

ENTROPİK LATTİCE BOLTZMANN YÖNTEMİNİN HARİCİ AKIŞ PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

B. Tuğcan SELİMHOCANOĞLU¹
Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara

Prof. Dr. Yusuf ÖZYÖRÜK²
Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara

ÖZET

Farklı Lattice Boltzmann Yöntemleri arasında Entropik Lattice Boltzmann Yöntemi özellikle sıkıştırılabilir rejimdeki akışları çözmek için revaçta bir durumdur. Yöntemin ana mantığı, çarpışma adımını yarı-denge koşulunu da içerecek şekilde iki parçaya bölerek, çift dağılım fonksiyonunun entropi kısıtı altında yüksek dereceli çok hızlı örgüler üstünde açılması üstüne kuruludur. ELBM, doğası gereği zamana bağlı ve direkt bir çözüm yöntemidir. Bu makale, yöntemin temelini, matematiksel altyapısını ve uygulamasını kısaca içermektedir. Ana odak, küre etrafındaki ses üstü akış gibi doğrulama çalışmaları üzerinden yöntemin kabiliyetlerinin gösterimi üzerinedir. ELBM yönteminin yüksek başarılı çözüm kümesi üzerinde verimliliği de incelenmiştir.

GİRİŞ

Lattice Boltzmann Yöntemi, ayrıklaştırılmış Boltzmann denklemi üzerine kurulan bir Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği yöntemidir. Yoğunluk, momentum gibi büyük ölçekli korunum değişkenlerine dayanan Navier-Stokes denklemlerine nazaran, LBM mezoskopik seviyede hayali akışkan parçacıklarının yerel hareket ve çarpışmaları üstüne odaklanır. LBM, sıkıştırılmaz rejimdeki akışlar konusunda, akustik çalışmalar dahil, çok etkin olsa da [Chen ve Doolen 1998; Naffouti, 2013], sıkıştırılabilir rejimdeki akışlar konusunda evrensel olarak kullanılan bir yaklaşım halen çalışılmaktadır. [Ansumali vd. 2005; Chikatamarla ve Karlin 2006]

Son zamanlarda geliştirilen Entropik Lattice Boltzmann Yöntemi (ELBM) bu sorunu ele almak için yüksek potansiyel göstermektedir. [Frapolli 2017]. Yöntemin ana mantığı, çarpışma adımını yarı-denge koşulunu da içerecek şekilde iki parçaya bölerek, çift dağılım fonksiyonunun entropi kısıtı altında yüksek dereceli çok hızlı örgüler üstünde açılması üstüne kuruludur. ELBM, doğası gereği zamana bağlı ve direkt bir çözüm yöntemidir. Entropi kısıtı, ayrıklaştırılmış Boltzmann entropi fonksiyonunun çizgisel olmayan denklem çözme yöntemleriyle çözülmesiyle elde edilen entropik açılma değişkeninin çarpışma adımına dahil edilmesiyle uygulanır. [Bösch, Chikatamarla, ve Karlin 2015]

Çalışmanın ana amacı, ELBM yöntemini küre etrafında ses üstü akış gibi farklı doğrulama koşullarına uygulayarak sonuçları detaylı olarak incelemektir. Bu amaçla, yöntemin temeli, örgü tipi seçimi, sınır koşulları ve matematiksel altyapısı anlatılmaktadır.

YÖNTEM

Yöntemin Çatısı

Entropik LBM için kullanılan ana denklemler aşağıdaki gibidir 0:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) - f_i(\mathbf{x}, t) = \alpha\beta_1(f_i^* - f_i) + 2\beta_2(f_i^{eq} - f_i^*) \quad (1)$$

$$g_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) - g_i(\mathbf{x}, t) = \alpha\beta_1(g_i^* - g_i) + 2\beta_2(g_i^{eq} - g_i^*) \quad (2)$$

Burada f_i ve g_i kullanılması planlanan çift dağılım fonksiyonlarının kendileridir. f_i tüm korunum denklemleriyle ilişkiliyken (yoğunluk, momentum, enerji), g_i daha çok enerji denklemiyle ilintidir. (3) ve (5) numaralı denklemler arasında detaylarıyla aktarılan, f_i^* , g_i^* ve f_i^{eq} , g_i^{eq} ifadeleri ise sırasıyla yarı-denge ve denge durumundaki dağılım fonksiyonlarını ifade etmektedir. β_i , Prandtl sayısına direkt olarak bağlı olan bağımsız açılma değişkenleriyken, \mathbf{c}_i is yöntem içerisinde kullanılan örgü

yönleridir. Entropik açılma değişkeni, α , azami açılma miktarını temsil etmektedir. Yöntemin ana özelliklerinden biri olan bu değişken, yüksek Re sayısına sahip olan ya da sıkıştırılabilir rejimdeki akışlarda oluşabilecek salınımların ve büyük gradyanların dengelenmesine yardımcı olmaktadır.

Denge dağılım fonksiyonu f_i^{eq} ise MinPack [More, Garbow, ve Hillstrom 1980] kütüphanesi içinde yer alan Powell Dogleg yöntemiyle l , m and n değişkenlerinin çözümüyle elde edilir:

$$f_i^{eq} = \rho w_i e^{(1+m\alpha c_i\alpha + nc_i^2)} \quad (3)$$

Bu denklemlerin sağ tarafında yer alan boyutsuz korunum denklemleri ise aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\rho = \sum_{i=0}^{n_V} f_i^{eq} \quad \rho \mathbf{u} = \sum_{i=0}^{n_V} \mathbf{c}_i f_i^{eq} \quad D\rho T + \rho \mathbf{u}^2 = \sum_{i=0}^{n_V} c_i^2 f_i^{eq} \quad (4)$$

g_i^{eq} ise, f_i^{eq} kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$g_i^{eq} = (2C_v - D)Tf_i^{eq} \quad (5)$$

Denklemlerde n_V seçilen örgü tipine göre ortaya çıkan toplam örgü yönü sayısını, D çözülen yöntemin boyut sayısını, T ise boyutsuz sıcaklık oranını ifade etmektedir. Denklem (3)'da yer alan örgü yönü dağılımları, w_i , seçilen örgü tipine göre değişir. (c_i). Transonik ve ses üstü akışlar için $DdQ7^d$ örgü tipi önerilmektedir. [Frapolli 2017]

Yöntemi uygulamanın başlangıç adımı, yoğunluk (ρ) gibi bir değişkene rastgele bir değer atayıp, geriye kalan tüm değişkenleri, çözüm koşulunu ilgilendiren M , Re , Pr ve γ_{ad} boyutsuz parametrelere göre hesaplamaktır. Daha sonrasında, algoritma yalnızca 3 adet basit adımın yinelenmesiyle devam ettirilir:

- Dağıtma Adımı: Örgü yönlerine göre (c_i) dağılım fonksiyonlarının komşu düğümlere yayılması
- Sınır Koşulu Adımı: Sınır koşulu uygulanması gereken düğümlerdeki (duvar, giriş, çıkış vb.) bilinmeyen dağılımların daha sonraki bölümlerde açıklanacak yöntemlere göre güncellenmesi
- Çarpışma adımı: Çarpışma işlecine göre (1) ve (2) nolu denklemlerin sağ tarafının hesaplanması

Entropik Açılma Çarpanının (α) Hesaplanması

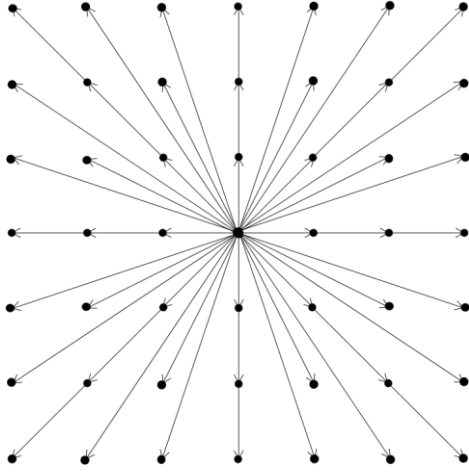
Entropik açılma değişkeni, α , ayrıklaştırılmış entropi fonksiyonunun, $H(f + \alpha(f^{eq} - f)) = H(f)$ koşulunu sağlayacak azami açılma miktarını temsil etmektedir. Entropi kısıtı, aşağıda verilen ayrıklaştırılmış entropi fonksiyonunun çözümüyle uygulanır:

$$H(f) = \sum_{i=0}^{n_V} f_i \ln \left(\frac{f_i}{w_i} \right) \quad (6)$$

Örgü Tipi Seçimi

Sıkıştırılabilir rejimdeki ELBM için yüksek dereceli çoklu-hızlı örgü tipleri kullanılmalıdır. [Karlin ve Asinari 2010] Ayrık örgü hızları aşağıda verilen Maxwell-Boltzmann dağılım fonksiyonunun momentlerinin ne kadar iyi temsil edildiğine bağlıdır. Entropik denge durumu kısıtının sıkıştırılabilir akışlarda yeterince doğru uygulanabilmesi için tek boyutta asgari örgü hızı sayısı $n = 7$ 'dir. Dolayısıyla, transonik ya da ses üstü rejimdeki çözümler için $D1Q7, D2Q7^2, D3Q7^3$ örgü tipleri kullanılacaktır. Örnek olarak, $D2Q7^2$ örgüsü bu bölümde anlatılmaktadır. $D2Q7^2$ örgüsü, $D1Q7$

örgüsünden türetilmiştir; tek boyutta hız takımı ise $V_7 = (0, \pm 1, \pm 2, \pm 3)$ 'dir. 2 boyutta ($D2Q7^2$, Şekil 1) tüm hız takımının elde edilmesi için aşağıdaki gibi kendisiyle tensör çarpımı yapılır.



Şekil 1. D2Q7² örgü tipi

Bu örgü tipi için, referans sıcaklık, $T_0 = 0.697654$ olarak elde edilir. Tek boyutta V_7 hız takımının ağırlıkları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 + \frac{-49T + 42T^2 - 15T^3}{36} \\ w_{\pm 1} &= \frac{12T - 13T^2 + 5T^3}{16} \\ w_{\pm 2} &= \frac{-3T + 10T^2 - 5T^3}{40} \\ w_{\pm 3} &= \frac{4T - 15T^2 + 15T^3}{720} \end{aligned} \quad (7)$$

Sınır Koşulunun Uygulanması

Düğüm Sınıflandırması: Sıkıştırılabilir rejimdeki ELBM için kullanılan sınır koşulları, aslen referans [Dorschner vd. 2016]'da verilen sıkıştırılmaz sınır koşullarından türetilir. Sınır koşulları için ilgilenilen dağılım fonksiyonları, f_i ve g_i , iki gruba ayrılır: \bar{D} , duvarlardan akışkan hacmine yönelen örgü hızlarını temsil ederken, D , akışkan hacminden duvarlara yönelen örgü hızlarını temsil etmektedir. \bar{D} tarafından temsil edilen örgü hızlarına denk gelen dağılım fonksiyonları bilinmemektedir ve yayılma adımından önce tanımlanmalıdır. \bar{D} tarafından tanımlanan sınır koşulu düğümleri de iki kategoriye bölünebilir: duvara en yakın düğümleri ifade eden x_w , ve duvara en yakın düğümlere en yakın olan x_{wf} . Düğümleri sınıflandırmak için aşağıdaki ölçüt kullanılır:

$$\text{eğer } \max\left(\frac{|r_i|}{c_i^2}\right) \leq 1 \ \& \ c_i^2 \leq D, \text{ for } i \in \bar{D} \rightarrow x_w \quad (8)$$

$$\text{eğer } \max\left(\frac{|r_i|}{c_i^2}\right) \leq 1 \ \& \ c_i^2 \not\leq D, \text{ for } i \in \bar{D} \rightarrow x_{wf} \quad (9)$$

Bu denklemlerde, r_i , ilgili düğümle duvar kesişim noktası arasındaki örgü yönündeki (c_i) mesafedir.

Bilinmeyen Dağılım Fonksiyonlarının Hesaplanması: Seçilen denge ve yarı-denge dağılım fonksiyonlarından oluşan, birinci dereceden Chapman-Enskog çözümüyle elde edilen denklemler aşağıdaki gibidir:

$$f_i^{miss} = f_i^{eq}(\rho_{tgt}, \mathbf{u}_{tgt}, T_{tgt}) + f_i^{(1)}(\rho_{tgt}, \mathbf{u}_{tgt}, T_{tgt}, \nabla \mathbf{u}_{tgt}, \nabla T_{tgt}) \quad (10)$$

$$g_i^{miss} = g_i^{eq}(\rho_{tgt}, \mathbf{u}_{tgt}, T_{tgt}) + g_i^{(1)}(\rho_{tgt}, \mathbf{u}_{tgt}, T_{tgt}, \nabla \mathbf{u}_{tgt}, \nabla T_{tgt}) \quad (11)$$

Bu denklemlerde, $\rho_{tgt}, \mathbf{u}_{tgt}, T_{tgt}, \nabla \mathbf{u}_{tgt}, \nabla T_{tgt}$ sırasıyla hedef yoğunluk, hız, sıcaklık ve hız ile sıcaklık gradyanlarını temsil etmektedir. Hedef değişkenlerin belirlenmesi, sınır koşulunun uygulanmasına bağlı olup, daha sonraki bölümde anlatılacaktır.

Hedef Değerlerin Belirlenmesi: Sınır koşulu uygulaması sırasında kullanılan hedef değerler, giriş, çıkış, duvar vb. sınır koşulunun cinsine bağlıdır. Giriş sınır koşulu için sınırdaki tüm değerler zaten tanımlı ve bilinmektedir. Duvar sınır koşulunda, sadece x_w düğümleri için hedef değerler belirlenir; x_{wf} için bir önceki zaman adımında elde edilen değişkenler kullanılır. Diğerlerinden farklı olarak çıkış sınır koşulunda, sınır koşulu uygulanması gereken dağılım fonksiyonları bir önceki zaman adım

dağılım fonksiyonları olarak alınır. Sıcaklık ve hız gradyanları hesaplanırken geçmiş zaman adımıdaki değerlere dayalı merkezlenmiş türev yöntemi kullanılır.

x_w düğümlerinde Kaymaz ve Sabit Sıcaklıklı Duvar Sınır Koşulları için Hedef Değerlerin Belirlenmesi: Kaymaz duvar sınır koşulu için, x_w duvar düğümlerinde ρ, u, T hedef değerlerine ihtiyaç vardır. Hedef yoğunluk değeri, f dağılım fonksiyonlarına “geri-sekme” kuralının uygulanmasıyla elde edilir; bilinmeyen dağılımlar, ilgili örgü yönünde “geri-seken” dağılımlarla tanımlanır. ($c_i = -c'_i$) x_w düğümlerindeki hedef hız vektörü u_{tgt} ve hedef sıcaklık T_{tgt} değerlerini elde etmek için ilgili örgü yönündeki duvar kesişim noktası, $x_{s,i}$ ile komşu akışkan düğümlerindeki hızlar arasında bir iç kestirim uygulanır. Burada $n_{\bar{D}}, |c_i^2| \leq D, i \in \bar{D}$ koşulunu sağlayan bilinmeyen dağılım fonksiyonlarının toplam sayısını ifade eder. Gereken hız ve sıcaklık gradyanları ise duvar düğümüyle duvarın kendisi arasında gerçekleştirilen yarı ikinci dereceli bir türev kestirme yöntemiyle hesaplanır.

Kayar ve Isı İletmeyen Duvar Sınır Koşulları için Hedef Değerlerin Belirlenmesi: Kaymalı ve ısı iletmeyen duvar sınır koşulları için yoğunluk, hız ve sıcaklık için dik yönde (∂S yüzeyi için n) akı yok koşulu uygulanır. Bu koşulları sağlamak için, dik yönde yoğunluk, hız ve sıcaklık değişimleri, doğrusal iç kestirme yöntemiyle değerlendirilir. Bu değerlendirme, ilk olarak iki boyut için sabit $|n| = \sqrt{2}$, üç boyut için $|n| = \sqrt{3}$ uzaklığında yer alan bir N son noktasının ilgili duvar düğümünden (A) ilk nokta olacak şekilde belirlenmesiyle başlar. Diğer iç kestirme noktaları (B, C, D) ise tüm düğümler arasındaki dik mesafelerin her zaman 1 olduğu düşünülürken kolayca elde edilebilir. Dikkat edilmesi gereken noktalardan biri, A düğümü bir aynı zaman adımı içerisinde güncellenmiş olsa da sınır koşulunu uygulamak için bir daha güncellenmesi gerekliliğidir. N noktasındaki ilgilenilen değişkenler (ζ_N) bulunduktan sonra, dik yöndeki türevlerin hesaplanması için birinci dereceden bir yöntem kullanılır. Bu noktada, hedef değeri bulmak için $\zeta_N = \zeta_A$ yaklaşımı uygundur. ($\zeta_{tgt} = \zeta_A$) Kayar bir duvar için gerekli teğet hızlar ise, x_w 'deki hızların ($u(x_w)$) yüzeye dik yönde (∂S) yansıtılmasıyla elde edilir.

YÜKSEK BAŞARIMLI PERFORMANS DEĞERLENDİRMESİ

ELBM, önceki zaman adımlarının sonuçlarını doğrudan kullanabildiği, matris çözümü için hesaplamalı yöntemlere gerek duymayan, yalnızca aynı zaman adımı içinde düğümler arasında basit bilgi aktarımı ihtiyacı olan bir yöntemdir. Bu sebeple, OpenMPI ile gerçekleştirilecek yüksek başarımlı uygulamalarına oldukça uygundur. İşlemciler arası veri paylaşımının önceden belirlenerek hesaplama süresini kısaltmak için bilgi aktarımı yapılması gereken düğümler ve yönler önceden belirlenerek, her işlemcinin sorumlu olduğu düğümler arasında veri alışverişi yapılması sağlanır.

ELBM yönteminin yüksek başarımlı sistemde performansının elde edilmesi için aşağıda da doğrulama sonuçları verilen 7500x5200 boyutunda, giriş, çıkış ve duvar sınır koşulları tanımlanan, iki boyutlu NACA0012 profili etrafındaki harici akış problemi kullanılmıştır. Bu koşulda, her zaman adımında 1.9 milyar kayar nokta işlemi ($7500 \times 5200 \times 7^2$) yapılması gerekmektedir. 100 örgü zaman adımı koşturulmuş ve tüm sonuçlar her düğümü 36 çekirdek olan yüksek başarımlı sistem için, bir işlemci performansına göre verilmiştir; 360 çekirdeğe (10 düğüm) kadar deneme yapılmıştır. Çözüm hacminin çekirdek ayrışımı olabildiğince işlemciler arası iletişim süresini kısaltacak şekilde elle verilmiştir.

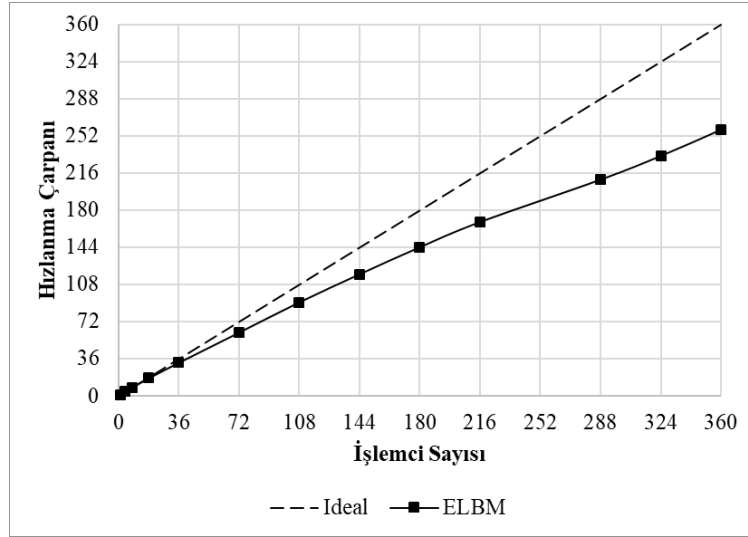
Sonuçlara göre (Şekil 2), 108, 216 ve 360 çekirdek için sırasıyla %85, %80 ve %72 olarak elde edilen paralelleştirme verimi, geliştirmeye açık olsa da ELBM'nin yüksek başarımlı sistemdeki performansının yeterli olduğunu ifade etmektedir.

ÇÖZÜMLER

NACA0012 Etrafında Ses Üstü Akış

ELBM yönteminin doğrulama amacıyla denemesi için, $M = 1.5, Re = 10000$ ve 0° hücum açısı koşulunda NACA0012 kanat profili etrafında ses üstü akış denemesi gerçekleştirilmiştir; doğrulama

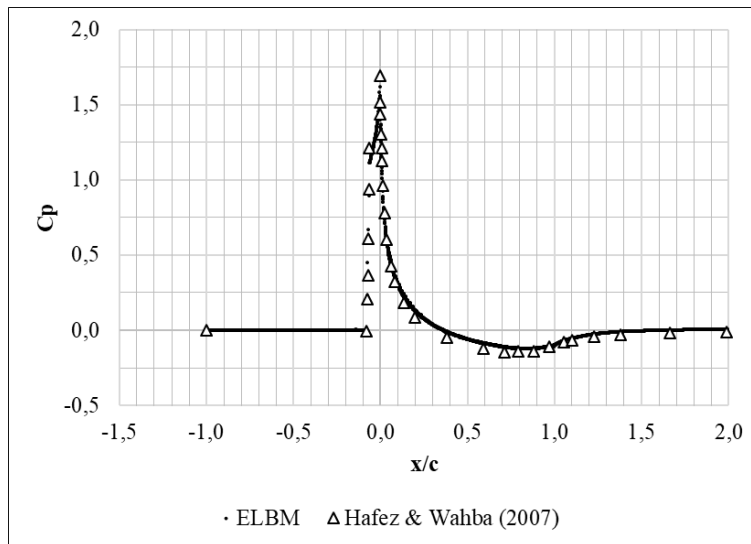
profil önünde, etrafında ve arkasında bulunan basınç katsayısı dağılımları üzerinden yapılmaktadır. [Hafez ve Wahba 2007] Bu amaçla, 7500x5200 boyutunda eşit aralıklı (Kartezyen) bir küp çözüm hacminde, veteri 825 örgü boyutunda olan bir geometri oluşturulmuştur. Çözüm hacmi açısından, akışın önünde giriş, arkasında ve yanlarında ise çıkış sınır koşulu tanımlanmıştır. Profilin duvar sınır



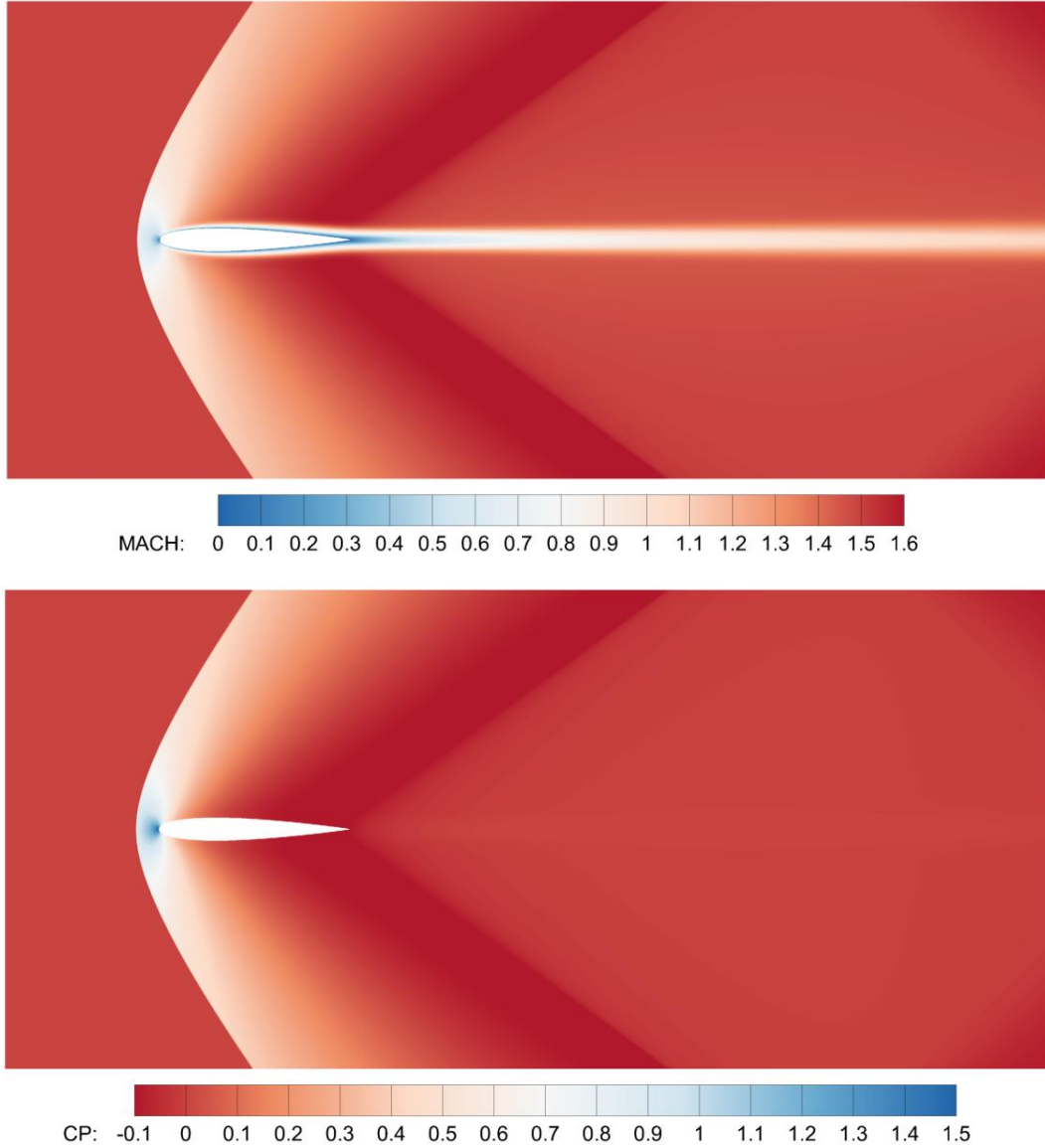
Şekil 2. ELBM kodunun yüksek başarılı sistemde performans eğrisi

koşulu ise sabit sıcaklıklı kaymaz duvar sınır koşuludur. Elde edilen sonuç zamandan bağımsız olduğu için hesaplamalar sonuçlar değişmeyene kadar gerçekleştirilmiştir.

Profil etrafındaki akış alanı (Şekil 3) incelendiğinde akış alanının fiziksel olduğu görülmektedir; akışın durma noktası önünde oluşan yay şeklindeki keskin şok, duvar etrafındaki sınır tabaka akışı ve profilin arkasındaki iz akımından kaynaklı momentum eksilmesinin hepsi çözümde elde edilmiştir. Referans veriler üzerinden yapılan karşılaştırma Şekil 4'de verilmektedir; ELBM sonuçları şok konumu, profil etrafı ve iz akımının basınç dağılımları açısından referans sonuçlar ile üst üste elde edilmektedir.



Şekil 3. NACA0012 profili etrafında basınç dağılımının referans ile karşılaştırılması

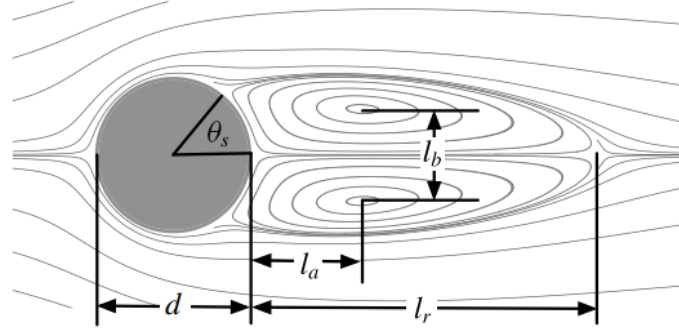


Şekil 4. NACA0012 profili etrafında ses üstü akış için merkez düzlemde Mach dağılımı (üst) ve basınç dağılımı konturları (alt)

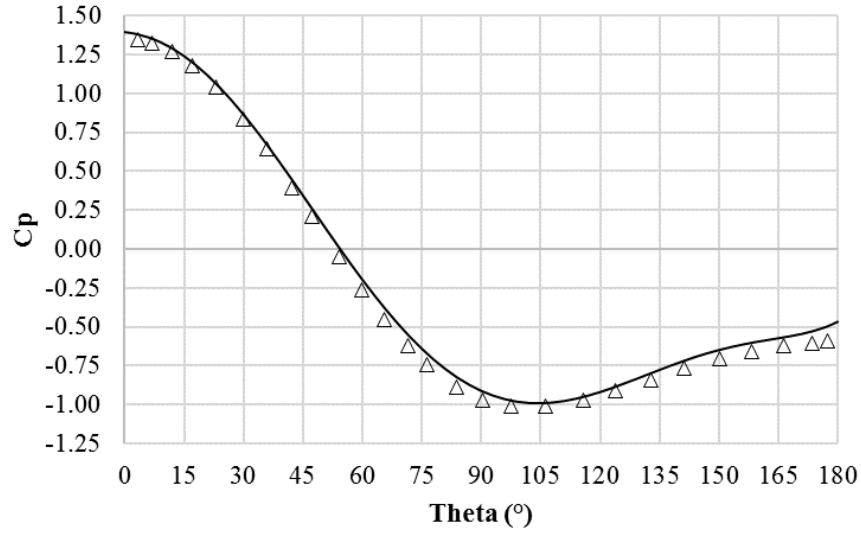
Düşük Sıkıştırılabilir Rejimde Silindir Etrafında Akış

Doğrulama koşulu, [Canuto ve Taira 2015] tarafından elde edilen Direk Sayısal Simülasyon (DNS) sonuçlarına dayanmaktadır. Bu sonuçlar, $M = 0.3, 0.4$ ve 0.5 ile $Re = 20$ ve 40 değerlerinde arasında elde edilmiştir. Düşük Re simülasyonları zamandan bağımsız bir akış alanına karşılık gelmektedir; Re değerleri kritik Reynolds sayısının ($Re_c \sim 47$) altındadır. Bu koşullarda, basınç katsayısı dağılımı ve iz akımı özellikleri bilgisi (Şekil 5) mevcuttur.

Kritik Reynolds sayısı altında kalan zamandan bağımsız akış alanına sahip $Re = 40$ koşuluna kadar gerçekleştirilen düşük sıkıştırılabilir rejimdeki analizlerin sonuçları, iz akımı özellikleri cinsinden Tablo 1'de, silindir etrafındaki basınç katsayıları cinsinden Şekil 6'te, akış alanlarının incelenmesi için $M = 0.5$ için örnek olarak verilen Mach konturları olarak da Şekil 7'de verilmiştir. Basınç dağılımı sonuçlarına göre, akışın koptuğu nokta ve akış kopması olan tüm noktalarda, ELBM referans dağılımı ufak farklarla yakalayabilmiştir. Burada görülen ufak farklar, iz akımı özellikleri sonuçlarına da azami %5 farklılık olacak şekilde yansımıştır. ELBM ile elde edilen iz akımı özellikleri, referansta görülen Re ve M trendlerini göstermektedir. Akış alanı açısından ise ELBM akışın durma noktası, silindir etrafındaki iz akımı gibi fiziksel özellikleri yakalamıştır.

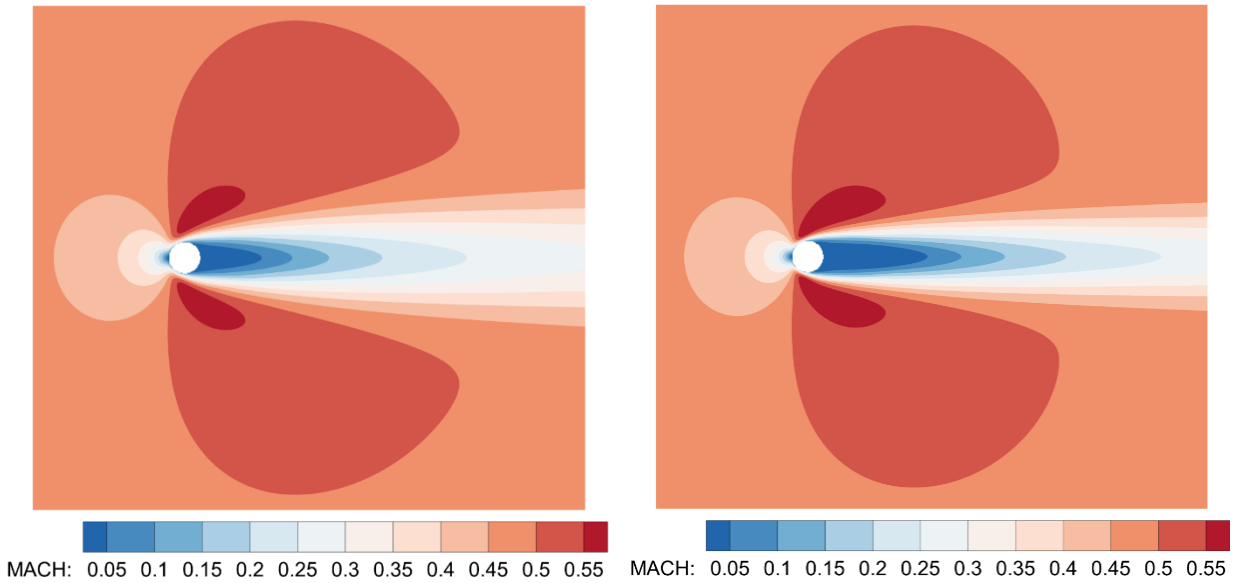


Şekil 5. Silindir etrafında oluşan zamandan bağımsız akış için iz akımı özellikleri



Δ Canuto & Taira (2015) — ELBM

Şekil 6. $M = 0.5, Re = 40$ koşulu için silindir etrafındaki basınç dağılımının referans sonuçlarla karşılaştırılması



Şekil 7. Zamandan bağımsız ($M = 0.5, Re = 20$ sol, $Re = 40$ sağ) koşullar için verilen Mach konturları

Tablo 1. Zamandan bağımsız akış alanı için ELBM ile referans sonuçlarının iz akımı özellikleri cinsinden karşılaştırılması

| Re | M_∞ | l_a/d | | l_b/d | | l_r/d | |
|------|------------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|
| | | Ref. | ELBM | Ref. | ELBM | Ref. | ELBM |
| 20 | 0.3 | 0.362 | 0.341 | 0.428 | 0.451 | 0.940 | 0.971 |
| | 0.4 | 0.365 | 0.363 | 0.429 | 0.421 | 0.954 | 0.993 |
| | 0.5 | 0.367 | 0.338 | 0.428 | 0.432 | 0.963 | 0.962 |
| 40 | 0.3 | 0.736 | 0.758 | 0.602 | 0.598 | 2.34 | 2.30 |
| | 0.4 | 0.752 | 0.767 | 0.609 | 0.592 | 2.43 | 2.37 |
| | 0.5 | 0.769 | 0.787 | 0.614 | 0.602 | 2.53 | 2.50 |

SONUÇ

Çalışma, Entropik Lattice Boltzmann yönteminin temelini, matematiksel altyapısını ve uygulamasını kısaca içermektedir; ek olarak yüksek başarımlı performans denemeleri yöntemin kolayca ve verimli bir şekilde paralel bir şekilde çalışabildiğini ortaya koymuştur. ELBM yönteminin kabiliyetlerini araştırabilmek için NACA0012 etrafında ses üstü akış ve düşük sıkıştırılabilir rejimde silindir etrafındaki akış doğrulama koşulları seçilmiş ve detaylı olarak incelenmiştir. Tüm bu doğrulama koşullarının sonuçlarına göre, ELBM sıkıştırılabilir rejimde beklenen şok, iz akımı özellikleri, akış kopması gibi tüm fiziksel etkileri doğru bir şekilde yakalayabilen kabiliyetli bir yöntemdir.

Kaynaklar

- Ansumali, S., S. Arcidiacono, S. Chikatamarla, N. I. Prasianakis, A. N. Gorban, ve I. V. Karlin. 2005. "Quasi-Equilibrium Lattice Boltzmann Method". 139:135-39. doi: 10.1140/epjb/e2007-00100-1.
- Bösch, Fabian, Shyam S. Chikatamarla, ve Ilya V. Karlin. 2015. "Entropic multirelaxation lattice Boltzmann models for turbulent flows". *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 92(4):1-15. doi: 10.1103/PhysRevE.92.043309.
- Canuto, Daniel, ve Kunihiko Taira. 2015. "Two-dimensional compressible viscous flow around a circular cylinder". *Journal of Fluid Mechanics* 785:349-71. doi: 10.1017/jfm.2015.635.
- Chen, Shiyi, ve Gary D. Doolen. 1998. "Lattice Boltzmann method for fluid flows". *Annual review of fluid mechanics* 30(1):329-64. doi: 10.1146/annurev.fluid.30.1.329.
- Chikatamarla, Shyam S., ve Iliya V. Karlin. 2006. "Entropy and Galilean invariance of lattice Boltzmann theories". *Physical Review Letters* 97(19):1-4. doi: 10.1103/PhysRevLett.97.190601.
- Dorschner, B., N. Frapolli, S. S. Chikatamarla, ve I. V. Karlin. 2016. "Grid refinement for entropic lattice Boltzmann models". *Physical Review E* 94(5). doi: 10.1103/PhysRevE.94.053311.
- Frapolli, N. 2017. "ENTROPIC LATTICE BOLTZMANN MODELS FOR THERMAL AND COMPRESSIBLE FLOWS". 12-19. doi: 10.3929/ethz-a-010782581.
- Hafez, Mohamed, ve Essam Wahba. 2007. "Simulations of viscous transonic flows over lifting airfoils and wings". *Computers & Fluids* 36(1):39-52. doi: 10.1016/j.compfluid.2005.07.002.
- Karlin, Ilya, ve Pietro Asinari. 2010. "Factorization symmetry in the lattice Boltzmann method". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 389(8):1530-48. doi: 10.1016/j.physa.2009.12.032.
- More, J., B. Garbow, ve K. Hillstrom. 1980. *User guide for MINPACK-1. [In FORTRAN]*. Argonne, IL (United States). doi: 10.2172/6997568.
- Naffouti, Taoufik, Jamil Zinoubi, ve Rejeb Ben Maad. 2013. "Lattice boltzmann analysis of 2-D natural convection flow and heat transfer within square enclosure including an isothermal hot block". *International Journal of Thermal Technologies* 3(4):146-52.