

UZAKLIK DEĞİŞİMİ VE AÇI VERİSİ TEMELLİ TEK KÖKLÜ YÖRÜNGE ÖN BELİRLEME YÖNTEMİ GELİŞTİRİLMESİ

Majd Ajroudi¹
Yıldırım Beyazıt Üniversitesi,
Ankara

İbrahim Arda²
Dikko Ladan-Baki³
Habib Ghanbarpourasl⁴
Çetin Şentürk⁵
Tahsin Çağrı Şişman⁶
Türk Hava Kurumu
Üniversitesi, Ankara

ÖZET

Daha önceki çalışmamızda [Ladan-Baki vd., 2019] “Yalnızca Açık Verisi İle Yörünge Ön Belirleme” yöntemlerinden (bu noktadan sonra “sadece-açık yöntemleri” olarak adlandırılacaktır) olan Laplace yöntemini Doppler ölçümünden elde edilen uzaklık değişimi verisinin katkısı ile değiştirerek analitik bir denklem elde etmiştik. Bu denklemi kullanarak belirlediğimiz senaryolar için yaptığımız hesaplamalarda elde ettiğimiz sonuçları Laplace yöntemi, Gauss yöntemi ve Laplace yönteminde Escobal’ın değişikliği (bundan sonra “Escobal yöntemi” olarak adlandırılacaktır) ile kıyaslayarak benzer sonuçlara ulaştığımızı göstermiştik. Ne var ki, Laplace yöntemi kökenli olan bu yaklaşımda da temelde gözlenen cismin yer gözlem noktasına göre bağlı konum vektörüne ait yön vektörünün zamana bağlı birinci ve ikinci türevlerinin hesaplanmasında kullanılan “ara değer bulma” (interpolasyon) işleminden kaynaklanan hassasiyet problemleri bulunmaktadır. Bu çalışmada bu problemin çözümü için farklı yaklaşımlar geliştirilmiştir.

GİRİŞ

Yörünge belirleme işlemi yirminci yüzyılda ilk yapay uydunun yörüngeye yerleştirilmesinden yüzyıllar öncesinde, insanların gece gökyüzünde gördükleri gök cisimlerinin rotalarını hesaplama girişimleri ile

¹Öğrenci, Bilgisayar Müh. Böl., E-posta: majd.ajroudi@gmail.com

²Arş. Gör., Uzay Müh. Böl., E-posta: iarda@thk.edu.tr

³Mezun, Uzay Müh. Böl., Email: dikko.ladanbaki@stu.thk.edu.tr

⁴Dr. Öğr. Üyesi, Mekatronik Müh. Böl., E-posta: hghanbarpourasl@thk.edu.tr

⁵Doç. Dr., Uçak Müh. Böl., E-posta: csenturk@thk.edu.tr

⁶Doç. Dr., Uzay Müh. Böl., E-posta: tcsisman@thk.edu.tr

başlamıştır. Gezegenlerin ve yıldızların astronomik tablolarının oluşturulması çabaları ile yüzyıllar boyunca çok sayıda yörünge belirleme yöntemi geliştirilmiştir. Tüm bu yöntemler, yaklaşık son altmış yıldır gerçekleştirilmekte olan binlerce uzay misyonu ile çok geniş bir uygulama ve gelişme alanına sahip olmuştur.

Gök cisimlerinin optik gözlemlerine dayanan sadece-açı yöntemleri, yörünge ön tayini için yüzyıllardır kullanılan köklü ve güvenilir yöntemlerdir. Bu yöntemler arasından Laplace yöntemini [Klokacheva, 1991; Vallado, 2007] ve Gauss yöntemini ele alalım [Curtis, 2013]. Bunlar, her ne kadar köklü yöntemler olsa da, bilgisayar ve yazılım teknolojilerindeki ve sayısal yöntemlerdeki gelişmeler sonrasında sayısal yaklaşımlarla daha uyumlu olan bazı alternatif yöntemler ortaya çıkmıştır. Örnek olarak Gooding [Gooding, 1990], yalnızca açı verisi kullanılarak ele alınan Laplace yöntemini veya Gauss yöntemini, farklı zamanlarda elde edilen iki yer merkezli konum vektörü ölçümünü kullanan Lambert problemine (bu problemin klasik bir tasviri için bkz. [Curtis, 2013]) dönüştüren bir yaklaşım öne sürmüştür.

Bu çalışmada, Doppler ölçümlerinden gelen uzaklık değişimi verisi ile elde edilen analitik ifade kullanılarak gerçekleştirilen yörünge ön tayininde interpolasyon kaynaklı hassasiyet probleminin çözümü üzerinde durulmaktadır. Bu minvalde, ilk olarak kısaca Laplace yöntemini tanıtacağız. Daha sonra uzaklık değişimi verisini tasviri yapılan problemi bozmadan ekleyerek yöntemin nasıl güncellendiğini inceleyeceğiz. Bu, Laplace yöntemine uygulanan sayısal bazlı bir değişiklik ile çözülen standart bir karma veri yörünge ön tayini problemidir [Escobal, 1965]. (Yakın zamanlı bir sayısal yaklaşım için ayrıca bkz. [Yanez vd., 2017]) Biz burada, Gibbs yöntemindeki [Curtis, 2013] ruhu takip ederek, problemi analitik bir yaklaşımla ele alıyoruz ki Gibbs yöntemi temelde Lambert probleminin, fazladan bir konum vektörü verisi eklenmiş bir uzantısı şeklinde düşünülebilir. Son olarak, problem uygun bir kısıta uymaya zorlanarak ve bir dizi diferansiyel düzeltme uygulanarak hassasiyet problemlerine çözüm geliştirilmektedir.

YÖNTEM

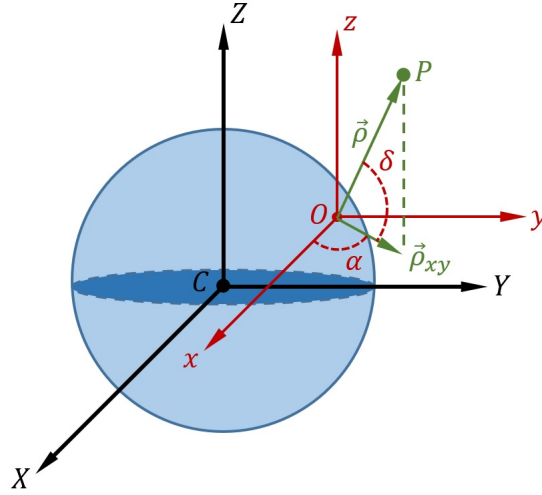
Dünya üzerinden yapılan açısal gözlem, gözlenen cismin (bu ister bir uydu olsun ister bir gök cismi) gözlemciye göre yönünü tayin eden iki açısını belirlemek demektir. Bu açıları ifade etmeden önce kullanılacak olan referans çerçevesi üzerinde duralım. Söz konusu gözlem dünya yüzeyi üzerinden yapıldığı için, açıları başlangıç noktası dünya yüzeyinde bulunan bir toposentrik referans çerçevesinde ölçmek mümkündür. Bu referans çerçevesi ise iki şekilde seçilebilir: toposentrik ekvatorial çerçeve ya da toposentrik ufuk çerçevesi. En genel haliyle gözlenen cismin konum vektörü yer merkezli ekvatorial çerçevede yazıldığı için bu noktada toposentrik ekvatorial çerçeveyi kullanmak daha iyi olacaktır. Sonuç olarak, başlangıçta bahsettiğimiz iki açıyı toposentrik yükselme açısı, α , ve toposentrik dik açıklık açısı, δ , şeklinde ifade edebiliriz (bkz. Şekil 1). Bağlı konum vektörünü $\vec{\rho}$ şeklinde gösterirsek, bu vektörün yönünü tayin eden $\hat{\rho}$ birim vektörünü α ve δ cinsinden şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\hat{\rho} = \cos \delta \cos \alpha \hat{I} + \cos \delta \sin \alpha \hat{J} + \sin \delta \hat{K}, \quad (1)$$

Bağlı konum vektörünün büyüklüğü verev uzaklık olarak adlandırılır ve ρ ile gösterilir. Öte yandan, yer merkezli konum vektörünü $\vec{r}$ ile gösterebiliriz. Yer merkezli referans sistemi, merkezi Dünya'nın merkezinde bulunan ve Dünya ile birlikte dönmeyen ve dolayısıyla iki-cisim problemimizde eylemsiz olarak kabul edebileceğimiz bir referans sistemidir. $\vec{r}$ vektörünü gözlemcinin yer merkezli referans sistemine göre konum vektörü olan $\vec{R}$ vektörü, verev uzaklık ρ ve toposentrik yön vektörü $\hat{\rho}$ cinsinden şu şekilde ifade edebiliriz:

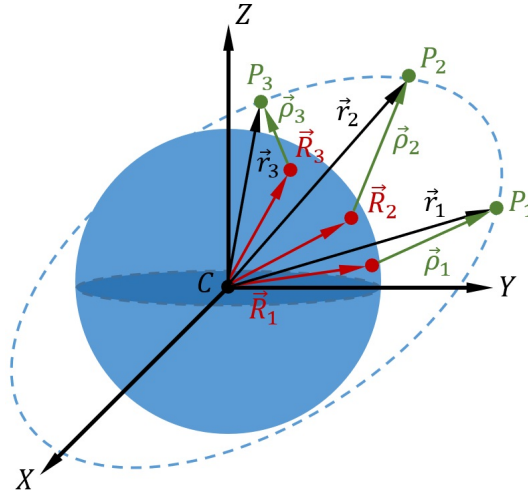
$$\vec{r}_i = \vec{R}_i + \rho_i \hat{\rho}_i, \quad (2)$$

Burada i gözlemin yapıldığı farklı zaman dilimlerini temsil etmektedir (Şekil 2). Örneğin, Laplace yönteminde üç farklı anda gözlem verisi gerekmektedir. Bu veri, gözlem yapılan andaki α ve δ



Şekil 1: Gözlenen Cismin Toposentrik Ekvatorial Çerçeve'deki Açısal Konumu

açıların optik gözlem ile belirlenmesi şeklinde olabilir. Bu üç farklı andaki gözlemler Dünya üzerinde aynı bölgeden yapılabileceği gibi farklı bölgelerden de yapılabilir. Verilen herhangi bir



Şekil 2: Gözlenen Cismin ve Gözlem Noktasının Üç Farklı Gözlem Anında Birbirlerine ve Yer Merkezine Göre Konumlarının Geometrisi

gözlem zamanına denk gelen gözlemci konum vektörü $\vec{R}_i$ nin tayin edilebilir olduğunu unutmamak gerekir. O andaki toposentrik yön vektörü $\hat{\rho}_i$ ise (1) aracılığı ile elde edilebilir. Dolayısıyla (1)'den geriye verev uzaklık ρ_i ve yer merkezli konum vektörü $\vec{r}_i$ bilinmeyen olarak kalır. Yörünge ön belirleme işleminin tamamlanması için yer merkezli konum ve hız vektörlerinin bulunması gerekmektedir. Bu noktada, sırasıyla Laplace yöntemi, Escobal yöntemi ve bizim bu çalışmada Laplace yöntemi üzerinde yaptığımız değişiklikleri incelemek yerinde olacaktır.

Laplace Yöntemi

Bu bölümde, Vallado'nun [Vallado, 2007] Laplace yöntemi konusundaki bölümü takip edilmektedir. İlk olarak, iki-cisim probleminin hareket denklemini hatırlatalım:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}, \quad (3)$$

Burada μ Dünya'nın standart kütleçekim parametresini temsil etmektedir. Öte yandan, Şekil 2'de açık bir şekilde görüldüğü üzere gözlenen cismin yer merkezli konum vektörünü şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \rho(t)\hat{\rho}(t), \quad (4)$$

(4)'ün zamana göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerini alarak gözlenen cismin sırasıyla yer merkezli hız ve ivme vektörlerini elde ederiz:

$$\dot{\vec{r}}(t) \equiv \vec{v} = \dot{\vec{R}} + \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\hat{\rho}}, \quad (5)$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) \equiv \vec{a} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\rho}\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \rho\ddot{\hat{\rho}}, \quad (6)$$

(3) ve (6)'yı birleştirerek yeniden düzenlersek

$$\ddot{\rho}\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \rho\left(\ddot{\hat{\rho}} + \frac{\mu}{r^3}\hat{\rho}\right) = -\ddot{\vec{R}} - \frac{\mu}{r^3}\vec{R}, \quad (7)$$

olduğunu görürüz. (7)'de yer alan gözlem noktasının ivme vektörü $\ddot{\vec{R}}$, basitçe

$$\dot{\vec{R}} = \vec{\Omega} \times \vec{R}, \quad (8)$$

ve

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{\Omega} \times \dot{\vec{R}} = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}), \quad (9)$$

denklemleri ile elde edilebilir. Burada $\vec{\Omega}$ Dünya'nın açısal hız vektörünü temsil etmektedir. Yöntemin merkezinde bulunan ara değer bulma işlemi aşağıdaki denklemler aracılığı ile yapılmaktadır.

$$\hat{\rho}(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}\hat{\rho}_1 + \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}\hat{\rho}_2 + \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\hat{\rho}_3, \quad (10)$$

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = \frac{2t-t_2-t_3}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}\dot{\hat{\rho}}_1 + \frac{2t-t_1-t_3}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}\dot{\hat{\rho}}_2 + \frac{2t-t_1-t_2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\dot{\hat{\rho}}_3, \quad (11)$$

$$\ddot{\hat{\rho}}(t) = \frac{2}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}\ddot{\hat{\rho}}_1 + \frac{2}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}\ddot{\hat{\rho}}_2 + \frac{2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\ddot{\hat{\rho}}_3, \quad (12)$$

Yöntemin geri kalanı, (2)'de iç çarpım uygulayarak r için elde edilen ifadeyi iki-cisim problemi hareket denklemi (3)'te r 'nin yerine koyarak çıkan denklemi ρ için çözmekten ibarettir. Aynı işlem $\dot{\rho}$ için de uygulanarak elde edilen değerler (4)'te ve (5)'te yerine konularak ikinci zaman adımına ait olan durum vektörleri ve böylece ön yörünge belirlenmiş olur. Burada belirtmemiz gereken önemli bir nokta bulunmaktadır. Verev uzaklık ρ 'yu elde etme işlemi iterasyona dayalı bir süreç olup bu esnada yer merkezli konum vektörü $\vec{r}$ 'nin büyüklüğü olan r 'de sekizinci dereceden bir polinom denklemi çözülmektedir. Dolayısıyla birden fazla gerçel kök elde edilebilmektedir ve bunlar arasından hangisinin doğru kök olduğunu belirlemek ayrıca bir hesaplama maliyeti demektir.

Gauss Yöntemi

Açısal momentumun korunumundan ötürü yer merkezli konum vektörleri $\vec{r}_i$ 'ler aynı düzlemde (yani yörünge düzleminde) yer almaktadır. Bu yüzden, doğrusal olmayan yer merkezli konum vektörleri için $\vec{r}_i$ 'lerden herhangi biri diğer ikisinin doğrusal bileşimleri şeklinde yazılabilir:

$$\vec{r}_2 = c_1 \vec{r}_1 + c_3 \vec{r}_3. \quad (13)$$

İlaveten, Lagrange katsayıları kullanılarak $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_3$ vektörleri orta zaman dilimine ait durum vektörleri cinsinden şu şekilde yazılabilir:

$$\vec{r}_1 = f_1 \vec{r}_2 + g_1 \vec{v}_2, \quad (14)$$

$$\vec{r}_3 = f_3 \vec{r}_2 + g_3 \vec{v}_2. \quad (15)$$

Bu üç vektör denklemini kullanarak ilk olarak c_1 and c_3 katsayılarını Lagrange katsayıları cinsinden yazmak mümkündür. Daha sonra, Lagrange katsayılarını $\tau_1 = t_2 - t_1$ ve $\tau_3 = t_3 - t_2$ zaman dilimlerinde açarak ve geniş ölçüde etkili bir vektör cebri uygulayarak orta zaman dilimindeki durum vektörleri elde edilebilir. (Gauss yönteminin ayrıntılı bir incelemesi için bkz.[Curtis, 2013]).

Laplace Yönteminde Escobal'ın Değişikliği

Literatürde verrev uzaklık değişiminin bilindiği varsayımına dayanan yöntemlerden birisi Escobal tarafından öne sürülmüştür [Escobal, 1965]. Bu yöntem (7)'nin $\hat{\rho}$ ile iç çarpımının alınması yönüyle Laplace yönteminden ayrışmaya başlar. Bu iç çarpım ile

$$-\frac{\mu}{r^3} \rho - \frac{\mu}{r^3} \hat{\rho} \cdot \vec{R} = \ddot{\rho} + \rho \hat{\rho} \cdot \ddot{\hat{\rho}} + \hat{\rho} \cdot \ddot{\vec{R}}, \quad (16)$$

denklemini elde edilir. Bununla birlikte, $\hat{\rho} \cdot \dot{\hat{\rho}} = 0$ denklemi ve bu denklemin zamana göre birinci mertebeden türevi olan $\hat{\rho} \cdot \ddot{\hat{\rho}} = -\dot{\hat{\rho}} \cdot \dot{\hat{\rho}}$ denklemi kullanılarak (16)

$$\left(\dot{\hat{\rho}} \cdot \dot{\hat{\rho}} - \frac{\mu}{r^3} \right) \rho = \ddot{\rho} + \hat{\rho} \cdot \ddot{\vec{R}} + \frac{\mu}{r^3} \hat{\rho} \cdot \vec{R}, \quad (17)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece ara değer bulma işleminden elde edilen ve hassasiyet probleminin kaynaklarından birisi olan $\ddot{\hat{\rho}}$ terimi denklemlerden elenmiş olur. (17) düzenlenerek ikinci zaman adımına ait olmak üzere

$$\rho = \frac{A + \frac{B}{r^3}}{C + \frac{D}{r^3}}, \quad (18)$$

yazılabilir. Burada A,B,C ve D

$$A \equiv \ddot{\rho} + \hat{\rho} \cdot \ddot{\vec{R}}, \quad B \equiv \mu \hat{\rho} \cdot \vec{R}, \quad C \equiv \dot{\hat{\rho}} \cdot \dot{\hat{\rho}}, \quad D \equiv -\mu, \quad (19)$$

ifadelerine denktir. Laplace yönteminde olduğu gibi (18)'i çözmenin bir yolu ρ için bir değer kabul edip iteratif bir süreç ile çözüme ulaşmaya çalışmaktır. Bir diğer yol ise yine (2)'de iç çarpım uygulayarak r için elde edilen ifadeyi iki-cisim problemi hareket denklemi (3)'te r 'nin yerine koyarak çıkan denklemi ρ için çözmektir. Laplace yönteminde olduğu gibi, yine sekizinci dereceden bir polinom denklemi elde edilecek ve Newton-Raphson benzeri iteratif bir süreç sonrasında birden fazla gerçel kök elde edilmesi halinde doğru kök belirlendikten sonra durum vektörlerine ulaşarak yörünge belirlenmiş olacaktır.

Laplace Yönteminde Bu Çalışmada Önerilen Değişiklik

Her bir gözlem zaman adımında Doppler ölçümlerinden elde edilen verrev uzaklık değişimi verisini ara değer bulma işleminde şu şekilde kullanabiliriz:

$$\dot{\rho}(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} \dot{\rho}_1 + \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} \dot{\rho}_2 + \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)} \dot{\rho}_3, \quad (20)$$

Tablo 1: UUİ için 29 Ağustos 2019 Tarihli, 19:59:10 (UTC+0) Amna Ait İki-Satır Veri Seti

1	25544U	98067A	19241.83275787	.00001839	00000-0	39700-4	0	9998
2	25544	51.6448	355.9501	0007912	342.5346	99.5642	15.50401679186686	

Tablo 2: İncelenen Senaryoya Ait Açı ve Uzaklık Değişimi Verisi

Zaman (UTC+03:00)	α	δ	$\dot{\rho}$ (km/s)
05:04:17	355.780°	64.0511°	3.46074×10^{-3}
05:05:17	135.154°	72.1947°	4.69583
05:06:17	151.300°	52.7665°	6.29005

Bu ifadenin zamana göre birince mertebeden türevini alırsak

$$\ddot{\rho}(t) = \frac{(2t - t_2 - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)}\dot{\rho}_1 + \frac{(2t - t_1 - t_3)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)}\dot{\rho}_2 + \frac{(2t - t_1 - t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}\dot{\rho}_3, \quad (21)$$

Daha sonra $\ddot{\rho}(t = t_2)$ değerini (7)'de yerine koyduktan sonra elde ettiğimiz ifadenin $\vec{R} \times \hat{\rho}$ ile iç çarpımını alırsak

$$2\dot{\rho}(\vec{R} \times \hat{\rho}) \cdot \dot{\hat{\rho}} + \rho(\vec{R} \times \hat{\rho}) \cdot \ddot{\hat{\rho}} = -(\vec{R} \times \hat{\rho}) \cdot \ddot{\vec{R}}, \quad (22)$$

ifadesini elde ederiz ki bu denklem ρ için çözülürse

$$\rho = -\frac{(\vec{R} \times \hat{\rho}) \cdot \ddot{\vec{R}} + 2\dot{\rho}(\vec{R} \times \hat{\rho}) \cdot \dot{\hat{\rho}}}{(\vec{R} \times \hat{\rho}) \cdot \ddot{\hat{\rho}}}, \quad (23)$$

denkleme ulaşılır. Bu çözüm tek köklü bir çözümdür ve bu açıdan işlem maliyetini düşürmektedir. Bu noktada $\hat{\rho}$ ve $\dot{\hat{\rho}}$ değerlerinin gözlemler aracılığı ile bilindiğini unutmamak gerekir. Ayrıca $\vec{R}$ vektörü de gözlem yapılan merkezin bilinen yer merkezli konum vektörüdür ve gözlem merkezinin eylemsiz ivmesi $\vec{R}$ vektörü ve Dünya'nın açısal hızı aracılığı ile kolaylıkla hesaplanabilir. Denklemin sağ tarafında kalan terimler, üç açısal gözlem verisini içeren Lagrange ara değer bulma formülü ile hesaplanabilen $\dot{\hat{\rho}}$ ve $\ddot{\hat{\rho}}$ vektörleridir. Dolayısıyla ρ direkt olarak (23) denkleminde hesaplanabilir.

Laplace yöntemi bazlı bu yöntemde hassasiyet probleminin kaynağının ara değer bulma sürecinden kaynaklandığını söylemiştik. Bu noktada sistem üzerinde doğru bir kısıt konularak ve diferansiyel düzeltme işlemi uygulanarak yöntemde iyileşme elde edilmesi mümkündür. Bahsi geçen kısıt şu şekilde uygulanabilir: $\hat{\rho} \cdot \dot{\hat{\rho}} = 0$ olduğu için ve bu ilişki $\hat{\rho}$ ve $\dot{\hat{\rho}}$ vektörlerinin birbirlerine dik olmalarını gerektirdiği için ara değer bulma işlemi sonucu elde edilen $\dot{\hat{\rho}}$ vektörünü bu diklik bağıntısına uymaya zorlayarak ara değer bulmadan kaynaklanan hassasiyet problemini iyileştirebiliriz. Sistem üzerinde uygulanan diklik kısıtı ve diferansiyel düzeltme işlemi takip eden bölümde irdelenecektir.

UYGULAMALAR

Bu çalışmada gözleme dayalı ölçülmüş veriye sahip olmadığımız için gözlemden ve Doppler ölçümlerinden gelmesini beklediğimiz açı ve uzaklık değişimi verilerini *space-track.org* ağ sayfasından elde ettiğimiz iki-satır veri setini (TLE) bir periyot boyunca ortalaması alınmış J2 tedirgemesini de içeren iki-cisim ilerletici kodunda koşturarak elde ettik. Bu amaçla Uluslararası Uzay İstasyonu'nun 30 Ağustos 2019 tarihinde 05:02:43 ve 05:07:27 yerel saatleri arasında (UTC+03:00) Ankara üzerinden görünür geçişine ait olan iki-satır veri setini kullandık. Söz konusu iki-satır veri seti Tablo 1'de, bu veri setinden elde edilen açılar ve verev uzaklık değişimi verisi ise Tablo 2'de sunulmuştur. Bu senaryo için farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlar klasik yörünge

Tablo 3: Yörünge Ön Tayini Yöntemleri ve J2 Tedirgemeli İki-Cisim İlerleticisi Kullanılarak Elde Edilen Klasik Yörünge Elemanlarının Karşılaştırılması

	e	Ω	i	ω	θ	a (km)
J2 Tedirgemeli İlerletici	7.91200×10^{-4}	354.690°	51.6448°	343.474°	1.37510°	6793.7
Laplace	0.205860	354.815°	51.9918°	55.5807°	6.96502°	8601.7
Escobal	0.465929	356.064°	52.7186°	52.0742°	9.97379°	12809
Bu çalışmada elde edilen	0.668597	354.754°	52.4905°	58.6458°	4.59752°	20875

Tablo 4: Yörünge Ön Tayini Yöntemleri ve J2 Tedirgemeli İki-Cisim İlerleticisi Kullanılarak Elde Edilen Durum Vektörlerinin Karşılaştırılması

	$\vec{r}$	$\vec{v}$
J2 Tedirgemeli İlerletici	(3493.2, 3422.1, 4714.5)	(-6.5436, 2.8337, 2.8002)
Laplace	(3478.1, 3437.0, 4782.1)	(-7.1006, 3.1278, 3.1648)
Escobal	(3466.9, 3448.2, 4831.4)	(-7.6696, 3.4182, 3.7879)
Bu çalışmada elde edilen	(3449.8, 3465.2, 4906.4)	(-8.3051, 3.6302, 3.7202)

elemanlarının karşılaştırılması suretiyle Tablo 3'te, durum vektörlerinin karşılaştırılması suretiyle ise Tablo 4'te verilmiştir.

Bu çalışmada sunulan yöntemin en önemli çıktısı tek köklü olmasıdır. Ne var ki Sonuçlar kısmında da görüldüğü üzere bu yöntemin doğruluğu kıyaslanan diğer tüm yöntemlerden daha azdır. Bu da yöntemde geliştirilmesi gereken noktadır. İlk iyileştirme $\hat{\rho} \cdot \dot{\hat{\rho}} = 0$ kinematik kısıtını uygulayarak gerçekleştirilebilir. $\hat{\rho}$ vektörü örneğin ikinci zaman noktasında kesin (tam doğru) bir değere sahip olmadığından ve ara değer bulma fonksiyonu (11) kullanılarak hesaplandığı için $\hat{\rho}(t_2) \cdot \dot{\hat{\rho}}(t_2) = 0$ kısıtının sağlanacağı garanti değildir ve genellikle de sağlanmaz. Kodda $\hat{\rho} \perp \dot{\hat{\rho}}$ diklik kısıtını uygulamak için $\dot{\hat{\rho}}$ vektörünün $\hat{\rho}$ bileşenini basitçe

$$\dot{\hat{\rho}}_{\text{yeni}}(t_2) = \dot{\hat{\rho}}(t_2) - \hat{\rho}(t_2) \left[\hat{\rho}(t_2) \cdot \dot{\hat{\rho}}(t_2) \right],$$

yazarak eleyebiliriz. Burada $\dot{\hat{\rho}}_{\text{yeni}}(t_2) \cdot \hat{\rho}(t_2) = 0$ denklemi tanım gereği sağlanmaktadır.

Kinematik kısıt koda eklendiğinde elde edilen sonuçlar Tablo 5 ve Tablo 6'da verilmiştir. Bu sonuçlarda kinematik kısıtın bazı parametreler için sonucu iyileştirse de diğer bazı parametrelerde bozulmalara neden olduğu görülmektedir.

$\hat{\rho}$ ve $\ddot{\hat{\rho}}$ vektörleri toplamda altı adet bağımsız skaler ile temsil edilebilen üç boyutlu vektörlerdir. $\hat{\rho} \cdot \dot{\hat{\rho}} = 0$ kinematik kısıtını kullanmak bu altı skalerden birini diğer beşine göre sabitlemektedir. Birinci ve sonuncu zaman noktalarındaki açısal gözlemler bu geriye kalan beş skalerden dördünü sabitleyecek şekilde bir diferansiyel düzeltme planı uygulanarak ikinci bir iyileştirme elde edilebilir. Bu türden bir plan inşa etmek için ilk ya da son zaman noktasındaki yükselme açısı α ve dik açıklık

Tablo 5: $\dot{\hat{\rho}} \perp \hat{\rho}$ Kinematik Kısıtı Uygulanmasından Sonra Klasik Yörünge Elemanlarının Karşılaştırılması

	e	Ω	i	ω	θ	a (km)
J2 Tedirgemeli İlerletici	7.91200×10^{-4}	354.690°	51.6448°	343.474°	1.37510°	6793.7
Laplace	0.0780995	350.652°	50.3982°	140.781°	284.374°	7014.9
Escobal	0.298078	351.688°	51.1016°	76.0233°	348.853°	9774.9
Bu çalışmada elde edilen	0.421337	350.647°	50.9532°	78.1409°	347.647°	11888

Tablo 6: $\dot{\hat{r}} \perp \hat{r}$ Kinematik Kısıtı Uygulanmasından Sonra Durum Vektörlerinin Karşılaştırılması

	$\vec{r}$	$\vec{v}$
J2 Tedirgemeli İlerletici	(3493.2, 3422.1, 4714.5)	(-6.5436, 2.8337, 2.8002)
Laplace	(3478.1, 3437.0, 4782.1)	(-6.8571, 2.8856, 2.0952)
Escobal	(3461.4, 3453.7, 4855.7)	(-7.6065, 3.2194, 2.5854)
Bu çalışmada elde edilen	(3449.8, 3465.2, 4906.4)	(-8.0188, 3.3454, 2.4629)

açısı δ değerlerinin $\dot{\hat{r}}$ ve $\ddot{\hat{r}}$ vektörlerini temsil eden x ve y gibi iki skaler değişkene bağlı olduğunu düşünelim. O halde, $\alpha = \alpha(x, y)$ ve $\delta = \delta(x, y)$ ifadeleri şu şekilde birinci dereceden Taylor serisi açılımlarına sahip olacaktır:

$$\alpha(x, y) \approx \alpha_0(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0), \quad (24)$$

$$\delta(x, y) \approx \delta_0(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial \delta}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial \delta}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0). \quad (25)$$

x ve y değişkenlerinin geçerli değerleri olan (x_0, y_0) ikilisine karşılık gelen (α_0, δ_0) değerlerinin t_i anlarında ($i = 1, 2, 3$) gözlemden elde edilen (α_i, δ_i) değerleriyle uyuşmadığını düşünelim. Bu noktada (x, y) ikilisini öyle bir güncellemek istiyoruz ki karşılık gelen (α, δ) değerleri gözlemden elde edilen (α_i, δ_i) değerlerine eşit olsun. Yani, $\delta\alpha \equiv \alpha - \alpha_i = 0$ ve $\delta\delta \equiv \delta - \delta_i = 0$. O halde (24) ve (25) Taylor açılımları $\delta\alpha$ ve $\delta\delta$ için şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\delta\alpha = \alpha - \alpha_i \approx \delta\alpha_0 + \left. \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \delta x + \left. \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \delta y, \quad (26)$$

$$\delta\delta = \delta - \delta_i \approx \delta\delta_0 + \left. \frac{\partial \delta}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \delta x + \left. \frac{\partial \delta}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \delta y, \quad (27)$$

Ya da matris gösterimi ile

$$\begin{pmatrix} \delta\alpha \\ \delta\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\alpha_0 \\ \delta\delta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial \delta}{\partial x} & \frac{\partial \delta}{\partial y} \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $(\delta x, \delta y)$ ikilisi güncellenmiş (x, y) değerleri ile geçerli (x_0, y_0) değerleri arasındaki fark şeklinde tanımlanmıştır. Yani, $\delta x \equiv x - x_0$ ve $\delta y \equiv y - y_0$. O halde şöyle bir soru gündeme gelmektedir: $(\delta x, \delta y)$ ikilisindeki güncelleme nasıl olmalı ki $(\delta\alpha, \delta\delta) = (0, 0)$ eşitliği sağlanabilsin?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\alpha_0 \\ \delta\delta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial \delta}{\partial x} & \frac{\partial \delta}{\partial y} \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix},$$

Bu denklem $(\delta x, \delta y)$ için şu şekilde çözümlenmelidir:

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial \delta}{\partial x} & \frac{\partial \delta}{\partial y} \end{pmatrix}_0^{-1} \begin{pmatrix} \delta\alpha_0 \\ \delta\delta_0 \end{pmatrix}.$$

$(\delta x, \delta y)$ ikilisinin güncellenmesi gereken miktarlar bulunduktan sonra, güncellenmiş (x, y) değerleri basitçe şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \delta x, \\ y &= y_0 + \delta y. \end{aligned}$$

Böylece, t_1 ya da t_3 zaman noktasındaki gözlemlerden birisi dahil edilerek iki skaler değişken güncellenmiş olur. Daha sonra, diğer zaman noktasındaki gözlemler de dahil edilerek $\dot{\hat{\rho}}$ ve $\ddot{\hat{\rho}}$ vektörlerini temsil eden iki skaler değişken daha güncellenebilir.

Diferansiyel düzeltme planını uygularken ilk zaman noktasında x değişkenini $\hat{\rho} \cdot \dot{\hat{\rho}} = 0$ kinematik kısıtını uygulayarak $\dot{\hat{\rho}}$ vektörüne dik bir vektör haline getirilmiş olan $\dot{\hat{\rho}}$ vektörünün büyüklüğü olarak seçtik. y değişkeni için de $\dot{\hat{\rho}}$ vektörüne

$$\frac{(\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}})}{|\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}}|},$$

yönünde bir bileşen sunduk. Bu bir nevi $\dot{\hat{\rho}}$ vektörünü $\hat{\rho}$ vektörü etrafında döndürmek gibi düşünülebilir. $\dot{\hat{\rho}}$ vektörünün tüm bileşenlerini ilk zaman noktasının gözlem verisi ile düzelttikten sonra $\ddot{\hat{\rho}}$ vektörünün iki bileşenini güncellemek için son zaman noktasındaki gözlemleri kullanıyoruz. $\ddot{\hat{\rho}}$ vektörünün iki bileşenini belirlemek için $\ddot{\hat{\rho}}$ vektörünü şu şekilde ayrıştırıyoruz:

$$\ddot{\hat{\rho}} = (\ddot{\hat{\rho}} \cdot \hat{\rho}) \hat{\rho} + \ddot{\hat{\rho}}_{\perp}$$

Burada tanım gereği $\hat{\rho} \perp \ddot{\hat{\rho}}_{\perp}$ diklik koşulu bulunmaktadır. x değişkenini $x \equiv |\ddot{\hat{\rho}}_{\perp}|$ şeklinde seçiyoruz. y değişkeni için ise $\ddot{\hat{\rho}}_{\perp}$ vektörüne şu yönde bir bileşen tanımlıyoruz:

$$\frac{(\hat{\rho} \times \ddot{\hat{\rho}}_{\perp})}{|\hat{\rho} \times \ddot{\hat{\rho}}_{\perp}|}$$

Bu da bir nevi $\ddot{\hat{\rho}}_{\perp}$ vektörünü $\hat{\rho}$ vektörü etrafında döndürmek gibi düşünülebilir. Bu iki güncelleme adımını iteratif bir şekilde uygulayarak orta zaman dilimindeki durum vektörü için daha iyi tahminler elde edilebilir.

Diferansiyel düzeltme planını uygularken (α, δ) açılarının türevlerini sayısal bir şekilde belirledik. Örneğin, dik açıklık açısı α için

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \frac{\alpha(1.01x_0, y_0) - \alpha(x_0, y_0)}{0.01x_0},$$

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \frac{\alpha(x_0, 1.01y_0) - \alpha(x_0, y_0)}{0.01y_0}$$

Burada α değerleri orta zaman noktasındaki durum vektörlerinin değerlendirmeye tabi olan zaman dilimine, yani ilk ya da son zaman dilimine, ilerletilmesi ile hesaplanmaktadır. Ek olarak, sayısal stabiliteyi sağlamak adına bir iterasyon adımıdaki $(\delta x, \delta y)$ güncellemeleri $(0.01x_0, 0.01y_0)$ değerlerinden büyük olursa, güncellemeler en büyük güncelleme miktarı δx ve δy değerlerinden hangisinin daha büyük olduğuna bağlı olmak üzere $0.01x_0$ ya da $0.01y_0$ diferansiyel adımına eşit olacak şekilde düzgelenmektedir (normalizasyon).

Diferansiyel düzeltme planı uygulandığında, Laplace yönteminin Gauss yöntemi de dahil bütün yöntemler içerisinde en hassas sonuçları verdiği gözlenmiştir. Ancak sadece açı gözlemleri üzerinden düzeltmeler yapan bu plan Escobal yöntemi ve bu çalışmada geliştirilmiş yöntem için uygulandığında yakınsayan sonuçlar vermemiştir. Bunun temel sebebinin, Escobal yöntemi ile geliştirilmiş olan yöntemin verdiği yörünge ön tayin sonuçlarının diferansiyel düzeltme planı için yeterince yakın ilk sonuçlar üretmemesi olduğu düşünülmektedir. Laplace yöntemi için elde edilen sonuçlar Tablo 7 ve Tablo 8'de sunulmuştur.

Tablo 7: Diferansiyel Düzeltme Planı Uygulandıktan Sonra Elde Edilen Klasik Yörünge Elemanlarının Karşılaştırılması

	e	Ω	i	ω	θ	a (km)
J2 Tedirgemeli İlerletici	7.91200×10^{-4}	354.690°	51.6448°	343.474°	1.37510°	6793.7
Laplace	7.48344×10^{-4}	354.688°	51.6466°	345.592°	1.33809°	6793.8

Tablo 8: Diferansiyel Düzeltme Planı Uygulandıktan Sonra Elde Edilen Durum Vektörlerinin Karşılaştırılması

	$\vec{r}$	$\vec{v}$
J2 Tedirgemeli İlerletici	(3493.2, 3422.1, 4714.5)	(-6.5436, 2.8337, 2.8002)
Laplace	(3493.5, 3421.7, 4714.5)	(-6.5437, 2.8337, 2.8003)

SONUÇ

Bu çalışmada, Laplace yöntemini takip ederek karma veri probleminin çözümü için tek köklü analitik bir ifade elde ederek yörünge ön tayinini gerçekleştirme üzerinde durduk. Laplace yönteminden, Doppler ölçümleriyle gelen veriv uzaklık değişimi verisini ara değer bulma işlemine koyarak gözlenen cismin veriv uzaklık değerini bulmaya yarayan tek köklü analitik bir ifade elde etmek suretiyle ayrıştık. Ayrıca, Laplace yönteminde ara değer bulma işlemi ile elde edilen gözlenen cismin toposentrik hız yön vektöründeki ve toposentrik ivme yön vektöründeki hassasiyet problemlerini çözmek için diklik kısıtı ve diferansiyel düzeltme işlemleri kullanılmasını önerdik. Bu işlemler sonrasında söz konusu vektörlerde iyileşme gerçekleşmiş ve bu da durum vektörü ve klasik yörünge elemanları sonuçlarına yansımıştır. Kinematik kısıtın bu çalışmada bahsi geçen uygulamasının elde edilen sonuçlarda bazı parametreler için geliştirme sağlamasına rağmen bazılarında hassasiyeti düşürdüğü gözlenmiştir. Diferansiyel düzeltme uygulaması ise sadece Laplace yöntemi için sonuç vermiş ve bu sonuç elde edilen en hassas yörünge belirlemesi olmuştur. Ancak, diferansiyel düzeltme planı karma veri yörünge belirleme yöntemlerinde yakınsayan sonuçlar vermemiştir. Takip eden çalışmalarda karma veri yörünge belirleme yöntemleri için diferansiyel düzeltme planları geliştirilecektir.

Kaynaklar

- Curtis, H. D. (2013) *Orbital Mechanics for Engineering Students*, 3. Baskı, Elsevier.
- Escobal, P. R. (1965) *Methods of Orbit Determination*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Gooding, R. H. (1990) *A procedure for the solution of lambert's orbital boundary-value problem*, Celest. Mech. Dyn. Astr., 48(2), 145-165.
- Klokacheva, M. Yu. (1991) *Determination of a preliminary orbit by the Laplace Method*, Sov. Astron.35(4), Jul.-Aug. 1991
- Ladan-Baki, D., Ajroudi, M., Arda, İ., Şentürk, Ç., Şişman, T. Ç. (2019) *Orbit Determination from Doppler and Angle Data*, 10th ANKARA INTERNATIONAL AEROSPACE CONFERENCE, Ankara, Türkiye.
- Vallado, D. A. (2007) *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, 3. Baskı, Microcosm Press ve Springer.
- Yanez, C., Mercier, C. F., ve Dolado, J-C. (2017) *A novel initial orbit determination algorithm from Doppler and angular observations*, Proc. 7th European Conference on Space Debris, Darmstadt, Almanya, 18-21 Nisan 2017, ESA Space Debris Office tarafından yayınlanmıştır.