Mutlak Hata (SVD) Yapılan gözlemlerde iki vektörün paralel olması durumunda ortaya çıkan hata da ortaya konmuştur.



Şekil 3 : Manyetometre ve Ufuk Sensörü Ölçümlerinden Elde Edilen Anlık Varyans (SVD)

Varyans grafiğinden de tahmin edileceği gibi bu iki sensörün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata, iki farklı anda ani atlamalar yaşamış, Güneş'in konumu hataya etki etmemiştir.

Diğer kıyaslama ise Güneş ve Ufuk Sensörü ile yapılmış, Şekil 1 'dekine benzer sonuçlar alınmıştır. Sensör hatalarına bağlı olarak bu sonuçlar değişiklik gösterebileceği gibi yörünge parametreleri de etki gösterebilir. SVD ve q metodunun doğası gereği sonuçların, vektör sayısı arttıkça düzelmesi beklenmektedir. Şekil 4 ise bu beklentiyi net bir şekilde karşılamıştır. Şekil 1-4 sonuçları SVD yönteminden elde edilmiştir. Konfigürasyonlar karşılaştırıldığında üç vektörlü gözleme dayalı hatalar minimum olduğundan, Şekil 4-6 grafiklerinde sırasıyla SVD, q ve QUEST yöntemlerinin üç vektörlü algoritma üzerine uygulanmış sonuçları gözlemlenebilir.

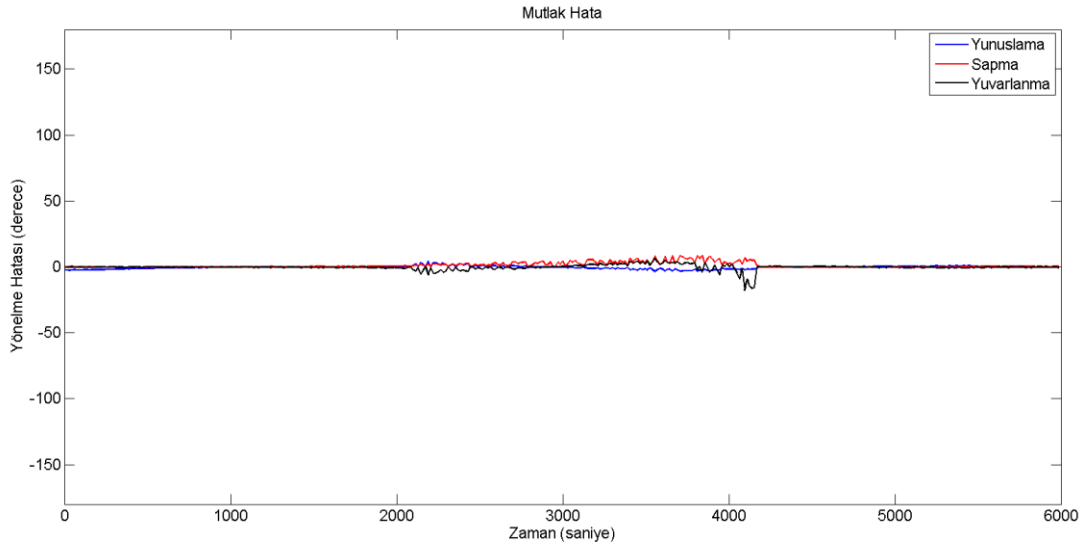


Şekil 4 : Üç Vektörlü Algoritma ile Elde Edilen Anlık Varyans (SVD)

Hata kovaryans matrisinin merteye ve mutlak hata ile orantılı şekilde değişimi, bu matrisin gerçek açılar elimizde var olmadığı (mutlak hatanın bulunamayacağı) durumda yol göstermesi açısından önem arz etmektedir.

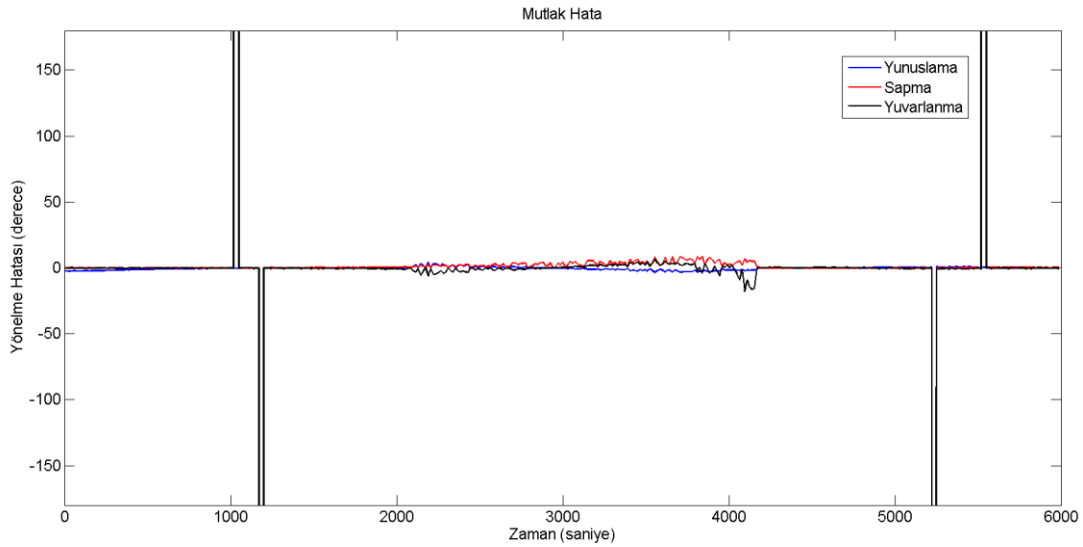
Şekil 5, daha önce de bahsedildiği gibi q yönteminin tüm vektörler kullanılarak elde edilmiş sonucunu göstermektedir. Mutlak hata grafiği simülasyonda tanımlanan dinamik denklemlerden elde edilen açılar ile yöntem sonuçlarının farkını ifade eder. Yöntem sonuçları birbirleriyle çok

yakın cevaplar vermektedir, bununla ilgili Tablo 1 incelenirse, SVD yönteminin diğerlerine göre daha dayanıklı olduğu söylenebilir.



Şekil 5 : Üç Vektörlü Algoritma ile Elde Edilen Mutlak Hata (q)

Şekil 5'te, Şekil 4'ten farklı olarak kovaryans matrisi sonuçları yerine tanımlanmış açılarla, bulunan sonuçlar arasındaki farkı gösteren mutlak hata grafiği görülmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken bir diğer konu da SVD yönteminin q ve QUEST'ten farklı olarak yönelim temsilini her cinsten yapabilmesidir. Böylece doğrudan Euler açıları cinsinden sonuç alınabilmektedir. Bazı çalışmalar bu özelliği nedeniyle SVD metodunun tercih edilebileceğini söylemektedir [Vinther, Jensen, Larsen&Wisniewski, 2011].



Şekil 6 : Üç Vektörlü Algoritma ile Elde Edilen Mutlak Hata (QUEST)

QUEST ve q metodu sıçramalar dışında neredeyse aynı trendde sonuç elde etmişlerdir. Tabloda bu sıçramalar göz ardı edilerek hatalar hesaplanmıştır. Tüm metotlar için üç vektörlü konfigürasyon seçilerek kendi aralarında karşılaştırılmıştır.

Tablo 1 : Yöntemlerin Karşılaştırılması

Üç Sensörlü Konfigürasyon	Ortalama Mutlak Hata (derece)
SVD (Kuaterniyon)	1.36
q	1.41
QUEST	1.62

Tablo 1'in elde edilmesiyle en dayanıklı yönteme karar verilmiştir. Euler açıları yönelim temsili amacıyla kullanıldıklarında trigonometrik fonksiyonlar içerdiklerinden hem hesaplama iş yükü artmakta, hem de belli değerler için tekillik sorunu oluşabilmektedir. Bu nedenle SVD metodu gibi yönelimin temsili için seçim yapılabilen yöntemler için kuaterniyonları kullanmanın birçok avantajı vardır [Shuster, 1993]. Kuaterniyonla hesaplanan sonuç tabloda görülmektedir.

SONUÇ

Bu çalışmada iki ve üç vektörlü algoritmada farklı yöntemlerle bulunan sonuçlar karşılaştırılmış ve referans sensör olarak, küçük uydularda sıkça kullanılanlar seçilmiştir (Güneş Algılayıcı, Manyetometre ve Ufuk Algılayıcı). Tekillik sorunu kuaterniyonların kullanımıyla ortadan kaldırılmıştır. Sonuçlar birbirleri ile karşılaştırıldığında, varyansın anlık olarak mutlak hata ile orantılı bir şekilde sonuç vermesi ile gözlemlenen vektör sayısındaki artışın hata oranını önemli ölçüde azalttığı görülmüştür. SVD yöntemi sonuçlarına göre, iki vektörlü algoritma kullanıldığı durumda bile, yapılan hata analizi sayesinde anlık olarak, Kalman Süzgeci gibi özyineli metotlara geçiş sağlanabilmektedir, bu şekilde yöntemler arası geçişler kullanılarak daha doğru sonuçlar elde edilebilmektedir.

Teknolojinin ilerlemesiyle, kullanılan yöntemlerin hızları arasındaki fark küçülmüş, böylece daha doğru sonuç veren yöntemi seçmek de daha cazip bir hal almıştır. Sensör seçimini değiştirmek ile sonucun hassasiyetini değiştirmek mümkün olacağından, örneğin Yıldız Algılayıcıları gibi daha hassas sensörler kullanıldığında üç vektörlü algoritmanın da daha hassas sonuç vermesi beklenir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, TÜBİTAK 113E595 nolu "Küçük Enformasyon Uydularının Tümleştirilmiş Yönelme Belirleme Sistemleri, Yörüngede Sensör Kalibrasyonu, Uzun Süreli Güdüm ve Arıza Toleranslı Yönelme Kontrolü için Yöntemler ve Algoritmalar Geliştirilmesi" projesi kapsamında desteklenmiştir.

Kaynaklar

- Bar-Itzhack. 1996, *REQUEST - A Recursive QUEST Algorithm for Sequential Attitude Determination* Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 0731-5090 Cilt: 19, Sayı: 5, s. 1034-1038.
- CalPolySLO. CubeSat Design Specification.
- Chaudhuri ve Karandikar. 1996, *Recursive methods for the estimation of rotation quaternions* IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 0018-9251, Cilt: 32, Sayı: 2, s. 845-854.
- Hanson. 2006, *Visualizing Quaternions*.
- Markley. 1988, *Attitude Determination Using Vector Observations and Singular Value Decomposition* Journal of the Astronautical Sciences, Cilt: 36, Sayı: 3, s. 245-258.

- Markley ve Mortari. 2000, *Quaternion attitude estimation using vector observations* Journal of the Astronautical Sciences, 0021-9142, Cilt: 48, Sayı: 2-3, s. 359-380.
- Shuster. 1993, *A Survey of Attitude Representations* The Journal of the Astronautical Sciences, Cilt: 41, Sayı: 4.
- Vinther, Jensen, Larsen ve Wisniewski. 2011, *Inexpensive Cubesat Attitude Estimation Using Quaternions And Unscented Kalman Filtering* Automatic Control in Aerospace, Cilt: 4.
- Wertz. 1994, *Spacecraft Attitude Determination and Control*, s. 510-524.