

KOMPOZİT MALZEMELERDE KIRILMA MEKANİĞİNİN PERİDİNAMİK İLE MODELENMESİ

Erhan Haliloğlu Celiloğlu¹ ve Demirkan Çöker²
Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara

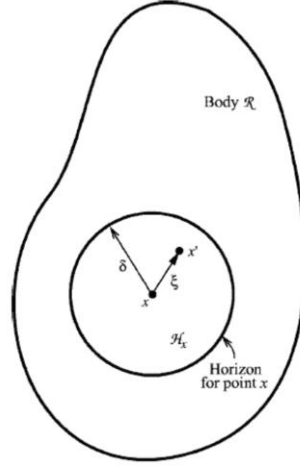
Mehmet Dördüncü³
Erciyes Üniversitesi, Kayseri

ÖZET

Havacılık endüstrisinde sıkça kullanılan kompozit malzemeler, tasarım ve üretim aşamasına geçmeden önce bir çok farklı deneye tabii olurlar. Bu deneyler genellikle elde edilen kompozit malzemenin özelliklerini ve malzeme sisteminin dayanımı belirlemede hayati rol oynar. Bu deneylerin numerik yöntemlerle desteklenmesi hem deney maliyetlerinin azaltılması, hem de tasarım geometrisine uygun analizlerin yapılması gibi önemli faydalar sağlayabilir. Peridinamik modeller bunun gibi uygulamalara uygun numerik yöntemlerden biridir. Bu çalışmada, durum bazlı peridinamik formülasyonlar ile kurulan modellerin statik, malzeme yönü ve hasar oluşumunu yakalayabilme kabiliyetleri gösterilmiştir.

GİRİŞ

Yerel olmayan bir sürekli ortamlar mekaniği teorisi olan Peridinamik, ilk kez (Silling S. , 2000)'de ele alınmış, çoğunlukla malzemelerin deformasyon ve kırılma davranışlarını matematiksel olarak modellemede kullanılmaktadır. Ortam içerisindeki çatlak gibi süreksizlikler, integral denklemler kullanılarak ele alınabilir. Ağlardan bağımsız sadece malzeme noktalarının birbirleriyle etkileşimleriyle ilgilenen bu yöntemde, integraller her malzeme noktasının etki alanı içerisindeki komşulukları ele alır. Bu etki alanları, δ yarıçaplı küresel hacimler olarak ele alınabilir. Sürekli bir ortamdaki bir noktanın etki alanı Şekil 1'de gösterildiği gibidir.



Şekil 1 : Peridinamik etki alanı

Her bir malzeme noktası için lineer momentum dengesi (1)'de gösterildiği gibi ele alınır. Vektörel nicelikler kalın yazı ile vurgulanmıştır. Bu vektör denkleminde verilen integral ifadesi, x noktasına etkiyen kuvvetlerin yoğunluğunun toplamını temsil ederken, \mathbf{b} vektörü noktaya etkiyen dış kuvvetlerin yoğunluğunu temsil eder. Eşitliğin solu ise, x noktasının kütesel kuvvetinin yoğunluğunu temsil eder.

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \int_{\mathcal{H}_x} \mathbf{f} d\mathcal{H}_x + \mathbf{b} \quad (1)$$

¹Yük. Lisans Öğr., Havacılık ve Uzay Müh. Böl., E-posta: erhan.celiloglu@metu.edu.tr

²Prof. Dr., Havacılık ve Uzay Müh. Böl., E-posta: coker@metu.edu.tr

³Doç. Dr., Makine Mühendisliği Böl., E-posta: dorduncu@erciyes.edu.tr

(Silling, Epton, Weckner, Xu, & Askari, 2007)'de vektör durumları ve durum bazlı peridinamik ele alınmış ve lineer elastik malzeme modeli açıklanmıştır. Benzer bir şekilde (Madenci & Öterkuş, 2017)'de durum bazlı peridinamik ilerletilerek çeşitli yapısal problemler analitik karşılıklarıyla kıyaslanmıştır.

Bu bildiriye, (Madenci & Öterkuş, 2017)'de verilen peridinamik malzeme modelleri ve çözüm yöntemleri ele alınarak kompozit malzemelerin kırılma mekaniğine uygulanmıştır. Statik deformasyon davranışları analitik karşılıklarıyla kıyaslanmış, çift konsol kirişi deneyi ile çatlak ilerlemesi modellenmiştir.

YÖNTEME GENEL BAKIŞ

Durum bazlı peridinamik modeller kullanılarak k noktasında hareket denkleminin numerik formu (2)'de verildiği gibidir.

$$\rho_k \dot{\mathbf{v}}_k = \sum_{j=1}^{N_k} (\mathbf{t} - \mathbf{t}') V_j + \mathbf{b}_k \quad (2)$$

Toplam içerisinde verilen \mathbf{t} ve \mathbf{t}' vektörleri, k ve j noktalarının birbirlerine etkileyen kuvvet yoğunluklarını temsil ederler ve durum bazlı peridinamik modellerinde zıt yönlüdürler. Bu iki kuvvetin büyüklükleri (Madenci & Öterkuş, 2017)'te aşağıda verilen denklemlerle modellenebilir.

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2} A \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}, \quad A = 4 \frac{\delta}{|\mathbf{x}|} \left[ad \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \theta_k + b(|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}|) \right] \quad (3)$$

$$\mathbf{t}' = -\frac{1}{2} B \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}, \quad B = 4 \frac{\delta}{|\mathbf{x}|} \left[ad \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \theta_j + b(|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}|) \right] \quad (4)$$

$$\theta_k = \sum_{j=1}^{N_k} d|\mathbf{y}| \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} V_j \quad (5)$$

(3) ve (4)'te verilen a,b, ve d parametreleri peridinamik malzeme modeli için gerekli olan parametreler. Vektör ifadeleri olan \mathbf{x} ve \mathbf{y} ise k ve j noktalarının referans ve deforme durumlarındaki göreceli konum vektörlerini temsil eder. A ve B büyüklüklerini iki ifadenin toplamı olarak edilmiş olup, θ ile verilen ifade dilatasyonel ve $|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}|$ ile verilen ifade distorsiyonel nicelikleri temsil eder. Malzeme yönlülüğü, klasik süreklilik mekaniği modellerinde de olduğu gibi, distorsiyonel nicelik üzerinden uygulanır ve b parametresi üzerinden yönetilebilir.

Hasar modelleri, en basit haliyle, yeni bir çatlak yüzeyinin oluşması için gereken ortalama uzama miktarı üzerinden hesaplanabilir. Bu yöntem, kritik uzama olarak (Silling S. , 2000)'de anlatılmış olup uygulaması direk olarak noktaların etkileşimlerini, geri dönüşü olmadan, elemek şeklinde gerçekleştirilir. Matematiksel olarak, hafızada tutulan hasar parametresi, $\mu_{(k)(j)}$, k ve j noktaları arasındaki her bir etkileşim ifadesi ile çarpılı ve hasar durumuna göre 1 veya 0 değerlerini alır.

Hareket denklemi,(2), direk olarak zamana bağlı olarak çözülebilirken, çoğu yapısal problem statik olarak zamandan bağımsız ele alınabilir. Numerik bir yöntem olarak, uyarlanabilir dinamik rahatlama yöntemi (Madenci & Öterkuş, 2017)'te direk olarak hareket denklemlerine uygulanmış. Neticede, yinelemeli bir süreç içerisinde aşağıdaki ifadeler her bir yeni adımda hesaplanarak problem kararlı hale rahatlatılarak ilerletilir. Hızlı bir yakınsama için kütle ve sönümlenme ile ilgili değerler her adımda uyarlanır.

$$\dot{U}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(2 - c^n)\dot{U}^{n-\frac{1}{2}} + 2\Delta t D^{-1} F^n}{2 + c^n \Delta t} \quad (6)$$

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \dot{U}^{n+\frac{1}{2}} \quad (7)$$

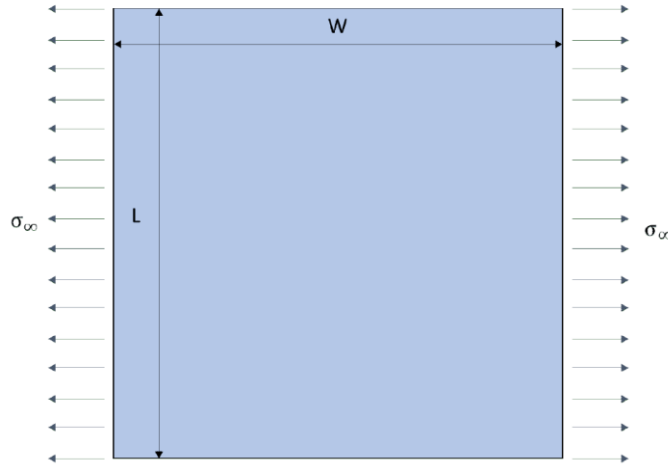
Yineleme sürecinin kararlı hale ulaşmasının kontrolü, her bir adımda uygun görülen noktaların cevaplarına bakılarak kontrol edilebilir. Eğer ki cevaplar görece önceki adımlara göre çok küçük değişimler içerisinde ise, yineleme süreci sonlandırılır.

ÖN SONUÇLAR

Durum bazlı peridinamik modelleme ile çeşitli kıyaslama problemleri çözülmüştür. Bu kıyaslama problemleri ile, geliştirilen programın yineleme adımları sonunda yakınsama, malzeme yönlülüğünü yakalama ve hasar modelleme kabiliyetlerinin kıyaslanması hedeflenmiştir.

Statik izotropik davranış

Statik izotropik davranış kıyaslaması, çekme gerilimi altındaki bir plakanın analitik çözümü ile yapılmıştır. Benzer kıyaslama, (Madenci & Öterkuş, 2017)'de bağ bazlı peridinamik programı için de kullanılmıştır. Çekme gerilimi altındaki plakanın yükleme ve geometri tanımı Şekil 2'de



Şekil 2 : Çekme Gerilimi Altındaki Plaka Geometrisi

verilmiştir.

Şekil 2'deki değişkenler ve izotropik malzeme özellikleri Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1 : Çekme Gerilimi Altındaki İzotropik Plaka Problemi Özellikleri

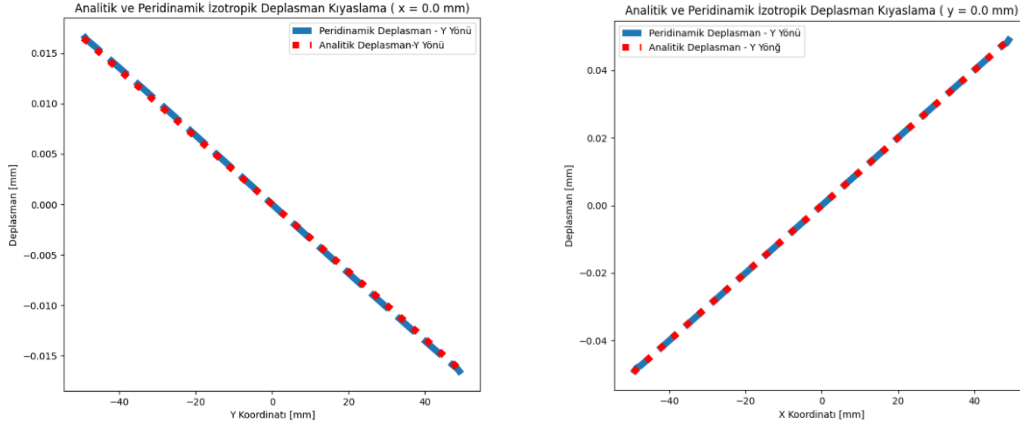
Genişlik, W	100 [mm]
Uzunluk, L	100 [mm]
Kalınlık, t	1 [mm]
Young Modülü, E	200 [GPa]
Poisson Oranı, ν	1/3 [-]
Çekme Gerilimi, σ _∞	200 [MPa]

Çekme gerilimi altındaki bir plakanın deplasmanı analitik olarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

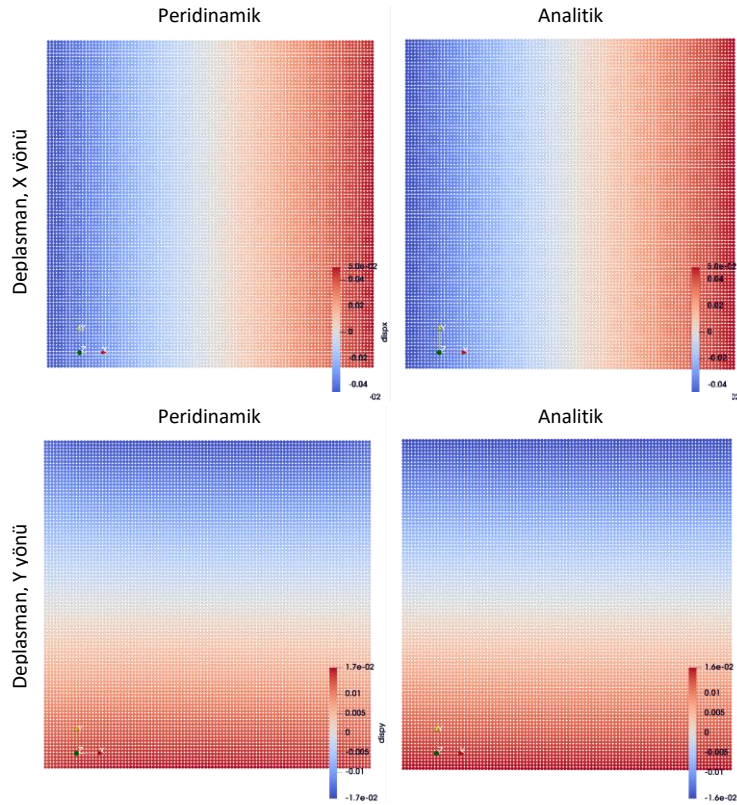
$$\vec{u}(x, y) = \frac{\sigma}{E}(x\hat{i} - vy\hat{j}) \quad (8)$$

Peridinamik ve analitik çözümlerin kıyaslamaları Şekil 3 ve Şekil 4'de verilmiştir. Şekil 3'te $x=0$ ve $y=0$ kesitlerinde deplasman dağılımlarının benzerliği gösterilmiştir. Şekil 4'te ise, bütün plaka üzerindeki deplasman dağılımının benzerliği gösterilmiştir.

Bu kıyaslamalar neticesinde, kullanılan peridinamik model ve yinelemeli çözüm başarılı bir şekilde analitik çözümü yakalayabilmiştir.



Şekil 3 : İzotropik Modelin $x=0$ ve $y=0$ Kesitlerinde Deplasman Kıyaslamaları



Şekil 4 : İzotropik Plakanın Çekme Gerilimi Altında Davranışı, Peridinamik ve Analitik

Statik ortotropik davranış

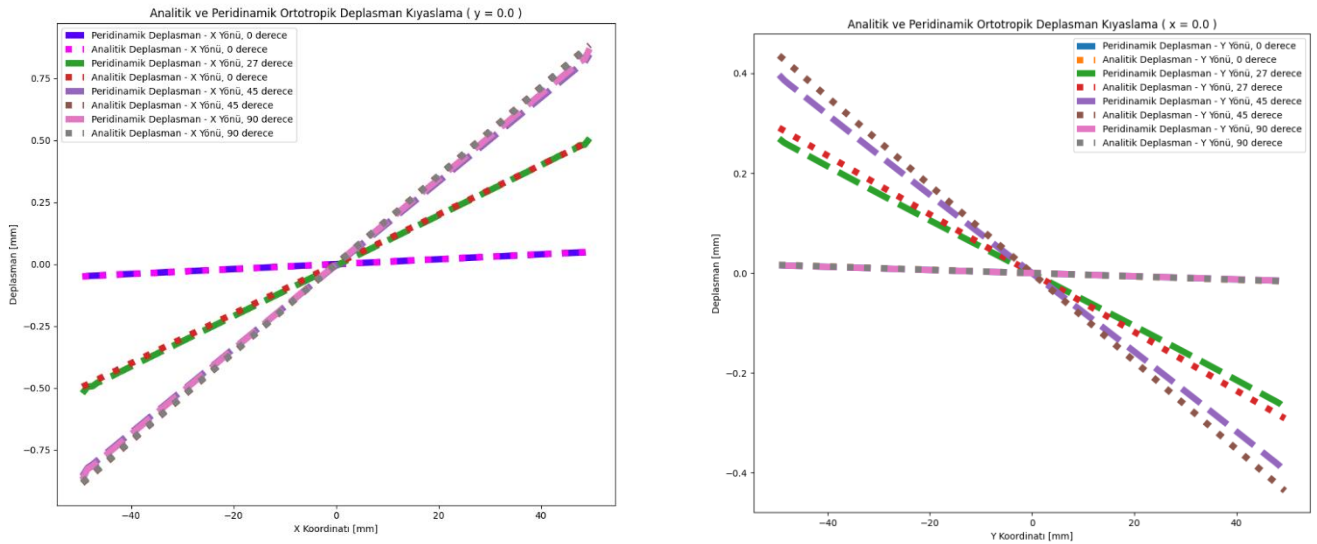
İzotropik malzeme davranışında olduğu gibi, ortotropik davranış da çekme gerilimi altındaki plaka probleminin analitik çözümü ile kıyaslanmıştır. Bu kıyaslama sonucunda, geliştirilen peridinamik modelin malzeme yönlülüğünü de yakaladığını göstermek amaçlanmıştır.

Problem geometrisi, Şekil 2'deki gibidir. Geometrik ve malzeme özellikleri, ortotropik problem için Tablo 2'deki gibidir.

Tablo 2 : Çekme Gerilimi Altındaki Ortotropik Plaka Problemi Özellikleri

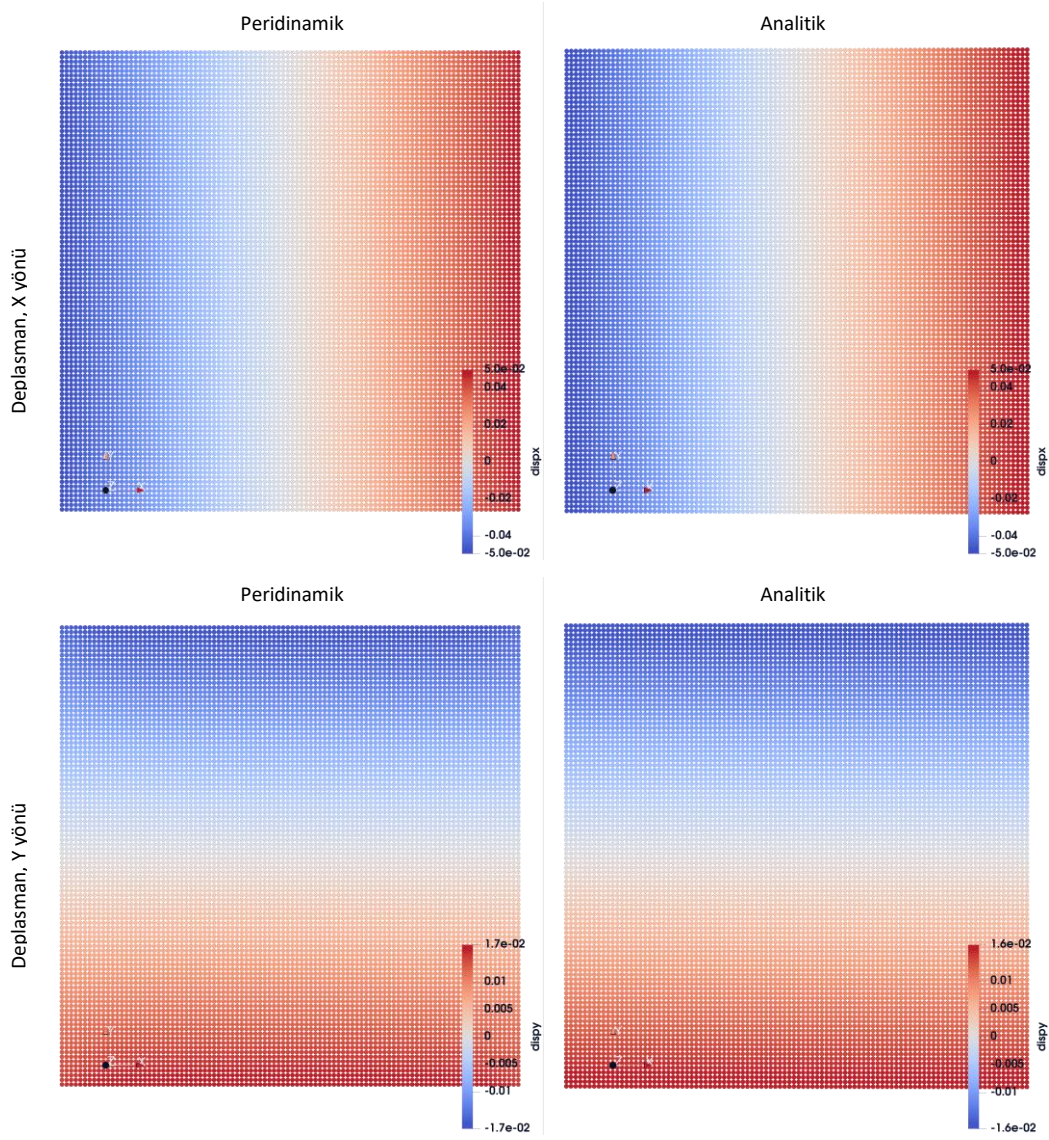
Genişlik, W	100 [mm]
Uzunluk, L	100 [mm]
Kalınlık, t	0.18 [mm]
Young Modülü (1 yönü), E_{11}	160 [GPa]
Young Modülü (2 yönü), E_{22}	9 [GPa]
Kayma Modülü, G_{12}	3 [GPa]
Poisson Oranı, ν_{12}	1/3 [-]
Çekme Gerilimi, σ_{∞}	160 [MPa]

İzotropik kıyaslamada olduğu gibi, $x=0$ ve $y=0$ kesitlerindeki deplasman cevapları analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır. 0, 27, 45, ve 90 derecelik açılarda oluşturulan ortotropik modellerin kıyaslaması Şekil 5'deki gibidir. Kıyaslamalarda da görüldüğü gibi, kullanılan ortotropik peridinamik modelinin davranışları analitik çözümlerle uyumlu.



Şekil 5 : Ortotropik Modelin $x=0$ ve $y=0$ Kesitlerinde ve 0, 27, 45, 90 Derecelerde Deplasman Kıyaslamaları

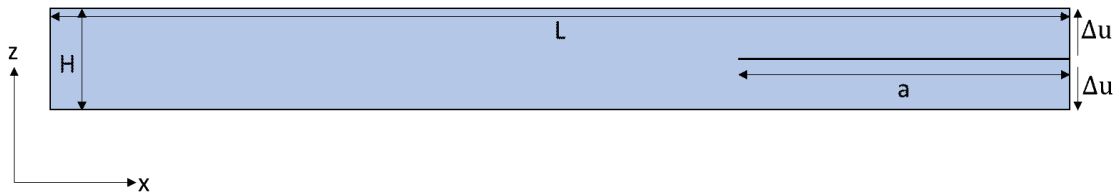
Bütün plaka üzerindeki deplasman dağılımı, 0 dereceli ortotropik model için Şekil 6'de verilmiştir. Peridinamik modelin deplasman cevabı, bütün plakada analitik çözüm ile uyumlu bir şekilde dağılmıştır. Sonuç olarak, kullanılan durum bazlı peridinamik model ortotropik malzeme davranışını analitik çözümlerle tutarlı bir şekilde yakalayabilmektedir.



Şekil 6 : 0 Dereceli Ortotropik Plakanın Çekme Gerilimi Altında Davranışı, Peridinamik ve Analitik

Çift konsol kiriş problemi

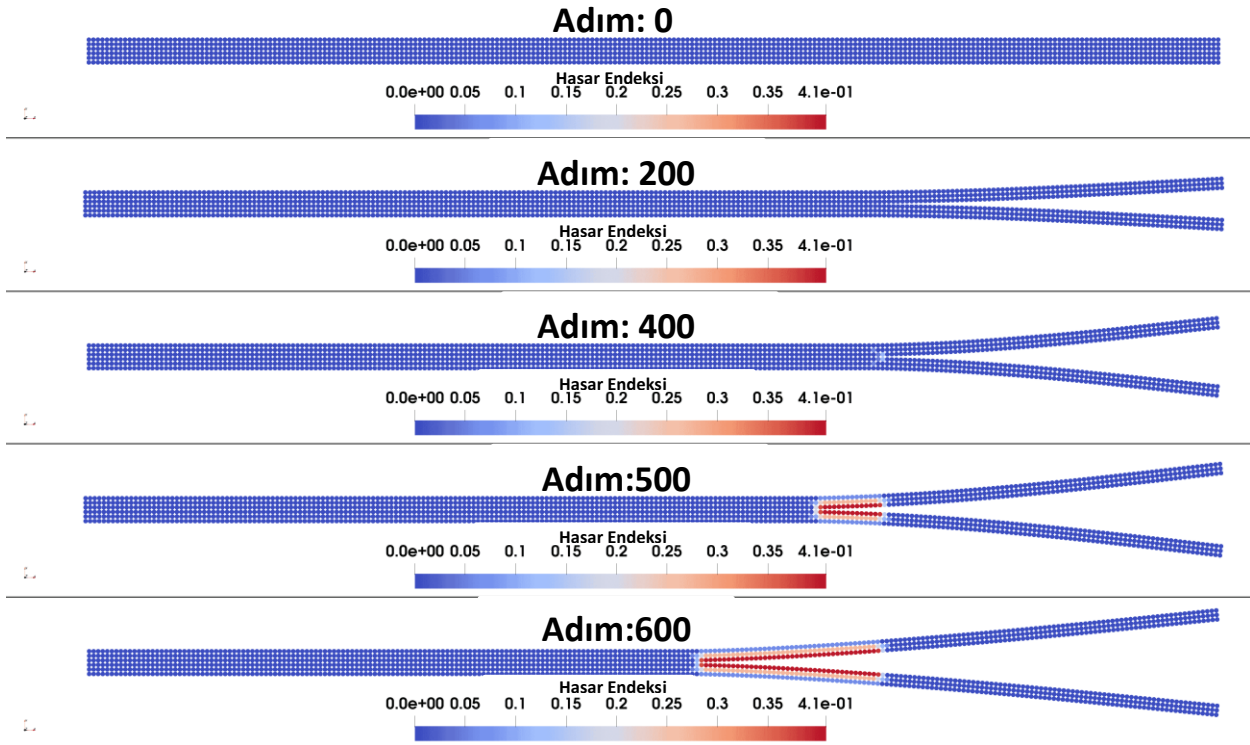
Kullanılan bağ bazlı peridinamik modelin, hasar modelleyebilme kabiliyeti için çift konsol kiriş problemi modellenmiştir. Çift konsol kiriş problemi için geometri ve yükleme durumu Şekil 7'de gösterildiği gibidir.



Şekil 7 : Çift Konsol Kiriş Problemi Geometrisi

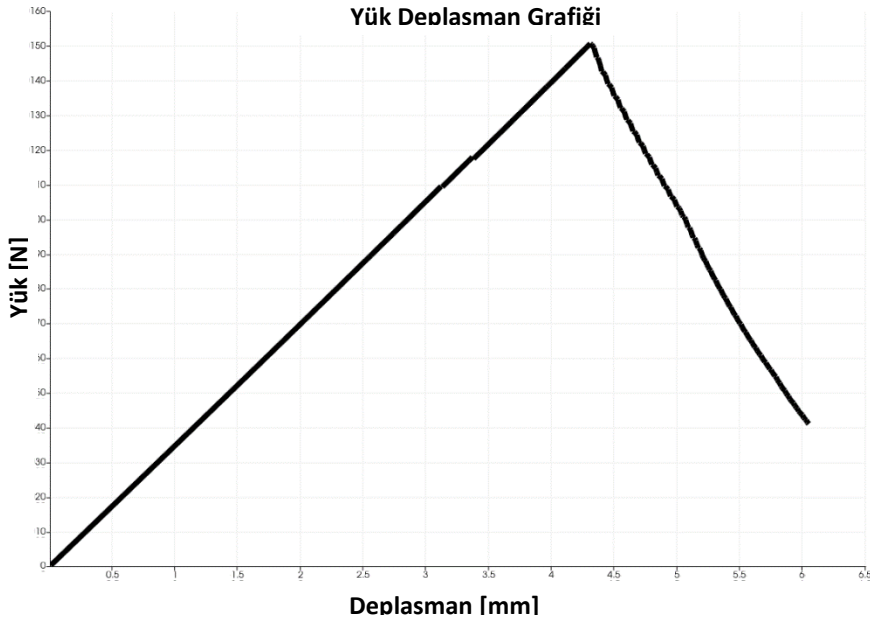
Şekil 7'de, a uzunluğundaki yarığın yarattığı 2 kiriş, açılacak şekilde (mod I) Δu deplasmanlarına maruz kalmaktadır. Peridinamik modelde, oluşan hasarı modellemek için kritik uzama kriteri kullanılmıştır ve elyaf özelliği gösteren bağlarda hasar modellenmemiştir.

Yapılan peridinamik analiz sonucunda oluşan hasar ilerlemesi, yineleme adımları boyunca Şekil 8'de gösterildiği gibidir.



Şekil 8 : Çift konsol kiriş probleminde yineleme adımları boyunca hasar endeksi

Hasar oluşuktan ve yarık ilerlemeye başladıktan sonra, kirişlerin uygulanan deplasmana verdiği reaksiyon kuvvetlerindeki düşüş Şekil 9'de gösterildiği gibidir.



Şekil 9 : Çift konsol kiriş probleminin yük deplasman grafiği

SONUÇ

Sonuç olarak, geliştirilen durum bazlı peridinamik modeller, kompozit malzemelerin statik, malzeme yönlülüğü ve hasar mekanizmalarını yakalayabilmektedir. İleriki aşamalarda, deney sonuçları ile de kıyaslama yapılması ön görülmektedir.

Kaynaklar

- Madenci, E., & Öterkuş, E. (2017). *Peridynamic Theory and Its Applications*.
- Silling, S. (2000). Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 175-209.
- Silling, S. A., Epton, M., Weckner, O., Xu, J., & Askari, E. (2007). Peridynamic States and Constitutive Modeling. *J Elasticity*, 88, 151-184.