

UÇAK AERODİNAMİK TÜREVLERİNİN ALTI SERBESTLİK DERECELİ UÇUŞ BENZETİM ORTAMINDA EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ İLE KANTİTATİF ANALİZİ

Furkan Altınışik^{1,2*}Zafer ÖZNALBANT^{1,3†}Hayri Acar^{2‡}¹Türk Havacılık ve Uzay Sanayii, Kahramankazan, Ankara²Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Sarıyer, İstanbul³Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Odunpazarı, Eskişehir

ÖZET

En küçük kareler yönteminin (EKKY) iki farklı yaklaşımı kullanılarak aerodinamik türev ve katsayı kestiriminin yapıldığı bu çalışmada, gerçek dünyadaki uçuş verisini temsil edecek uçuş benzetim modeli kurulmuştur. Model için gerekli veritabanı Marchetti S211 uçağının bilgileri kullanılarak oluşturulmuştur. Uçuş koşullarını gerçeğe yakınlıktır. Uçuş benzetim modeline atmosferik türbülans ve sistematik sensör hataları eklenmiştir. Altı serbestlik derecesine sahip uçuş benzetim modelinin matematiksel altyapısı Newton mekaniği temelli kurulmuş olup aerodinamik ve motor blokları lineer modellenmiştir. Ayrıca Newton-Raphson algoritması kullanılarak kanat seviyesi kararlı hal trim altyapısı oluşturulmuştur. Böylelikle uçak belirlenen trim koşulunda başlar, kontrol yüzeylerini hareket ettirir ve uçuş verisini temsil edecek çıktılar alınır. Sonraki adımda çalışmada kullanılan sıradan ve yinelenen EKKY parametre kestirim performansları kusursuz ölçümlerin yapıldığı durumlarda incelenmiştir. Bunun yanında uçuş benzetim modeline hava türbülansı ve sensör hataları verilerek sonuçlar karşılaştırılmıştır.

GİRİŞ

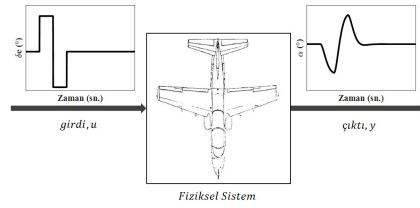
Gerçek dünyada belirli bir fiziksel sistemden alınan ölçümler ideal değildir. Buradaki 'fiziksel sistem' ifadesi matematiksel modelleme içerir. Dolayısıyla gerçek koşullar altında yapılan parametre tahmini fiziksel sistemlerin tanımlanmasında temel bir rol oynar. Bu tanımlamalardan biri de aerodinamik türev kestirimidir. [Jategaonkar, 2006], ATTAS uçağının gerçek uçuş veritabanını kullanarak EKKY'nin farklı aerodinamik kestirim yaklaşımlarının performansını karşılaştırmıştır. Sonrasında dışarıdan sensör ölçüm hataları verip, hataların kestirim sonuçlarındaki etkisini örneklemiştir. [Morelli ve Klein, 2016], NASA Twin Otter uçağının uçuş test verisini kullanarak EKKY analizleri yapmış, kestirim sonuçlarını ve hataları veriler üzerinden araştırmıştır. [Morelli, 2006] F-16'nın lineer olmayan

*Tasarım Mühendisi, Uçuş Mekaniği;Öğrenci, Uçak ve Uzay Müh., E-posta: altinisikf@itu.edu.tr

†Dr. Öğr. Üyesi, Uçak Müh. Böl., E-posta: zafer.oznaltant@ogu.edu.tr.

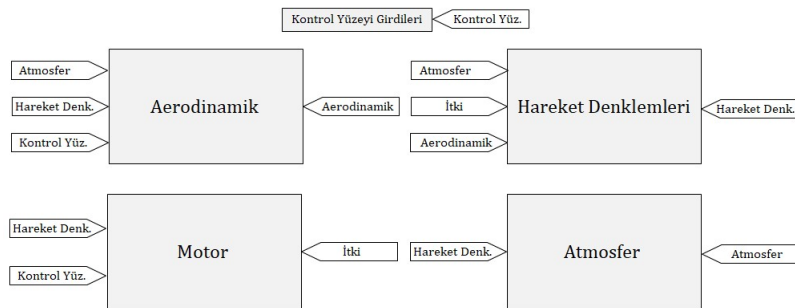
‡Dr. Öğr. Üyesi, Uçak Müh. Böl., E-posta: acarh@itu.edu.tr.

aerodinamik veritabanını kullanarak simülasyon çıktılarına gürültüler eklemiş ve EKKY içeren denklem hatası yönteminin de bulunduğu farklı kestirim yöntemlerinin performansını değerlendirmiştir. [Grauer, 2016], yinelenen EKKY kullanarak aerodinamik türevler üzerindeki belirsizliği araştırmıştır. Araştırmada T-2 uçağının uçuş verilerini deneysel olarak kullanmıştır. Literatürdeki bahsedilen yöntemlerde kullanılan veritabanının erişebilirliği açısından düşünülürse gerçek uçuş verilerini elde etmek kısıtlamalar, maliyetler veya deneysel kurulumun karmaşıklığı nedeniyle zor olabilir. Dolayısıyla lineer ve basit bir aerodinamik uzaydaki inceleme ve araştırma, lineer olmayan uzaydaki karmaşıklıkları ortadan kaldırır ve EKKY performansı ve çıktıları güçlü bir şekilde analiz edilebilir. Bu bağlamda uçuş benzetim modelleri ve simülasyonları, veri üretmek ve analiz etmek için kontrol edilebilir bir ortam sağlar. Dinamiği bilinen bir sistemi ele alan, girdisi ve çıktısı olan fiziksel bir sistemin basit örneği Şekil 1'de ele alınmıştır.



Şekil 1: Fiziksel Sistemi Tanımlayan Girdi ve Çıktı

Görseldeki şema, gerçek dünyadaki fiziksel uçak sistemini temsil eden dinamik sistemin matematiksel modelinin kurgulanması ile oluşur. Bu sistem kara kutu olarak adlandırılan sistemden ayrıdır ve dinamiği bellidir. Bu bağlamda Şekil 1'deki gibi girdisi ve çıktısı olan altı serbestlik dereceli bir uçuş benzetim modeli oluşturulmuştur. Modelde kullanılan aerodinamik ve motor-itki türevlerinin sayısal değerleri [Roskam, 1998]'dan alınmıştır ve ilgili uçuş benzetim modeli temel olarak atmosfer, aerodinamik, motor ve hareket denklemleri bloklarından oluşmaktadır. Altı serbestlik dereceli uçuş benzetim modelinin blokları ana hatlarıyla Şekil 2'de gösterilmektedir.



Şekil 2: Altı Serbestlik Dereceli Uçuş Benzetim Modeli Ana Blokları

Şekilde dört ana bloktan oluşan model şeması belirli bir uçak sisteminin altı serbestlik dereceli matematiksel modelini içerir ve MATLAB-Simulink [The MathWorks Inc., 2021] ortamında Newton mekaniği kullanılarak oluşturulmuştur. Bu modelde uçak, Newton-Raphson yöntemi kullanılarak kanat seviyesi kararlı hal koşulunda trim edilir. Yukarıda belirtildiği gibi altı serbestlik dereceli uçuş dinamiği modelinde, aerodinamik türev kestirim sürecinin doğrudan bir üyesi olacak aerodinamik türevler bilinmektedir ve veritabanı da bu türevler kullanılarak modellenmiştir. Hareket denklemlerinde oluşturulan diferansiyel denklemleri numerik olarak çözmek için Simulink programında 4. dereceden Runge-Kutta yöntemi seçilmiştir. Atmosfer bloğu içerisinde bulunan hava türbülans modeli de Simulink ortamında Dryden atmosferik türbülans modeli (sürekli) seçilerek oluşturulmuştur. Dolayısıyla diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılacak numerik yaklaşım ve atmosferik türbülans modeli Simulink altyapısından oluşturulduğu için bu iki başlığa detaylı girilmeyecektir. Uçuş benzetim altyapısı modellendikten sonra, modelde kusursuz ve hatalı ölçümlerin yapıldığı varsayılmış ve uçuş benzetim modelinde yukarıda bahsedilen atmosferik türbülans ve sensör

ölçüm hataları simüle edilmiştir. Sonrasında, denklem hatası yöntemi olarak da adlandırılabilen en küçük kareler yönteminin iki farklı yaklaşımının parametre kestirimleri arasında karşılaştırmalar yapılmıştır. Hata analizleri yapılarak parametre tahmin yöntemlerinin performansları uygulamalı olarak araştırılmıştır. Yöntemlerin performanslarını değerlendirmek için R^2 istatistiği ve standart sapma değeri referans alınmıştır.

Kısaca özetlenirse bu çalışmada aerodinamik veritabanı lineer olarak tanımlanan altı serbestlik dereceli bir uçuş benzetim modeli ile sıradan ve yinelenen EKKY kullanılarak aerodinamik türevlerin parametre kestirimleri yapılmıştır. Çalışmanın Yöntem başlığı altında uçak hareket modeli, aerodinamik, motor ve atmosfer modelleri tanımlanmış; trim algoritması açıklanmıştır. Ayrıca incelenen parametre kestirim yöntemleri kısaca verilmiştir. Sonraki bölümde uygulama çalışması kusursuz hal ve türbülanslı bozunmalar sonucu alınan cevaplar olmak üzere çalışılmış, son bölümde elde edilen sonuçlar belirtilmiştir.

YÖNTEM

Uçak Modelleme, Trim ve Simulasyon Altyapısı

Aerodinamik ve Motor Bloğu: Aerodinamik veritabanı uçağın kararlılık ve kontrol karakteristiğini belirlemede çok önemli rol oynar. Aerodinamik veri oluşturmada farklı yöntemler kullanılabilir. Bunlara örnek olarak CFD temelli numerik çözümler ve rüzgar tüneli bazlı deneysel çözümler verilebilir. Gerçek uçuşta ise uçağın üzerine etki eden kuvvet ve momentleri direk ölçebilecek bir

C_{D_0}	C_{D_u}	C_{D_α}	$C_{D_{\delta e}}$	C_{Y_β}	C_{Y_p}	C_{Y_r}	$C_{Y_{\delta a}}$	$C_{Y_{\delta r}}$	C_{L_0}	C_{L_u}
0.0205	0.05	0.12	0	-1	-0.14	0.61	0	0.28	0.149	0.084
C_{L_α}	$C_{L_{\dot{\alpha}}}$	C_{L_q}	$C_{L_{\delta e}}$	C_{R_β}	C_{R_p}	C_{R_r}	$C_{R_{\delta a}}$	$C_{R_{\delta r}}$	C_{M_0}	C_{M_u}
5.5	4.2	10	0.38	-0.11	-0.39	0.28	0.1	0.05	-0.08	0
C_{M_α}	$C_{M_{\dot{\alpha}}}$	C_{M_q}	$C_{M_{\delta e}}$	C_{N_β}	C_{N_p}	C_{N_r}	$C_{N_{\delta a}}$	$C_{N_{\delta r}}$	C_{T_0}	C_{T_u}
-0.24	-9.6	-17.7	-0.88	0.17	0.09	-0.26	-0.003	-0.12	-0.022	0.05

Tablo 1: Marchetti S211 Uçağının Aerodinamik ve İtke Türevleri

sistem yoktur. O yüzden aerodinamik veritabanının doğruluğu büyük önem taşımaktadır. Bu bağlamda sistem tanımlaması ve parametre kestirimi aerodinamik veritabanı doğrulamada kritik rol oynar. Modelde kullanılan veritabanı aerodinamik türevlerle lineer olarak modellenmiştir. Bu türevlerin kusursuz ortamda uçağın yüzde yüz doğrulukta gerçek karakteristiğini gösterdiği kabul edilmiştir. Bunun yanında motor bloğu da lineer olarak modellenmiştir. [Roskam, 1998]'da aerodinamik ve itke türevlerinin sayısal değerleri sunulmaktadır. Bu değerler Tablo 1'de gösterilmektedir. Sayısal değerlerin alındığı koşullar ise uçağın 0.6 Mach ve 25000 ft irtifadaki değerleridir. Aerodinamik modellemede kullanılan denklem takımları her bir kuvvet ve moment katsayısı için aşağıdaki gibidir.

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_\alpha} \Delta\alpha + C_{D_u} \Delta\hat{u} + C_{D_{\delta e}} \delta e \quad (1)$$

$$C_Y = C_{Y_\beta} \Delta\beta + C_{Y_p} \Delta\hat{p} + C_{Y_r} \Delta\hat{r} + C_{Y_{\delta a}} \delta a + C_{Y_{\delta r}} \delta r \quad (2)$$

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \Delta\alpha + C_{L_u} \Delta\hat{u} + C_{L_{\dot{\alpha}}} \Delta\hat{\alpha} + C_{L_q} \Delta\hat{q} + C_{L_{\delta e}} \delta e \quad (3)$$

$$C_R = C_{R_\beta} \Delta\beta + C_{R_p} \Delta\hat{p} + C_{R_r} \Delta\hat{r} + C_{R_{\delta a}} \delta a + C_{R_{\delta r}} \delta r \quad (4)$$

$$C_M = C_{M_0} + C_{M_\alpha} \Delta\alpha + C_{M_u} \Delta\hat{u} + C_{M_{\dot{\alpha}}} \Delta\hat{\alpha} + C_{M_q} \Delta\hat{q} + C_{M_{\delta e}} \delta e \quad (5)$$

$$C_N = C_{N_\beta} \Delta\beta + C_{N_p} \Delta\hat{p} + C_{N_r} \Delta\hat{r} + C_{N_{\delta a}} \delta a + C_{N_{\delta r}} \delta r \quad (6)$$

$$C_T = C_{T_0} + (C_{T_u} \Delta\hat{u}) \delta t \quad (7)$$

Yukarıdaki denklemler yüksek mertebeden terimlerin göz ardı edildiği bir Taylor serisi yaklaşımıdır. Bu yaklaşım girdi ve durum vektörlerindeki makul görülebilecek küçüklükteki perturbasyonlar için

geçerli sayılabilecek lineer bir varsayımdır. Bahsedilen koşullar sağlandığında, yüksek mertebeden Taylor serisi açılımları birinci dereceden açılımlara göre göz ardı edilebilir derecede küçük kalır ve ihmal edilebilir. Sonuç olarak yukarıdaki doğrusal aerodinamik denklem takımlarına ulaşılır. Denklemlerdeki şapkalı parametreler boyutsuzlaştırılmış parametrelerdir ve aşağıdaki gibi gösterilirler.

$$\Delta \hat{p} = \frac{\Delta p b}{2V_T} \quad \Delta \hat{q} = \frac{\Delta q \bar{c}}{2V_T} \quad \Delta \hat{r} = \frac{\Delta r b}{2V_T} \quad \Delta \hat{\alpha} = \frac{\Delta \dot{\alpha} \bar{c}}{2V_T} \quad \Delta \hat{u} = \frac{\Delta u}{V_T} \quad (8)$$

Burada V_T gerçek hızı, \bar{c} ortalama aerodinamik veter uzunluğunu, b kanat açıklığını, p, q, r ise gövde eksen takımındaki eksenel dönüş hızlarını temsil eder. Denklemlerde görülen $\dot{\alpha}$ ile q terimlerinin zamana karşı cevapları birbirine çok benzerdir ve iki parametre nicel olarak toplanabilir [Morelli ve Klein, 2016]. Örneğin, C_L katsayısı için $C_{L\bar{q}} = C_{L\dot{\alpha}} + C_{Lq}$ yaklaşımı yapılabilir. Ayrıca bu yaklaşım, uçuş benzetim modeli altyapısını cebirsel döngüden de kurtarmaktadır. Sonuç olarak aerodinamik ve motor blokları yukarıda gösterilen denklemler kullanılarak modellenmiştir.

Atmosfer Bloğu: Atmosfer bloğunda kullanılan model USA-Uluslararası Standart Atmosfer [U.S., 1976] referansı baz alınarak oluşturulan denklem takımlarını içermektedir. Model basınç, sıcaklık ve yoğunluğun irtifa ile değiştiğini gösteren statik bir atmosferi benzetir ve irtifanın değişimine bağlı bir altyapı içermektedir. Bir başka deyişle, atmosfer modeline irtifa bilgisi girdi olarak verilirken, Mach sayısı ve dinamik basınç değerleri çıktı olarak alınmaktadır. Hesaplamalar iki ana irtifa tipi baz alınarak yapılmaktadır. Atmosferin troposfer (0-11 km) katmanındaki denklem takımları aşağıdaki gibidir.

$$T = T_0 - HL, \quad a = \sqrt{\gamma RT}, \quad P = P_0(T/T_0)^{g/LR}, \quad \rho = \rho_0 \frac{(T/T_0)^{g/LR}}{(T/T_0)} \quad (9)$$

Burada T sıcaklığı, P basıncı, ρ yoğunluğu ve a ses hızını temsil etmektedir. Ek olarak uçak irtifası H , standart Lapse oranı L , özgül gaz sabiti R , ve adyabatik indeks γ olarak gösterilmiştir. Eğer uçak troposfer sınırı olarak kabul edilen 11 km irtifasını aşarsa atmosfer sıcaklığı sabit kabul edilir ve denklem takımları aşağıda ifade edildiği gibi olur.

$$P = \bar{P} e^{(g/RT)(H_t - H)}, \quad \bar{P} = P_0(T/T_0)^{g/LR} \quad (10)$$

$$\rho = \bar{\rho} e^{(g/RT)(H_t - H)}, \quad \bar{\rho} = \rho_0 \bar{T}^{(g/LR)} / \bar{T}, \quad \bar{T} = T/T_0 \quad (11)$$

Burada T_0 ve P_0 sırasıyla deniz seviyesi sıcaklık ve basınç değerlerini, ρ_0 ise deniz seviyesi hava yoğunluğunu ifade eder. Tropopoz baz yüksekliği de H_t ile gösterilmektedir ve değeri 11 km'dir. Bu katmanın maximum yükseliği ise 20 km olarak kabul edilmiştir ve stratosfer ile troposfer'i ayıran bir katmandır. Mach sayısına (M) ve dinamik basınca (\bar{q}) ise aşağıdaki denklemlerden ulaşılır.

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho V_T^2, \quad M = \frac{V_T}{a} \quad (12)$$

Atmosfer bloğundaki başka bir bölüm ise türbülans modelidir. Dryden hava türbülans modeli bandı sınırlı beyaz gürültüyü uygun filtreler aracılığıyla şekillendirerek uçuş simülasyonlarına türbülans eklemek amacıyla Dryden'in spektral tanımını kullanır. Bu tanım, askeri standartlar dokümanı MIL-HDBK-1797'de yer alan matematiksel ifadeleri içerir.

Hareket Denklemleri Bloğu: Diferansiyel denklemlerin klasik Newton mekaniği ile türetildiği bu modelde uçak rijit ve sabit kütleli kabul edilmiştir. Yer referans eksenine göre oluşturulan, gövde eksen takımında ve vektör formunda ifade edilen hareket denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\vec{F}_A + \vec{F}_T = m \dot{\vec{V}} + \vec{\omega} \times \vec{V} \quad (13)$$

$$\vec{M}_A = I \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times I \vec{\omega} \quad (14)$$

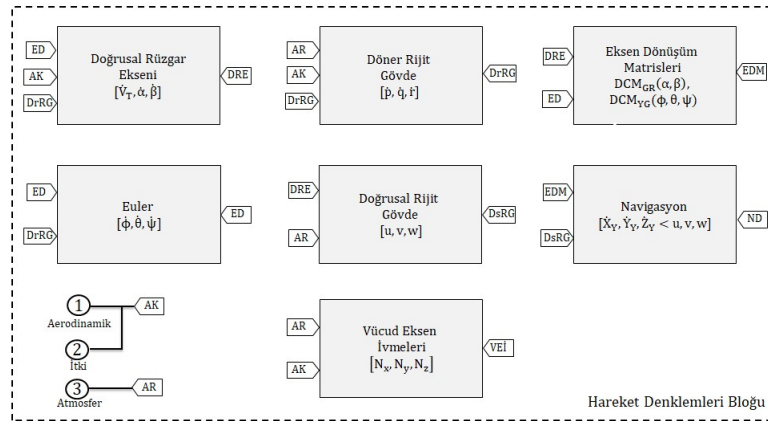
Burada I kütle eylemsizlik momenti matrisini, m uçak kütlelerini, F_A , M_A aerodinamikten gelen kuvvet ve momentleri, ve F_T ise itkiden gelen kuvvetleri temsil etmektedir. Diğer parametreler ise

$\vec{V} = [u \ v \ w]^T$ ve $\vec{\omega} = [p \ q \ r]^T$ olarak gösterilmektedir. Denklem takımlarında kullanılacak veritabanı için [Roskam, 1998]'dan seçilen SIAI Marchetti S211 uçağının bilgileri Tablo 2'de gösterilmiştir. Tabloda verilen değerler uçağın bir denge noktasında üretilmiş bilgilerdir. Uçuş

Kütle (m)	1814.4 kg
I_{xx}	1084.7 $kg.m^2$
I_{yy}	6507.9 $kg.m^2$
I_{zz}	7050.3 $kg.m^2$
I_{xz}	271.2 $kg.m^2$
Kanat Alanı (S)	12.6248 m^2
Kanat Açıklığı (b)	8.0162 m
Veter (\bar{c})	1.6459
Gerçek Hız (V_T)	610 ft/sn^2
Mach	0.6
İrtifa	25000 ft

Tablo 2: Marchetti S211 Uçağı Referans Bilgileri

benzetim modelinin bir amacı da verilen değerlere doğru bir şekilde yakınsayarak benzetim modelini simüle edebilmektir. Hareket denklemleri modelinin alt blokları ve bloklar arası akış diyagramı Şekil 3'te gösterilmektedir.



Şekil 3: Hareket Denklemleri Bloğu Akış Diagramı

Her bir blok kendi içerisinde bu bölümde formüle edilen denklem takımları ile modellenmiştir. Şekilde görüldüğü gibi hareket denklemleri bloğunun referans eksen takımı rüzgar eksenidir ve durum değişkenlerinin bu ekseninde integralleri alınarak gövde eksenine geçiş sağlanır. Dolayısıyla rüzgar eksen takımında yazılan doğrusal hız denklemlerinin gövde eksen takımına dönüşüm ($DCM_{GR}(\alpha, \beta)$) matrisi Denklem 15'te verilmiştir ve modelde doğrusal rijit gövde denklemlerini temsil etmektedir.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\vec{V} = DCM_{GR}(\alpha, \beta) \vec{V}_R) \quad (15)$$

Bunun yanında gövde eksen takımındaki hız bileşenleri kullanılarak hücum açısına, kayış açısına ve gerçek hava hızına ulaşılabilir.

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{w}{u} \right), \quad \beta = \sin^{-1} \left(\frac{v}{|\vec{V}_T|} \right), \quad |\vec{V}_T| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (16)$$

Denklem 16'daki α , β , ve V_T terimlerinin türevleri alınarak Denklem 13 ve Denklem 15 ile kullanıldığında, doğrusal rüzgar eksenini bloğunu temsil eden ve rüzgar eksen takımında modellenen

denklemler elde edilir.

$$\dot{V}_T = -\frac{\bar{q}S}{m}C_D + \frac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta + g(\cos \phi \cos \theta \sin \alpha \cos \beta + \sin \phi \cos \theta \sin \beta - \sin \theta \cos \alpha \cos \beta) \quad (17)$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{\bar{q}S}{mV_T \cos \beta}C_L + q - \tan \beta(p \cos \alpha + r \sin \alpha) + \frac{g}{mV_T \cos \beta}(\cos \phi \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) - \frac{T \sin \alpha}{mV_T \cos \beta} \quad (18)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\bar{q}S}{mV_T}C_Y + p \sin \alpha - r \cos \alpha + \frac{g}{V_T} \cos \beta \sin \phi \cos \theta + \frac{\sin \beta}{V_T}(g \cos \alpha \sin \theta - g \sin \alpha \cos \phi \cos \theta) + \frac{\sin \beta T \cos \alpha}{V_T m} \quad (19)$$

Denklem 20 ve 22 arasında ise döner rijit gövde bloğu formüle edilmektedir. Burada, motorun etkisi göz ardı edilmiş olup, I_{xy} ve I_{yz} çarpım atalet momentleri sıfır olarak kabul edilmektedir. Ek olarak R yuvarlanma, M yunuslama ve N ise savrulma momentini temsil eder. İlgili bloktaki döner rijit gövde denklemleri Denklem 14'ten çıkartılır ve aşağıdaki gibidir.

$$\dot{p} = \frac{R + I_{yz}(q^2 - r^2) + I_{zx}(\dot{r} + pq) + I_{xy}(\dot{q} - rp) + (I_{yy} - I_{zz})qr}{I_{xx}} \quad (20)$$

$$\dot{q} = \frac{M + I_{zx}(r^2 - p^2) + I_{xy}(\dot{p} + qr) + I_{yz}(\dot{r} - pq) + (I_{zz} - I_{xx})rp}{I_{yy}} \quad (21)$$

$$\dot{r} = \frac{N + I_{xy}(p^2 - q^2) + I_{yz}(\dot{q} + rp) + I_{zx}(\dot{p} - qr) + (I_x - I_y)pq}{I_{zz}} \quad (22)$$

Euler bloğu kinematik denklemlerden oluşmaktadır ve Euler açılarının zamana göre türevi ile gövde eksen takımındaki açılal dönüş hızları arasındaki ilişkiyi formüle etmektedir.

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (23)$$

Denklem 15'te rüzgar ekseninden gövde eksenine dönüşüm matrisi gösterilmiştir. Gövde eksen takımından yer eksen takımına dönüşüm matrisi ($DCM_{YG}(\phi, \theta, \psi)$) ise Denklem 24'de verilmiştir ve navigasyon bloğunu temsil etmektedir.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_Y \\ \dot{Y}_Y \\ \dot{Z}_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (24)$$

Gövde eksen ivmeleri bloğu ise uçağın doğrusal eksenlerindeki ivmelenmeyi gösterir ve yük faktörü (g) cinsinden formüle edilir.

$$\frac{F_{Ax} + F_{Tx}}{mg} = N_x, \quad \frac{F_{Ay}}{mg} = N_y, \quad \frac{F_{Az}}{mg} = N_z \quad (25)$$

Trim Algoritması: Simülasyon öncesinde uçağın denge noktasını bulma, simüle edilen uçağın başlangıcını gerçekçi bir uçuş koşuluna yakın bir noktada tutmayı sağlar. Uygulanacak doğru trim ayarları, simülasyon esnasında uçağın dengeli ve kararlı uçuş profili sergilemesine olanak tanır. Dolayısıyla kanat seviyesi kararlı hal trim koşulu, altı serbestlik dereceli hareket denklemlerinin parametrelerinin uygun bir şekilde ayarlanması ile oluşturulur.

$$\dot{x} = A_a x + B_a u \quad (26)$$

$$y = C_a x + D_a u \quad (27)$$

Denklem 26 ve 27 denge noktasında küçük sayısal değerlerle bozuntuya uğratılmış lineer bir sistemi temsil eder. Burada x durum değişkenlerini, u girdileri ve y ise çıktıları gösterir. Alt indisli sistem matrisleri A_a, B_a, C_a ve D_a ise sırasıyla durum, girdi, çıktı ve doğrudan aktarım matrisleridir. Alt indis a , modeldeki sabit ve serbest parametrelerin ayarlanmış olduğu kanat seviyesi kararlı hal uçuşu ifade eder. Denge noktasındaki sabit ve serbest değişkenlerin ayarlandığı parametreler Denklem 28 ve 29'da gösterilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{sabit(6x1)} & y_{sabit(2x1)} \end{bmatrix}^T = [\dot{V}_T, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, N_y, \gamma]^T \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} x_{serbest(4x1)} & u_{serbest(4x1)} \end{bmatrix}^T = [\alpha, \beta, \phi, \theta, \delta_e, \delta_a, \delta_r, \delta_t]^T \quad (29)$$

Yukarıdaki eşitliklerde görüldüğü gibi sabit parametreler ile serbest parametrelerin sayısının birbirine eşit ve bağımsız olması gerekir. Newton-Raphson tekniği Denklem 28 ve 29'daki problemi çözmek için numerik bir yaklaşım sağlar.

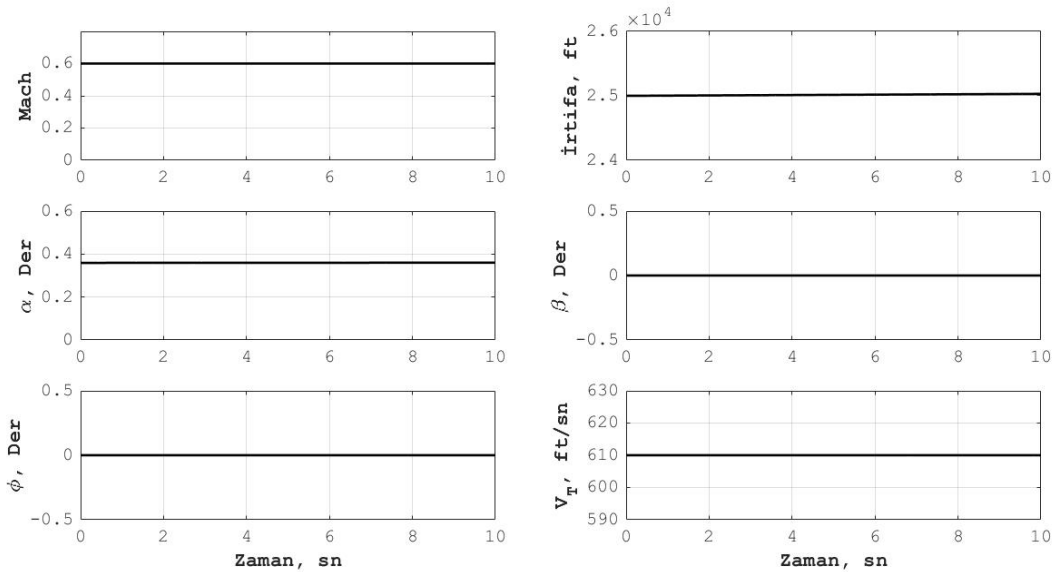
$$J(\Gamma) = \begin{bmatrix} \dot{x}_{sabit(6x1)} \\ y_{sabit(2x1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{serbest(4x1)} \\ u_{serbest(4x1)} \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

Kanat seviyesi kararlı hal denge noktası ya da trim koşulu Denklem 30'daki sonuca bir eşik değeri koyarak bulunur ve Euclidean normu uygulanarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} & norm \left[\dot{V}_T, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \left(N_{y_g} - N_{y(N_y=0)} \right), \left(\gamma_g - \gamma_{(\gamma=\vartheta)} \right) \right]^T \\ & = \left| \dot{V}_T, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \left(N_{y_g} - N_{y(N_y=0)} \right), \left(\gamma_g - \gamma_{(\gamma=\vartheta)} \right) \right|^T < \varepsilon \end{aligned} \quad (31)$$

Matrisin son iki parametresindeki g alt indisi güncel değerleri ifade etmektedir ve her iterasyonda trim koşulu için istenilen değerlerle farkı ölçülür. Tolerans değeri ε bir eşik değeridir ve koşul sağlandığında trim bulunmuş olur. Böylelikle $x_{serbest(4x1)}$ ve $u_{serbest(4x1)}$ içerisindeki parametreler de numerik olarak yakınsamış olur.

Simülasyon: Şu ana kadar, uçuş benzetim modeli kurulmuş olup trim algoritmasının altyapısından bahsedilmiştir. Model fiziksel dünyadaki uçuş verisini temsil edecek simülasyon çıktılarına hazırdır.



Şekil 4: Denge Noktasında Oluşturulan Simülasyon Çıktıları

Denge noktası bulunarak üretilen simülasyon çıktıları Şekil 4'te gösterilmektedir. Kurulan altyapı ile [Roskam, 1998]'da ve Tablo 2'de verilen uçuş koşullarına ulaşılmıştır.

Parametre Kestirimi: En Küçük Kareler Yöntemi (EKKY)

Regresyon analizi olarak da adlandırılan en küçük kareler yöntemi, maliyet fonksiyonunu doğrudan bir giriş-çıkış denklemi cinsinden tanımlayarak minimize ettiği için denklem hatası yöntemi adı verilen bir yöntem sınıfına aittir. Bu bölümde yöntemin iki farklı yaklaşımı sunulacaktır.

Sıradan EKKY: Lineer bir eşitlik olan ve belli bir hata içeren (ϵ) "gözlem" denklemi aşağıdaki gibi formüle edilmektedir.

$$y(k) = x^T(k)\theta + \epsilon(k) \quad (32)$$

Burada k , ayrı zamanın belirli bir anındaki örneği temsil etmektedir. N tane ayrı örnek alınabildiği bir uzayda ise Denklem 32, Denklem 33'deki hali alır.

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \dots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \dots & x_n(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1(N) & x_2(N) & \dots & x_n(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \theta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon(1) \\ \epsilon(2) \\ \dots \\ \epsilon(N) \end{bmatrix} \quad (33)$$

Yukarıda verilen $\theta_{n \times 1}$ matrisi direkt ölçülemez ve değerleri için kestirim yapılması gerekir. Dolayısıyla burada incelenen $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ değerleri bilinmeyen kararlılık ve kontrol türevleridir. Bağımsız değişkenleri temsil eden x ise uçağın açılma dönüş hızları, hücum ya da kayış açılarından oluşan bir değişken seti olabilir. Bu bağlamda y değerleri de çıktılardır ve uçağın aerodinamik katsayılarını temsil eder. Denklem 33'ün vektör formdaki gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$Y = X\theta + \epsilon \longrightarrow \epsilon = Y - X\theta \quad (34)$$

Vektör θ içerisinde bulunan her parametre N tane örnek boyunca sabittir ve en küçük kareler yöntemi ile kestirimi yapılırken Denklem 34'de gösterilen eşitlikteki hataların karelerinin minimize edilmesi yöntemi kullanılır.

$$\xi(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \epsilon^2(k) = \frac{1}{2} \epsilon^T \epsilon = \frac{1}{2} [Y - X\theta]^T [Y - X\theta] \quad (35)$$

Denkle 35'in mümkün olan en küçük değerini bulmak yerel ya da mutlak en küçük değere ulaşmak anlamına gelir. Bu bağlamda maliyet fonksiyonunun gradyanı, denklemdaki her bir parametreye göre kısmi türevlerinin sıfıra yakınsamasını ifade eder.

$$\frac{\partial \xi(\theta)}{\partial \theta} = -Y^T X + \theta^T (X^T X) = 0 \quad (36)$$

Denklem 36 cebirsel olarak düzenlendiğinde aşağıdaki sonuca ulaşılır ve ortaya çıkan denklem sıradan EKKY'nin parametre kestirim formülüdür.

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (37)$$

Yinelenen EKKY: Sıradan EKKY'de θ vektörü içerisinde bulunan ve bilinmeyen (direkt ölçülemeyen) kararlılık ve kontrol türevleri N tane örnek boyunca sabit kabul edilmişti. Yinelenen EKKY'de ise θ vektöründeki parametreler N tane örnek boyunca dinamik olarak değişir. Bu yöntemde ulaşılabilir örnek sayısı k olarak gösterilecektir ve Denklem 37 N yerine k tane örnek için yazılabilir.

$$\hat{\theta}(k) = (X_k^T X_k)^{-1} X_k^T Y_k \longrightarrow \hat{\theta}(k) = P(k) X_k^T Y_k \quad (38)$$

Ulaşılabilir k tane örneğin üzerine bir tane daha örnek alındığı varsayılırsa Denklem 38 aşağıdaki gibi olur.

$$\hat{\theta}(k+1) = P(k+1) X_{k+1}^T Y_{k+1} \quad (39)$$

Burada $X_{k+1} = [X_k; x^T(k+1)]$, $Y_{k+1} = [Y_k; y(k+1)]$ ve $P(k+1) = (X_{k+1}^T X_{k+1})^{-1}$ olarak gösterilir. Gerekli cebirsel düzenlemeler yapıldıktan sonra $P(k+1)$ matrisi Denklem 40'taki gibi ifade edilebilir.

$$P(k+1) = P(k) - K(k+1)x^T(k+1)P(k) \quad (40)$$

Burada $K(k+1)$ kazanç matrisi olarak isimlendirilir ve aşağıdaki gibi formüle edilir.

$$K(k+1) = \frac{P(k)x(k+1)}{1 + x^T(k+1)P(k)x(k+1)} \quad (41)$$

Eğer Denklem 40, Denklem 39 içersine konulup gerekli cebirsel düzenlemeler yapılırsa yinelenen EKKY kestirim formülü aşağıdaki gibi olur.

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + K(k+1)[y(k+1) - x^T(k+1)\hat{\theta}(k)] \quad (42)$$

Böylece yinelenen en küçük kareler yöntemini uygulamak için gerekli tüm bilgiler Denklem 40-42 arasında gösterilmiştir. Algoritmanın her adımda uygulanma sırası is şu şekildedir:

1. Kazanç matrisini güncelleme (Denklem 41)
2. Parametre kestirimi güncelleme (Denklem 42)
3. Parametre kestirim hatasının yayılımının kovaryans matrisini güncelleme (Denklem 40)

EKKY'nin Performans Değerlendirmesi: Denklem 34'te verilen ölçüm hatasının varyansı (φ^2) sabit kabul edilmiştir ve kestirim formülü aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\varphi}^2 = \frac{1}{N-n} \sum_{k=1}^N [y(k) - X(k)\hat{\theta}]^2 \quad (43)$$

Çok sayıda veri örneği ile tahminlerin asimptotik tutarlılığını araştırmak için kovaryans matrisinin davranışının kontrol edilmesi gerekir. Her bir parametre kestirimi için standart sapma σ , kovaryans matrisinin diyagonal elementlerinin karekökünden çıkarılır.

$$P = \hat{\varphi}^2 (X^T X)^{-1} \rightarrow \sigma_j = \sqrt{P_{jj}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (44)$$

Bunun yanında R^2 istatistiği parametre kestiriminin gerçek değere ne kadar yakın olduğunu gösterir ve 0-1 arasında değişir. Eğer R^2 1'e yakınsa kestirim daha iyi yakınsamıştır.

$$R^2 = \frac{\sum_{k=1}^N [\hat{y}(k) - \bar{y}]^2}{\sum_{k=1}^N [y(k) - \bar{y}]^2} = \frac{\hat{\theta}^T X^T Y - N\bar{y}^2}{Y^T Y - N\bar{y}^2} \quad (45)$$

UYGULAMALAR VE DEĞERLENDİRME

Uçak üzerinde aerodinamik kuvvetler ve momentler direkt olarak ölçülemez. Fakat, açılal hızlar, doğrusal hızlar, kontrol yüzeyi açıları, hücum ve kayış açıları gibi parametreler ölçülebilir. Uçuş verisinden alınabilen bu değişkenlerle ölçülemeyen parametrelerin kestirimi yapılabilir.

$$\begin{aligned} X_{C_D}(k) &= [1(k) \quad \alpha(k) \quad \hat{u}(k) \quad \delta_e(k)] \\ X_{C_Y}(k) &= [1(k) \quad \beta(k) \quad \hat{p}(k) \quad \hat{r}(k) \quad \delta_a(k) \quad \delta_r(k)] \\ X_{C_L}(k) &= [1(k) \quad \alpha(k) \quad \hat{q}(k) \quad \hat{u}(k) \quad \delta_e(k)] \\ X_{C_R}(k) &= [1(k) \quad \beta(k) \quad \hat{p}(k) \quad \hat{r}(k) \quad \delta_a(k) \quad \delta_r(k)] \\ X_{C_M}(k) &= [1(k) \quad \alpha(k) \quad \hat{q}(k) \quad \hat{u}(k) \quad \delta_e(k)] \\ X_{C_N}(k) &= [1(k) \quad \beta(k) \quad \hat{p}(k) \quad \hat{r}(k) \quad \delta_a(k) \quad \delta_r(k)] \end{aligned}$$

Her kuvvet ve moment katsayısı için X vektörleri içerisinde bulunan bağımsız ölçüm çıktıları yukarıda verilmiştir. Her bir X vektörü için bilinmeyen aerodinamik türevler de aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\theta_{C_D} &= [C_{D_0} \quad C_{D_\alpha} \quad C_{D_u} \quad C_{D_{\delta_e}}]^T \\ \theta_{C_Y} &= [C_{Y_0} \quad C_{Y_\beta} \quad C_{Y_p} \quad C_{Y_r} \quad C_{Y_{\delta_a}} \quad C_{Y_{\delta_r}}]^T \\ \theta_{C_L} &= [C_{L_0} \quad C_{L_\alpha} \quad C_{L_q} \quad C_{L_u} \quad C_{L_{\delta_e}}]^T \\ \theta_{C_R} &= [C_{R_0} \quad C_{R_\beta} \quad C_{R_p} \quad C_{R_r} \quad C_{R_{\delta_a}} \quad C_{R_{\delta_r}}]^T \\ \theta_{C_M} &= [C_{M_0} \quad C_{M_\alpha} \quad C_{M_q} \quad C_{M_u} \quad C_{M_{\delta_e}}]^T \\ \theta_{C_N} &= [C_{N_0} \quad C_{N_\beta} \quad C_{N_p} \quad C_{N_r} \quad C_{N_{\delta_a}} \quad C_{N_{\delta_r}}]^T\end{aligned}$$

Aerodinamik parametre tahmini için hesaplanan EKKY'de bağımlı değişken olarak boyutsuz aerodinamik kuvvet ve moment katsayıları kullanılır. Her kuvvet ve moment katsayısı için ayrı bir EKKY problemi çözülür. Buradaki kuvvet ve momentler uçağın 6 serbestlik dereceli dinamiğini temsil eden doğrusal ve rotasyonel parametrelerden oluşur. Ölçülebilen değişkenlerle oluşturulan denklem takımları aşağıda sıralanmıştır.

$$C_X = \frac{1}{\bar{q}S}(mgN_x - T), \quad C_Y = \frac{1}{\bar{q}S}mgN_y, \quad C_Z = \frac{1}{\bar{q}S}mgN_z$$

Gövde eksen takımında ifade edilen kuvvet katsayılarının rüzgar eksen takımına dönüş denklemi de aşağıda sunulmuştur.

$$[C_D \quad C_Y \quad C_L]^T = [DCM_{GR}(\alpha, \beta)]^T [C_X \quad C_Y \quad C_Z]^T$$

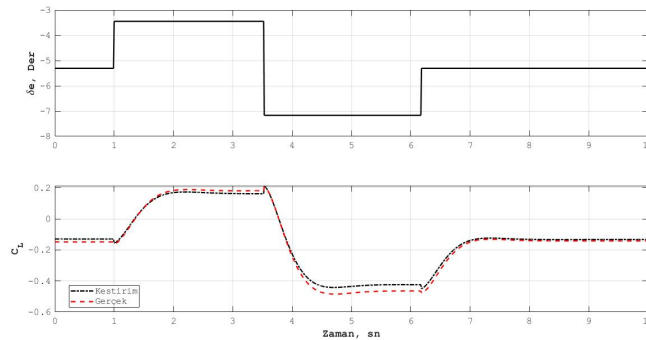
Moment katsayısı hesaplamaları da aşağıdadır.

$$\begin{aligned}C_R &= \frac{1}{\bar{q}Sb}[I_{xx}\dot{p} - I_{xz}(pq + \dot{r}) + (I_{zz} - I_{yy})qr] \\ C_M &= \frac{1}{\bar{q}S\bar{c}}[I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})pr + I_{xz}(p^2 - r^2)] \\ C_N &= \frac{1}{\bar{q}Sb}[I_{zz}\dot{r} - I_{xz}(\dot{p} - qr) + (I_{yy} - I_{xx})pq]\end{aligned}$$

Yukarıdaki kuvvet ve moment katsayıları simülasyon çıktılarının uçuş verilerini temsil ettiği ölçüm parametrelerinden hesaplanmaktadır ve uçuş veri setinden çekilebilirler.

$$\Psi : [N_x, N_y, N_z, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, p, q, r, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xz}, \bar{q}, S, m, \bar{c}, b, g]$$

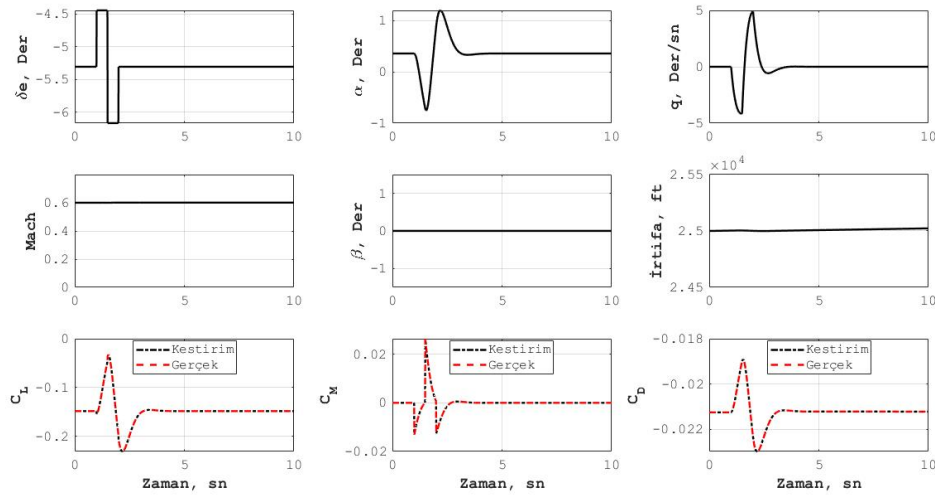
Burada Ψ uçuş verisinden ölçülüp çekilebilen değişken parametreleri temsil etmektedir. Aerodinamik türevlerin kestirimi konusunda bir diğer husus modele uygun kontrol yüzeyi girdileri vermektir. Şekil



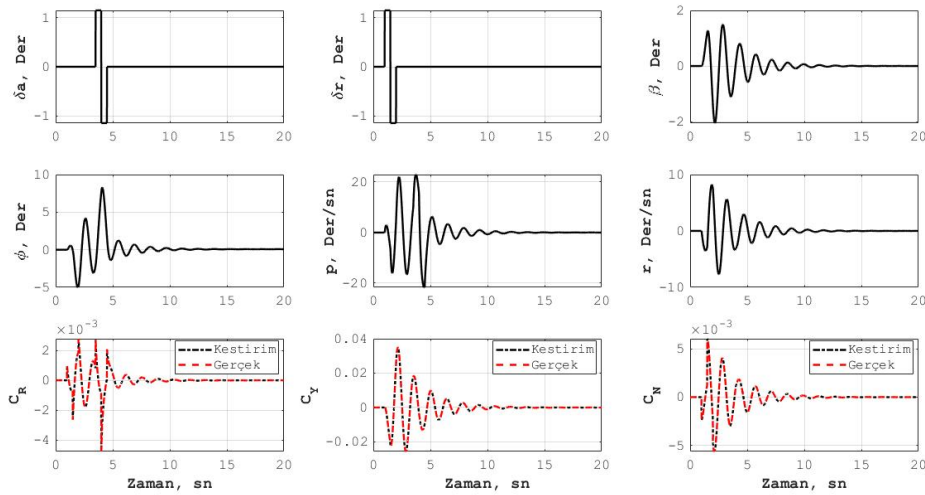
Şekil 5: Optimum Olmayan İrtifa Dümeni Girdisiyle C_L Kestirimi

5'te irtifa dümen girdisi rastgele seçilmiş kusursuz koşullardaki bir uçuş benzetim simülasyonunun taşıma katsayısı (C_L) üzerindeki parametre kestirim sonuçları gösterilmektedir. Bir sistemin lineerleştirilmesinde durum değişkenlerini bozuntuya uğratmak için kullanılan küçük değerler kontrol yüzeylerinde de geçerli olacaktır. Özellikle bir uçuş koşulunda üretilmiş lineer aerodinamik veritabanı için bu girdiler önemlidir. Örneğin eğer haddinden fazla büyük ve uzun girdiler verilirse EKKY parametre kestirim yöntemleri doğru sonuçlar vermeyebilir. Bu girdiler denge noktası bulunan uçağın kararlı halden çıkıp uçuş koşulunun bozulmasına sebep olacaktır. Buradan kontrol yüzeyi girdi tasarımının önemli olduğu sonucuna varılabilir. İyi tasarlanmayan bir girdiye karşılık gerçek değer ve kestirim yapılan değerler arasında farklıklar olduğu açıkça görülmektedir.

Sıradan EKKY Değerlendirmesi: Bu bölümde ilk olarak modelin herhangi bir gürültü içermediği kusursuz koşullardaki EKKY kestirim sonuçları gösterilecektir. Boylamsal ve yanal-yönel eksenlerde kontrol yüzeylerinin yeterince küçük bir çift kutup girdisi verilmesiyle kuvvet ve moment katsayılarının gerçek değerleriyle kestirim değerleri karşılaştırmaları sırasıyla Şekilde 6 ve 7'de gösterilmiştir.



Şekil 6: Boylamsal Eksende Kusursuz Ölçüm Sonuçları



Şekil 7: Yanal-Yönel Eksende Kusursuz Ölçüm Sonuçları

Yukarıda gösterilen boylamsal ve yanal-yönel aerodinamik katsayıların kestirim sonuçlarının ve gerçek değerlerinin birbirleri ile örtüştüğü görülmektedir. Tekrar hatırlatılmalıdır ki kontrol yüzeyi girdisinin tasarımı burada önemlidir. Dolayısıyla uygun kontrol yüzeyi girdileri ile aerodinamik türev

tahminlerine yüzde yüz doğrulukta ulaşılmıştır. İlgili katsayıların aerodinamik türevlerinin parametre kestirim sonuçları ise Tablo 3'te verilmiştir.

Türev	Gerçek	Kestirim	R^2	σ	Türev	Gerçek	Kestirim	R^2	σ
C_{L_0}	0.149	0.149	1	3.63e-14	C_{R_0}	0	0	1	2.62e-20
C_{L_α}	5.5	5.5	1	3.16e-13	C_{R_β}	-0.11	-0.11	1	9.89e-18
C_{L_q}	14.2	14.2	1	2.24e-11	C_{R_p}	-0.39	-0.39	1	5.12e-17
C_{L_u}	0.084	0.084	1	4.92e-12	C_{R_r}	0.28	0.28	1	6.54e-17
$C_{L_{\delta_e}}$	0.38	0.38	1	3.86e-13	$C_{R_{\delta_a}}$	0.1	0.1	1	1.00e-17
C_{M_0}	-0.08	-0.08	1	2.46e-14	$C_{R_{\delta_r}}$	0.05	0.05	1	7.44e-18
C_{M_α}	-0.24	-0.24	1	2.14e-13	C_{Y_0}	0	0	1	2.44e-19
C_{M_q}	-27.3	-27.3	1	1.51e-11	C_{Y_β}	-1	-1	1	9.20e-17
C_{M_u}	0	0	1	3.33e-12	C_{Y_p}	-0.14	-0.14	1	4.77e-16
$C_{M_{\delta_e}}$	-0.88	-0.88	1	2.61e-13	C_{Y_r}	0.61	0.61	1	6.08e-16
C_{D_0}	0.0205	0.0205	1	3.86e-16	$C_{Y_{\delta_a}}$	0	0	1	9.37e-17
C_{D_α}	0.12	0.12	1	4.32e-15	$C_{Y_{\delta_r}}$	0.028	0.028	1	6.91e-17
C_{D_u}	0.05	0.05	1	8.82e-14	C_{N_0}	0	0	1	1.33e-17
$C_{D_{\delta_e}}$	0	0	1	4.27e-15	C_{N_β}	0.17	0.17	1	5.00e-15
$C_{N_{\delta_a}}$	-0.003	-0.003	1	5.10e-15	C_{N_p}	0.09	0.09	1	2.59e-14
$C_{N_{\delta_r}}$	-0.12	-0.12	1	3.76e-15	C_{N_r}	-0.26	-0.26	1	3.31e-14

Tablo 3: Kusursuz Ölçümlü Sıradan EKKY Sonuçları

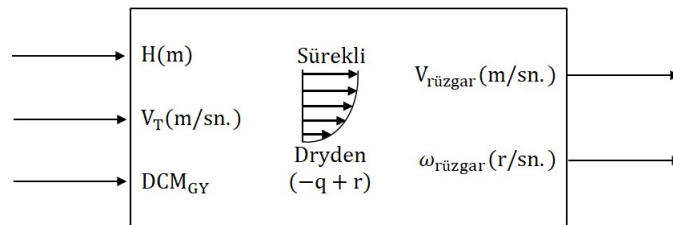
Tabloda sıradan en küçük kareler kestirim yönteminin beklenildiği gibi bire bir sonuçlar verdiği görülmüştür. Her bir kestirim değeri için R^2 istatistiği 1'dir ve standart sapmalar oldukça küçüktür. Dolayısıyla performans göstergeleri de sonuçları desteklemektedir.

İkinci adımda uçuş benzetim modelinde Dryden sürekli atmosferik türbülans bloğu aktif edilmiş ve simülasyon tekrar koşturulmuştur. Kontrol yüzeyi girdi değerleri aynı tutulmuştur. Hava türbülans koşulları Tablo 4'te gösterilmektedir.

Yan Rüzgar Hızı	15 m/sn
Yan Rüzgar Yönü	60°
Gürültü Örnekleme Süresi	0.05 sn
Kanat Genişliği	16.2 m
Türbülans Yoğunluğu	(10 ⁻²)
İrtifa	25000 ft

Tablo 4: Atmosferik Türbülans Koşulları

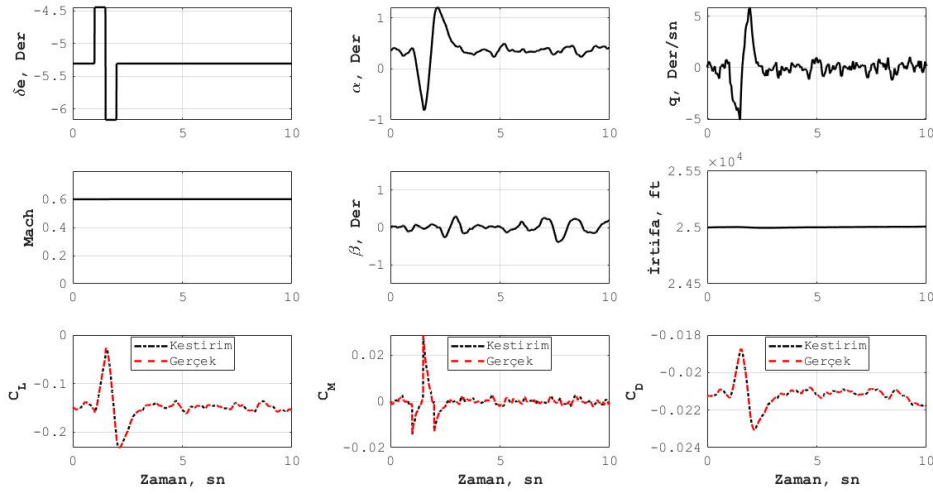
Şekil 8'de ise atmosferik türbülans modelinin girdileri ve çıktıları gösterilmektedir.



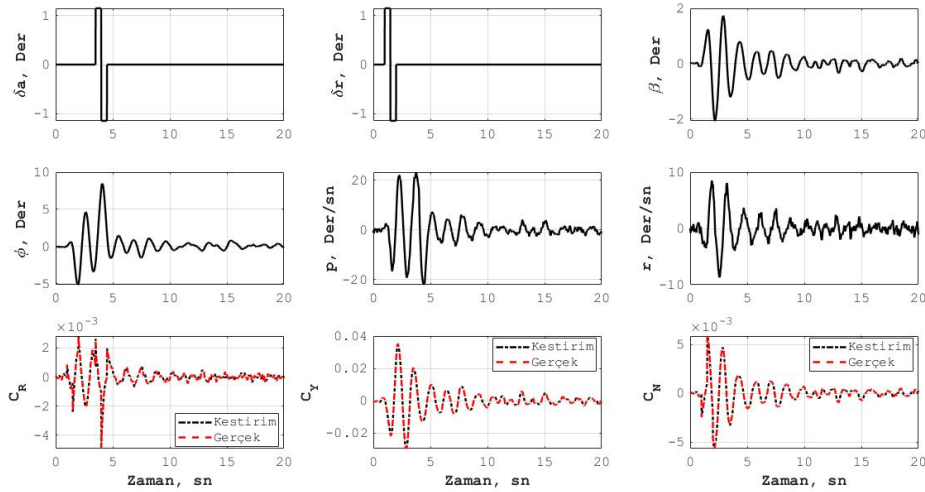
Şekil 8: Atmosferik Türbülans Bloğu

Görüldüğü gibi bloğun girdileri irtifa (H), gerçek hız (V_T) ve yer eksen takımından gövde eksen takımına dönüşüm matrisidir ($DCM_{GY}(\psi, \theta, \phi)$). Çıktılar ise gövde eksen takımındaki doğrusal ve açılal hızlarda oluşan türbülanslardır.

Şekil 9 ve 10 boylamsal ve yanal-yönel ekseninde türbülanslı hava koşullarındaki gerçek ve kestirim sonuçlarını göstermektedir.



Şekil 9: Boylamsal Eksende Türbülanslı Ölçüm Sonuçları



Şekil 10: Yanal-Yönel Eksende Türbülanslı Ölçüm Sonuçları

Hava türbülansının aktif olduğu koşullardaki kuvvet ve moment katsayılarının gerçek ve kestirim değerleri sonuçlarından anlaşılacağı üzere sıradan en küçük kareler kestirim yöntemi yine bire bir doğrulukta sonuçlar vermiştir. Standart sapma değerleri kusursuz koşullardaki ölçüm değerlerine yakın ve R^2 istatistiği değerlerinin hepsi 1 olduğu için Tablo 3'teki değerlerin tekrar yazılmasına ihtiyaç yoktur. Türbülanslı modelin kusursuz modele çok yakın sonuçlar vermesinin sebebi üretilen hava türbülansının beyaz gürültüye (ϵ) sahip olmasıdır ve beklenen değeri sıfırdır ($E[\epsilon] = 0$). Bu bağlamda Denklem 37'nin beklenen değeri ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E[\hat{\theta}] = E[(X^T X)^{-1} X^T Y] = E[(X^T X)^{-1} X^T (X\theta + \epsilon)] = E[\theta] + E[(X^T X)^{-1} X^T \epsilon] \quad (46)$$

Aerodinamik türev vektörü θ 'nın beklenen değeri $E[\theta]$, θ 'nın kendisine eşittir ve bu aşamada bağımsız parametrelerin bulunduğu ölçüm matrisi X herhangi bir hata içermemektedir. Dolayısıyla Denklem 46 aşağıdaki gibi sadeleştirilebilir.

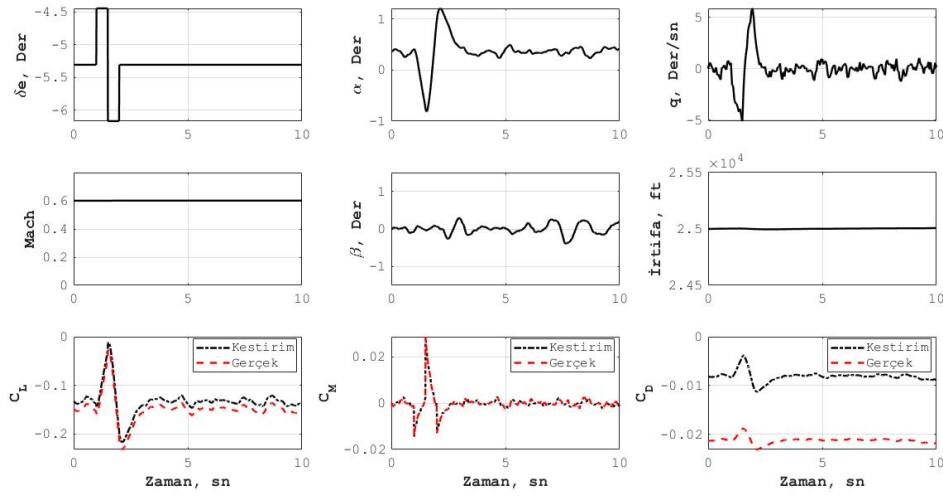
$$E[\hat{\theta}] = \theta + (X^T X)^{-1} X^T E[\epsilon], \quad E[\epsilon] = 0, \rightarrow E[\hat{\theta}] = \theta \quad (47)$$

Denklem 47'de görüldüğü gibi ölçüm matrisi X 'in hata içermediği ve üretilen türbülansın beyaz gürültü ($E[\epsilon] = 0$) ürettiği koşullarda, aerodinamik türev kestirim vektörünün beklenen değeri gerçek aerodinamik türev vektörünün kendisine eşittir ve bias içermez.

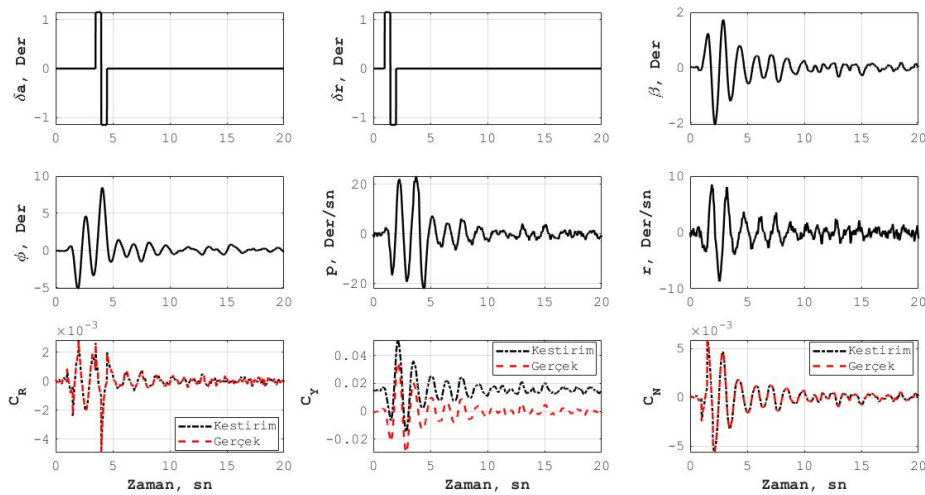
Üçüncü adımda ölçümlerde sistematik sensör hataları olduğu varsayılmıştır ve hatalı ölçüm parametrelerinin uçağın gövde eksen takımındaki doğrusal ivmeleri, açılal hızları, hücum ve kayış açılarını ölçen sensörlerde olduğu kabul edilmiştir. Dolayısıyla modeldeki doğrusal ve rotasyonel eksenler, hücum ve kayış açıları için eşit büyüklüklerdeki Δ hata değerleri aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} \Delta N_x &= 1 \text{ m/sn}^2, & \Delta N_y &= 1 \text{ m/sn}^2, & \Delta N_z &= 1 \text{ m/sn}^2, & \Delta \alpha &= 1 \text{ Der} \\ \Delta p &= 1 \text{ Der/sn}, & \Delta q &= 1 \text{ Der/sn}, & \Delta r &= 1 \text{ Der/sn}, & \Delta \beta &= 1 \text{ Der} \end{aligned} \quad (48)$$

Şekil 11 ve 12' de türbülanslı model ile birlikte bağımsız ölçüm parametrelerine sensör hataları verilmiş ve aerodinamik katsayılar karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar yapılırken Tablo 4'teki ve Şekil 8'deki atmosferik türbülans model bilgileri referans alınmıştır.



Şekil 11: Boylamsal Eksenle Türbülanslı ve Sensör Hatalı Ölçüm Sonuçları



Şekil 12: Yanal-Yönel Eksenle Türbülanslı ve Sensör Hatalı Ölçüm Sonuçları

Sensör hatalarının da eklendiği koşullarda, yöntemin özellikle kuvvet katsayılarındaki gerçek ve kestirim değerlerinde farklılıklar görülmektedir. Bunun yanında şekildeki görsellerden moment katsayılarının sensör hatalarından kuvvet katsayıları kadar etkilenmediği anlaşılmaktadır. Fakat

bağımsız parametrelerin bulunduğu X vektörüne hatalar eklenmesi sonucunda gerçek ve kestirim değerlerinin farkı gözle görünmese bile sistematik sensör hatası aerodinamik türev kestirim sonuçlarını etkileyecektir. Bu bağlamda ölçüm parametrelerinin bulunduğu hatasız X vektörü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$X = X_m - \Delta X \quad (49)$$

Burada X_m ölçülen değişkenleri ve ΔX ise Denklem 48'de verilen sistematik sensör ölçüm hatalarını içerir. Denklem 34 hava türbülansı ϵ ve sistematik hata ΔX için tekrar yazılırsa aşağıdaki gibi olur.

$$Y = (X_m - \Delta X)\theta + \epsilon \quad (50)$$

Denklem 37 baz alınarak Denklem 50'nin her iki tarafı $(X_m^T X_m)^{-1} X_m^T$ ile çarpılabilir.

$$(X_m^T X_m)^{-1} X_m^T Y = (X_m^T X_m)^{-1} X_m^T [(X_m - \Delta X)\theta + \epsilon] \quad (51)$$

Denklem 51'de görüldüğü gibi sol taraf kestirim vektörü $\hat{\theta}$ 'nin kendisine eşittir. Denklem 51'in sağ tarafı da cebirsel olarak düzenlenebilir.

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= (X_m^T X_m)^{-1} X_m^T X_m \theta - (X_m^T X_m)^{-1} X_m^T \Delta X \theta + (X_m^T X_m)^{-1} X_m^T \epsilon \\ &= \theta + (X_m^T X_m)^{-1} X_m^T (\epsilon - \Delta X \theta) \end{aligned} \quad (52)$$

Burada hava türbülansının (ϵ) beklenen değeri sıfırdır ($E[\epsilon] = 0$) ve θ vektöründen bağımsızdır. Dolayısıyla Denklem 52 baz alınarak beklenen değer için çarpımsal kuralı ve beklenen değer için doğrusallığı kuralı uygulanabilir.

$$E[\hat{\theta}] = \theta - E[(X_m^T X_m)^{-1} X_m^T \Delta X] \theta \quad (53)$$

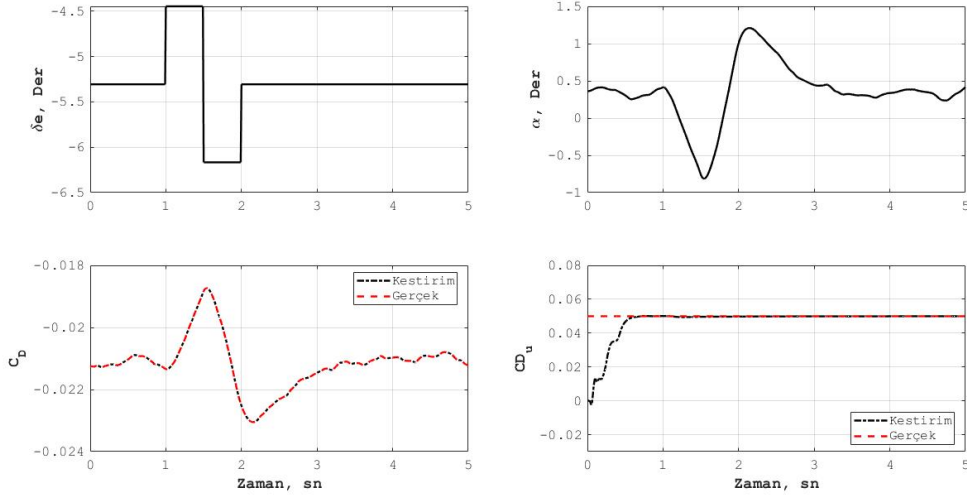
Denklem 53 Denklem 47 ile karşılaştırıldığında Denklem 53'ün bayas içerdiği açıkça görülmektedir. Yani bağımsız değişkenlerin olduğu X matrisine sistematik sensör hatası eklemek aerodinamik kestirim değerlerini doğrudan etkileyecek ve kestirim vektörüne bayas ekleyecektir. Tablo 5'te

Türev	Gerçek	Kestirim	R^2	σ	Türev	Gerçek	Kestirim	R^2	σ
C_{L_0}	0.149	0.0333	0.7730	0.0158	C_{R_0}	0	0.002	1	1.34e-07
C_{L_α}	5.5	5.5133	0.7730	0.1240	C_{R_β}	-0.11	-0.11	1	6.26e-06
C_{L_q}	14.2	14.1813	0.7730	8.3116	C_{R_p}	-0.39	-0.39	1	2.56e-05
C_{L_u}	0.084	0.0829	0.7730	0.1557	C_{R_r}	0.28	0.28	1	3.65e-05
$C_{L_{\delta_e}}$	0.38	0.3791	0.7730	0.1582	$C_{R_{\delta_a}}$	0.1	0.1	1	5.75e-06
C_{M_0}	-0.08	-0.0735	1	1.04e-05	$C_{R_{\delta_r}}$	0.05	0.05	1	4.38e-06
C_{M_α}	-0.24	-0.24	1	8.18e-05	C_{Y_0}	0	0.0334	0.2207	0.0026
C_{M_q}	-27.3	-27.3	1	0.0055	C_{Y_β}	-1	-1.0131	0.2207	0.1219
C_{M_u}	0	0	1	1.03e-04	C_{Y_p}	-0.14	-0.1410	0.2207	0.4980
$C_{M_{\delta_e}}$	-0.88	-0.88	1	1.05e-04	C_{Y_r}	0.61	0.6085	0.2207	0.7099
C_{D_0}	0.0205	0.0034	0.0063	0.0084	$C_{Y_{\delta_a}}$	0	0	0.2207	0.1120
C_{D_α}	0.12	0.2072	0.0063	0.0847	$C_{Y_{\delta_r}}$	0.028	0.028	0.2207	0.0253
C_{D_u}	0.05	0.0517	0.0063	0.1345	C_{N_0}	0	-0.003	0.9871	1.97e-06
$C_{D_{\delta_e}}$	0	0.0025	0.0063	0.0878	C_{N_β}	0.17	0.17	0.9871	9.20e-05
$C_{N_{\delta_a}}$	-0.003	-0.003	0.9871	8.46e-05	C_{N_p}	0.09	0.0948	0.9871	3.76e-04
$C_{N_{\delta_r}}$	-0.12	-0.12	0.9871	6.44e-05	C_{N_r}	-0.26	-0.2596	0.9871	5.36e-04

Tablo 5: Türbülanslı ve Sensör Hatalı Sıradan EKKY Sonuçları

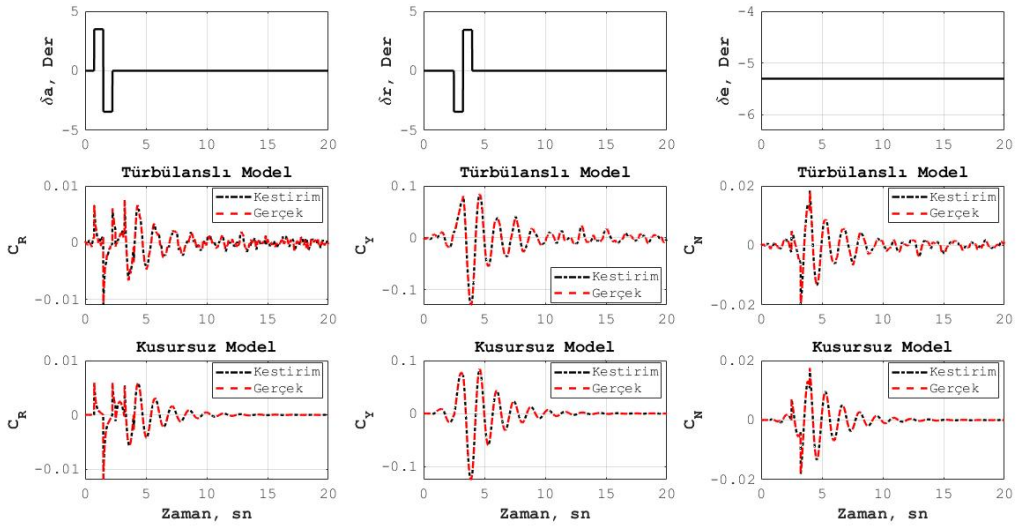
görüldüğü gibi standart sapmalar kusursuz ve türbülanslı koşullara göre artmıştır. R^2 istatistiğine göre sistematik hatadan en çok etkilenen parametre sürüklenme katsayısı olmuştur. Yuvarlanma ve yunuslama katsayıları ise en az etkilenen katsayılar olmuşlardır. Dolayısıyla sıradan EKKY ile yapılan aerodinamik kestirim türevlerinde Denklem 53'te de gösterildiği gibi bayaslı sonuçlar elde edilmiştir.

Yinelenen EKKY Değerlendirmesi: Aerodinamik türev kestirim sonuçlarının dinamik olarak değiştiği bu bölümde sıradan EKKY'de yapılan adımlar takip edilecektir. Yöntemin dinamik değişimine örnek olarak Şekil 13'te $C_{D,u}$ aerodinamik türev kestirimlerinin türbülanslı koşullarda zamana göre nasıl değiştiği görülmektedir.



Şekil 13: Yinelenen EKKY ile Türev Kestirim Örneği

Şekilde de görüldüğü gibi türev kestirim sonucu belli bir süre sonra gerçek değerine bir saniyeden kısa bir sürede yakınsamıştır. İrtifa dümeni girdisi sıradan EKKY'deki ile aynı tutulmuştur. Bir önceki bölümde atmosferik türbülans koşulları ile kusursuz ölçümlerin yapıldığı koşullar arasında en küçük kareler yöntemi kestirimi farkı olmadığı sonucuna varılmıştı (Denklem 47). Bu durum yinelenen EKKY için de geçerlidir ve yanal-yönel eksenlerdeki sonuçlar Şekil 14'te gösterilmektedir.



Şekil 14: Yinelenen EKKY'de Kusursuz ve Türbülanslı Kestirim Performansları

Şekil 14'te verilen türbülanslı model çıktılarında Tablo 4'te verilen türbülansın şiddeti artırılmıştır ($10^{-2} \rightarrow 10^{-4}$). Aynı zamanda sıradan EKKY'de kullanılan girdiler değiştirilmiştir çünkü kestirim sonuçlarında farklılıklar saptanmıştır. Optimum girdiler deneme yanılma yolu ile bulunmuş ve simülasyon çıktıları Şekil 14'teki gibi üretilmiştir. Görüldüğü gibi kuvvet ve moment katsayıları için kestirim değerleri ve gerçek değerler hava türbülansının şiddeti artırılmasına rağmen hem kusursuz hem de türbülanslı modelde birbirleri ile örtüşmektedir. Aerodinamik türev kestirim sonuçlarının sayısal değerleri ise Tablo 6'da verilmektedir.

Türev	K	T	R^2	σ_K	σ_T	Türev	K	T	R^2	σ_K	σ_T
C_{N_0}	0	0	1	1.59e-09	1.42e-09	C_{R_0}	0	0	1	1.95e-09	1.75e-09
C_{N_β}	0.17	0.17	1	1.83e-07	1.49e-07	C_{R_β}	-0.11	-0.11	1	2.24e-07	1.84e-07
C_{N_p}	0.09	0.09	1	7.57e-07	6.33e-07	C_{R_p}	-0.39	-0.39	1	9.25e-07	7.82e-07
C_{N_r}	-0.26	-0.26	1	1.02e-06	8.21e-07	C_{R_r}	0.28	0.28	1	1.24e-06	1.01e-06
$C_{N_{\delta_a}}$	-0.003	-0.003	1	1.74e-07	1.49e-07	$C_{R_{\delta_a}}$	0.1	0.1	1	2.12e-07	1.83e-07
$C_{N_{\delta_r}}$	-0.12	-0.12	1	1.36e-07	1.12e-07	$C_{R_{\delta_r}}$	0.05	0.05	1	1.66e-07	1.38e-07
C_{Y_r}	0.61	0.61	1	2.32e-06	1.86e-06	C_{Y_0}	0	0	1	3.64e-09	3.22e-09
$C_{Y_{\delta_a}}$	0	0	1	3.96e-07	3.37e-07	C_{Y_β}	-1	-1	1	4.18e-07	3.39e-07
$C_{Y_{\delta_r}}$	0.028	0.028	1	3.10e-07	2.54e-07	C_{Y_p}	-0.14	-0.14	1	1.72e-06	1.44e-06

Tablo 6: Yinelenen EKKY için Kusursuz ve Türbülanslı Model Kestirim Karşılaştırması

Tablo 6'da K kusursuz ölçümleri, T türbülanslı ölçümleri, σ_K kusursuz ölçümlerin standart sapmasını ve σ_T türbülanslı ölçümlerin standart sapmasını göstermektedir. R^2 istatistikleri her iki modelde 1'e eşit olduğu için ayrı ayrı verilmemiştir. Ölçümler sıradan EKKY'deki frekans aralığında alınmıştır ve frekans değeri 100 Hz'tir. Tabloda görüldüğü gibi standart sapma değerleri hem kusursuz hem de türbülanslı ölçümler için birbirine yakındır ve kestirim sonuçları bire bir doğru sonuçlar vermiştir. Sıradan EKKY ile fark ise standart sapma değerlerinin yinelenen EKKY'de daha yüksek olmasıdır. Yani 100 Hz'te sıradan EKKY'nin performansı yinelenen EKKY'ye göre daha iyidir. Sonuç olarak sıradan EKKY bölümünde belirtildiği gibi iki modelin kestirim sonuçlarını ayrı tablolarla verme ihtiyacı yoktur.

Boylamsal eksenlerdeki analizlerde girdi tasarımı değiştirilmemiş ve 100 Hz'te sonuçlar alınmıştır. Sıradan EKKY'de verilen girdilerin aynısı bu bölümde de kullanılmıştır fakat yinelenen EKKY kestirimlerinde, boylamsal eksenlerdeki bazı türevlerin gerçek değerlerinden farklılıklar gösterdiği görülmüştür. Bu farklılıkları araştırmak için örnekleme aralığının frekansı 100 Hz'den 50 kHz'e çıkarılmış ve sonuçlar bir kaç örnekle Tablo 7'de paylaşılmıştır.

Türev	100 Hz Örnekleme	50 kHz Örnekleme
C_{L_0}	0.144	0.149
C_{L_q}	10.4	14.2
C_{L_u}	0.069	0.084
$C_{L_{\delta_e}}$	0.33	0.38
C_{M_0}	-0.070	-0.080
C_{M_α}	-0.31	-0.24
C_{M_q}	-20.0	-27.3
C_{M_u}	0.0289	0
$C_{M_{\delta_e}}$	-0.78	-0.88

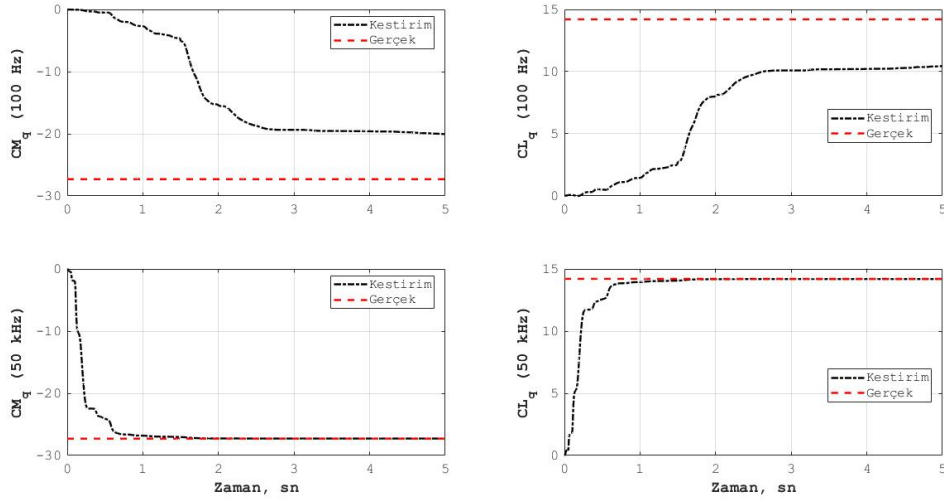
Tablo 7: Farklı Frekanslarda Kestirim Sonuçları

Tablo 7'de görüldüğü gibi örnekleme frekansı artırıldığında yinelenen EKKY'nin performansı artmakta ve kestirim sonuçları türevlerin gerçek değerlerine yakınsamaktadır. Yinelenen EKKY'nin frekansa bağlı olarak yakınsamasının ya da ıraksamasının önemli bir sebebi unutma faktörü (λ) olarak isimlendirilen bir katsayıdır ve Denklem 41'de verilen kazanç matrisi formülünde 1 olarak alınmıştır.

$$K(k+1) = \frac{P(k)x(k+1)}{\lambda + x^T(k+1)P(k)x(k+1)}$$

Denklemin paydasında görülen unutma faktörü maksimum 1 olarak alınmaktadır ve λ 'nın maximum değeri bir önceki adımı tamamen göz ardı ettiği anlamına gelir. Eğer λ değeri 1'den küçük olursa kestirim yönteminin artık veri setindeki bir önceki adımları hesaba kattığı söylenebilir. Dolayısıyla frekansı 100 Hz'te olan veri setinde bir önceki adımları tamamen göz ardı etmek yöntemin yakınsadığı değeri etkileyecektir. Unutma faktörü 1 olan bir yaklaşımda frekansı artırmak örnekleme sayısını artırmak anlamına gelir ve örnekleme aralıklarındaki "unutulan" bilgi kaybının büyüklüğü azalır.

Şekil 15'te ise yinelenen EKKY kestirim performansının 100 Hz'te ve 50 kHz'teki sonuçları C_{M_q} ve C_{L_q} özelinde gösterilmektedir.



Şekil 15: Farklı Frekanslarda Yinelenen EKKY Kestirim Performansı

Sonuçlar boylamsal eksendeki gerçek değerinden farklı tüm kestirim türevleri için yüksek frekanstaki ölçümlerde Şekil 15'teki gibi gerçek değerlerine yakınsamaktayken, 100 Hz'teki ölçüm sonuçlarında gerçek değerlerinden farklı bir noktaya yakınsadığı görülmüştür.

Şimdiye kadar kusursuz ve türbülanslı modellerde yinelenen EKKY kestirim sonuçları paylaşılmış, gerçek değerlerde görülen farklar örnekleme frekansının artırılmasıyla giderilmiş ve tüm kestirim sonuçları gerçek değerlere yakınsamıştır. Üçüncü adımda, türbülanslı modele sensör ölçüm hataları eklenmiş ve türev kestirim sonuçları Tablo 8'de verilmiştir.

Türev	Gerçek	Kestirim	R^2	σ	Türev	Gerçek	Kestirim	R^2	σ
C_{L_0}	0.149	0.0333	0.8711	7.61e-04	C_{R_0}	0	0.002	1	9.03e-09
C_{L_α}	5.5	5.5134	0.8711	0.0058	C_{R_β}	-0.11	-0.11	1	4.17e-07
C_{L_q}	14.2	14.1659	0.8711	0.4178	C_{R_p}	-0.39	-0.39	1	1.71e-06
C_{L_u}	0.084	0.0829	0.8711	0.0156	C_{R_r}	0.28	0.28	1	2.48e-06
$C_{L_{\delta_e}}$	0.38	0.3789	0.8711	0.0076	$C_{R_{\delta_a}}$	0.1	0.1	1	3.72e-07
C_{M_0}	-0.08	-0.0734	1	5.22e-07	$C_{R_{\delta_r}}$	0.05	0.05	1	2.72e-07
C_{M_α}	-0.24	-0.24	1	3.99e-06	C_{Y_0}	0	0.0334	0.3573	0.0026
C_{M_q}	-27.3	-27.2	1	2.86e-04	C_{Y_β}	-1	-1.0130	0.3573	0.1219
C_{M_u}	0	0	1	1.07e-05	C_{Y_p}	-0.14	-0.1405	0.3573	0.4980
$C_{M_{\delta_e}}$	-0.88	-0.88	1	5.23e-06	C_{Y_r}	0.61	0.6087	0.3573	0.7099
C_{D_0}	0.0205	0.0034	0.012	0.0084	$C_{Y_{\delta_a}}$	0	0	0.3573	0.1120
C_{D_α}	0.12	0.2071	0.012	0.0847	$C_{Y_{\delta_r}}$	0.028	0.028	0.3573	0.0253
C_{D_u}	0.05	0.0509	0.012	0.1345	C_{N_0}	0	-0.003	0.9870	1.33e-07
$C_{D_{\delta_e}}$	0	0.0025	0.012	0.0878	C_{N_β}	0.17	0.17	0.9870	6.17e-06
$C_{N_{\delta_a}}$	-0.003	-0.003	0.9870	5.51e-06	C_{N_p}	0.09	0.0948	0.9870	2.54e-05
$C_{N_{\delta_r}}$	-0.12	-0.12	0.9870	4.03e-06	C_{N_r}	-0.26	-0.2597	0.9870	3.67e-05

Tablo 8: 50 kHz'de Türbülanslı ve Sensör Hatalı Yinelenen EKKY Sonuçları

Tabloda görüldüğü gibi X vektörüne sistematik sensör hataları eklenmesi durumunda yinelenen ve sıradan EKKY kestirim sonuçları birbirlerine benzer çıkmıştır (Tablo 5 ve Tablo 8). Bunun yanında frekansın artırılmasıyla birlikte yinelenen EKKY'nin standart sapma ve R^2 istatistiğinin sıradan EKKY'ye göre daha iyimser sonuçlar verdiği görülmüştür. Ayrıca Denklem 53'te verilen bayaslı sonucun kestirim çıktılarında etkisi yinelenen EKKY çıktılarında da görülmektedir.

SONUÇ

Aerodinamik veritabanı lineer uzayda çalışan altı serbestlik dereceli bir uçuş benzetim modeli ile sıradan ve yinelenen EKKY kullanılarak türevlerin parametre kestirimleri yapılmıştır. Modelde kullanılan aerodinamik bloğunun içerisinde bulunan türevlerin uçağın gerçek karakterini yansıttığı kabul edilmiş ve sonuçlar bu değerlerle karşılaştırılmıştır. İlk analiz aşamasında sıradan ve yinelenen EKKY için kusursuz ve türbülanslı modellerin bire bir doğrulukta sonuçlar verdiği görülmüştür ve sonuçlar kestirim denklemlerinin beklenen değer formülleriyle desteklenmiştir. Dolayısıyla sıradan ve yinelenen EKKY kestirim süreçlerine beklenen değeri sıfır olan bir beyaz gürültü eklenirse iki yöntemin performansının etkilenmediği ve gerçeğe yakınsayan sonuçlar verdiği görülmüştür. Düşük frekanslı analizlerde, sıradan EKKY'nin yinelenen EKKY'ye göre kusursuz ve türbülanslı modellerde daha iyi performans sergilediği görülmüştür. Aynı zamanda örnekleme frekansının yinelenen EKKY performansını doğrudan etkilediği görülmüştür. İkinci olarak girdi tasarımının her iki yöntem için de önemli olduğu sonucuna varılmıştır. Yinelenen EKKY için yanal-yönel eksenlerdeki girdi şekli kestirim sonuçlarını gerçeğe yakınsatmak için tekrar tasarlanmıştır. Boylamsal ekseninde girdi şekilleri hem sıradan hem de yinelenen kestirim yöntemleri için aynı bırakılmış fakat yinelenen EKKY kestiriminde gerçek değerden farklı sonuçlar elde edilmiştir. Çözüm olarak örnekleme frekansı artırılmış ve yinelenen EKKY'nin kestirim performansı da artarak kestirim değerlerinin gerçeğe yakınsadığı görülmüştür. Üçüncü olarak X vektörlerine sistematik ölçüm hataları (ΔX) eklendiğinde sonuçların bayaslı çıktılar verdiği sonucuna varılmıştır. Sonucu desteklemek için kestirim denklemlerindeki X vektörüne sistematik hata verilerek beklenen değer formülleri oluşturulmuş ve sistematik ölçüm hatalı model çıktıları beklenen değer formüllerinin sonuçları ile doğrulanmıştır. Aynı zamanda sistematik ölçüm hatalarının olduğu kaşullarda yinelenen EKKY'nin frekansı artırıldığında (50 kHz) sıradan EKKY'e göre daha iyimser sonuçlar verdiği ve performansının arttığı gözlemlenmiştir.

Kaynaklar

- Atmosphere, U. S., 1976. *US standard atmosphere.*, National Oceanic and Atmospheric Administration
- Etkin, B., 2012. *Dynamics of atmospheric flight.*, Courier Corporation
- Grauer, J. A., 2016. *Parameter uncertainty for aircraft aerodynamic modeling using recursive least squares.*, In AIAA atmospheric flight mechanics conference (p. 2009)
- Greenberg, H., 1951. *A survey of methods for determining stability parameters of an airplane from dynamic flight measurements.*, No. NACA-TN-2340
- Jategaonkar, R. V., 2006. *Flight vehicle system identification: a time domain methodology.*, American Institute of Aeronautics and Astronautics
- Kamali, C., Pashilkar, A. A., ve Raol, J. R., 2011. *Evaluation of recursive least squares algorithm for parameter estimation in aircraft real time applications.*, Aerospace science and technology, 15(3), 165-174.
- Millidere, M., Karaman, U., Uslu, S., Kasnakoglu, C., ve Cimen, T., 2020. *Newton-raphson methods in aircraft trim: A comparative study.*, AIAA AVIATION 2020 FORUM (p. 3198).
- Morelli, E., 2006. *Practical aspects of the equation-error method for aircraft parameter estimation.*, AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit (p. 6144).
- Morelli, E. A., ve Klein, V., 2016. *Aircraft system identification: theory and practice.*, Williamsburg, VA: Sunflyte Enterprises., Vol. 2
- Roskam, J., 1998. *Airplane flight dynamics and automatic flight controls.*, DARcorporation
- Stevens, B. L., Lewis, F. L., ve Johnson, E. N., 2015. *Aircraft control and simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems.*, John Wiley-Sons
- The MathWorks Inc., 2021. *Getting Started with MATLAB, Version 2021b.*, Natick, Massachusetts, 2021.