

KABUK YAPILARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ KULLANILARAK YAPISAL OLARAK İNCELENMESİ

Hasan KIYIK¹ Buse Tuğçe TEMUÇİN² Metin O. KAYA³

İstanbul Teknik Üniversitesi/İstanbul

ÖZET

Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak Mathematica programı yardımıyla katlamalı plakaların ve kabuk yapıların analizi yapılmış olup elde edilen sonuçlar NASTRAN paket programından ve literatürden elde edilen veriler ile kıyaslanıp kabuk yapıların en iyi hangi yöntemle modellenip çözüleceği konusunda bu çalışmanın yol göstermesi amaçlanmıştır. Basit kabuk yapılar için elde edilen sonuçlar neticesinde daha kompleks yapıda oluşturulacak olan kabuk yapılar için en uygun modelleme yöntemlerinin belirlenmesine katkı sağlamıştır.

GİRİŞ

Analitik yöntemler çok önemli olmasına rağmen, karmaşık kabuk yapılarının matematiksel modellerini çözmek için sayısal modellerin kullanılması tasarım sürecinde önemli bir bileşen haline gelmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi, kabukların analizi için temel sayısal yöntem olarak kullanılmaktadır [Bucalem,1997].

Bir kabuk bir plakanın düzlemsel olmayan bir yüzeye uzatılması olarak düşünülebilir. Düzlemsel olmama durumu eğilme ve kayma kuvvetlerine ek olarak eksenel (membran) kuvvetleri meydana getirir ve böylece daha yüksek yapısal mukavemet sağlanmış olur. Kabuk yapılar çok iyi derecede hafif ve kolay üretim özelliklerine sahip olması nedeniyle havacılık, otomobil ve gemi sektörlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Kabuk yapısı değişen açılarla birbiri ardına eklenmiş birçok plakadan oluşmaktadır. Bu çalışmada birbiri ardına eklenmiş plakalar kullanılarak oluşturulan kabuğun yapısal olarak incelenerek doğal titreşim frekanslarının belirlenmesi ve çalışmanın sonucunda elde edilen verilerin bir paket programdan ve literatürden elde edilen veriler ile kıyaslanarak havacılık sektörüne katkıda bulunması amaçlanmaktadır.

PLAKA TEORİLERİ VE KABUKLAR

Bu çalışmada Reissner-Mindlin ve Kirchhoff plaka teorileri kullanılarak sonlu elemanlar yöntemi ile çalışmalar yapılmıştır. Plaka kalınlığı plakanın diğer boyutlarına göre çok küçük olan plakalar ince plaka olarak adlandırılmaktadır. Fakat L/h oranı daha küçükse ($L/h < 10$) plaka kalın plaka olarak adlandırılmaktadır [Petyt, M., 2010].

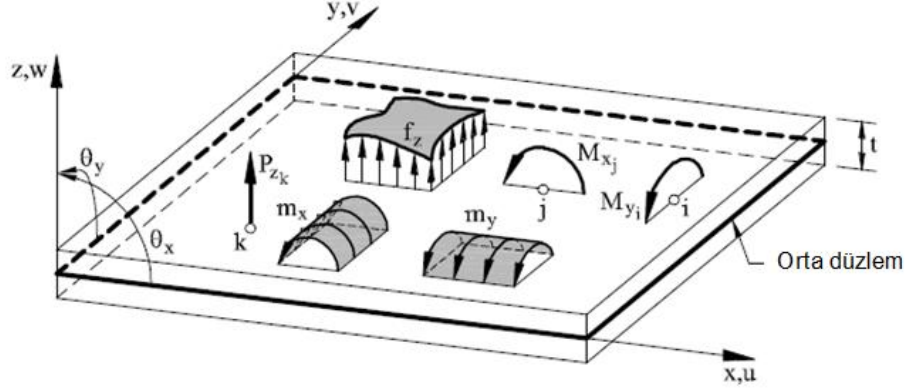
Kirchhoff plaka teorisinde yapılan temel kabuller aşağıdaki şekilde verilmiştir.

¹Makina Müh., Uçak Müh. Böl., E-posta: kiyik16@itu.edu.tr

²Uçak Müh., Uçak Müh. Böl., E-posta: temucin@itu.edu.tr

³Prof. Dr., Uçak Müh. Böl., E-posta: kayam@itu.edu.tr

- Kalınlığı diğer uzunluk ölçülerine göre çok daha ufak olan düz katı bir plaka tanımlanmalıdır.
- Orta düzleme ait noktalarda yer değiştirme sıfırdır ($z=0$). Diğer bir deyişle orta düzlemdeki noktalar sadece dikey yönde hareket edebilir ($u=v=0$).
- Orta düzleme dik noktalar aynı dikey yer değiştirmeye sahiptir.
- Düzlem gerilme kabulü yapılmıştır.
- Orta düzleme dik düz bir çizgi deformasyondan önce ve deformasyondan sonra hem düz hem de düzleme dik bir şekilde kalacaktır [Oñate, E., 2013].



Şekil 1: Bir plakanın geometrik tanımı [Oñate, E., 2013]

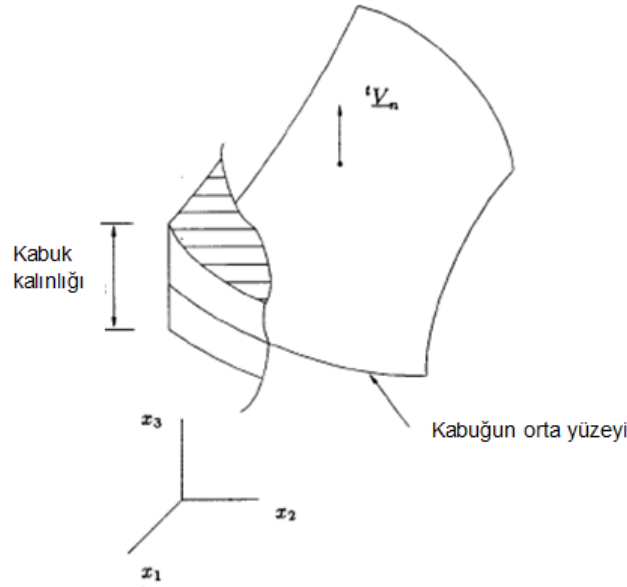
Kabuk kinematik ve gerilme koşulları için kullanılan varsayımlar Reissner-Mindlin plaka teorisinin genelleştirilmesinden elde edilmiştir. Şekil 2, analiz edilecek tipik bir kabuğu göstermektedir. Kabuğun kinematiği, kabuğun orta yüzeyinin hareketi ve orta yüzeyin her bir malzeme noktası için tanımlanan bir vektörün hareketi ile tanımlanır: vektörün orijini kabuğun orta yüzeyindedir ve genellikle vektör başlangıçta bu orta yüzeye normaldir. Kabuk deformasyonları sırasında vektör ötelenir ve döner, ve başlangıçta kabuğun orta yüzeyine normale öyle kalmayabilir [Bucalem,1997].

Reissner-Mindlin teorisi baz alınarak modellenen kabuklarda; teorilerin homojen ve izotropik plakalarda orta yüzeyi referans düzlem olarak kabul etmesi ve eksenel gerilmelerin bu yüzeyde sıfır kabul edilmesinden dolayı her düğüm için 3 serbestlik derecesi kullanılmıştır. u ve v eksenel yer değiştirmeler, w düzleme dik yer değiştirme ve θ_x ile θ_y dönme etkileri arasındaki bağıntı aşağıdaki şekilde yazılabilir [Oñate, E., 2013].

$$u(x, y, z) = z\theta_y(x, y) \quad (1)$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_x(x, y) \quad (2)$$

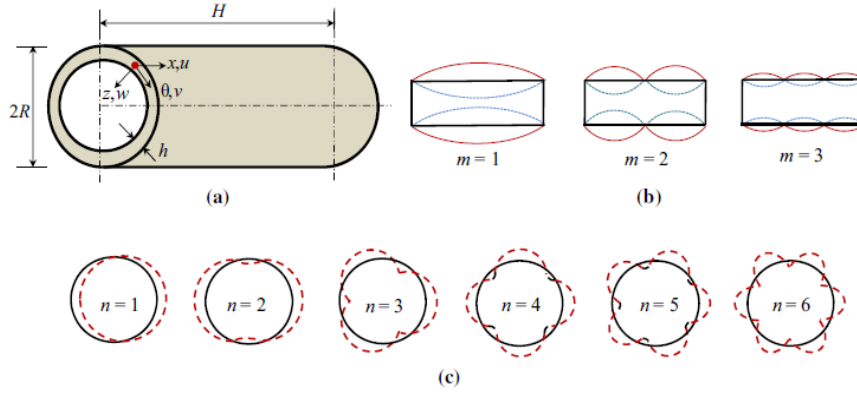
$$w(x, y, z) = w \quad (3)$$



Şekil 2: Tipik bir kabuk parçası [Bucalem,1997]

YÖNTEM

Plaka elemanının rijitlik matrisi $[K]_e = \int [B]^T [D] [B] dA$ ve gerinim vektörü $\{\epsilon\} = [B]\{\delta\}$ denklemleri kullanılarak hesaplanır. $\{\epsilon\}$ gerinim vektörü ve $\{\delta\}$ ise düğüm yer değiştirme vektörüdür. Kuvvet vektörü $\{F\} = [\rho]\{A\}$ denklemi kullanılarak hesaplanır. Bu denklemde $[\rho]$ atalet matrisidir ve $\{A\}$ ise ivmelenme vektörüdür. Kütle matrisi ise $[M]_e = \int [N]^T [\rho] [N]$ denklemi kullanılarak hesaplanır ve $[N]$ ise Lagrangian interpolasyon fonksiyonudur.



Şekil 3: (a) Koordinat Sistemi, (b) Çevresel, (c) Silindirik kabuk için eksenel ve radyal modlar [Rawat, 2019]

Kirchhoff plaka teorisine göre serbest titreşim için hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir. u : kabuğun x yönündeki yer değiştirmesi, v : kabuğun θ yönündeki yer değiştirmesi, w : kabuğun z yönündeki yer değiştirmesi ve $L_{ij}(i,j=1,2,3)$ x ve θ 'ya göre diferansiyel operatörlerdir.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

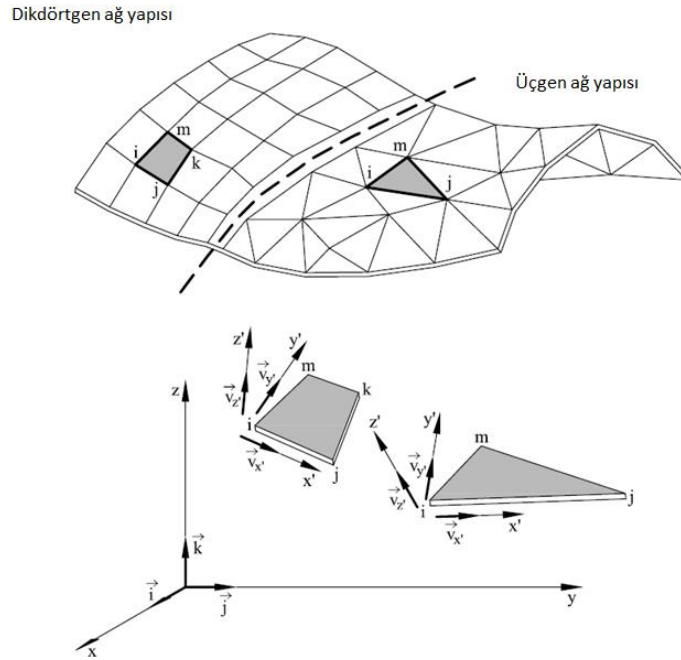
$f(t)$; $U(x,\theta)$, $V(x,\theta)$ ve $W(x,\theta)$ mod şekillerine göre skaler model koordinatlarıdır. Dolayısıyla u , v ve w yer değiştirmeleri aşağıdaki şekilde verilir.

$$\begin{aligned}
u &= U(x, \theta) f(t) \\
v &= V(x, \theta) f(t) \\
w &= W(x, \theta) f(t)
\end{aligned} \tag{5}$$

Doğal frekanslar aşağıdaki denklem yardımıyla hesaplanabilir.

$$(-\omega^2 M^{MN} + K^{MN}) \Phi^N = 0 \tag{6}$$

Burada M^{MN} : kütle matrisi, K^{MN} : rijitlik matrisi, Φ^N : özvektör (titreşimin modu), M ve N serbestlik dereceleri.



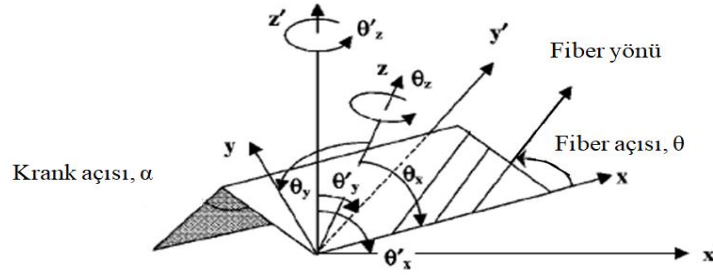
Şekil 4: Lokal eksenlerin eleman bazında tanımlanması [Oñate, E., 2013]

Şekil 5'te görüldüğü gibi üçgen ve dikdörtgen elemanlar bir kabuk üzerinde tanımlanmıştır. Yapılan çalışmalarda dikdörtgen ağ yapıları kullanılarak sonlu elemanlar yöntemi ile çözümler yapılmıştır.

Reissner-Mindlin teorisi yapılarıdaki kayma gerilmesinin baskın olması ve yüksek rijitlik sebebiyle bazı sapmalara sahiptir. Bunun nedeni ise plaka kalınlıkları azaldıkça kayma rijitliğinin sistemde baskın hale gelerek aşırı rijit bir durum oluşturmaktadır. Bu durum kayma kilitlemesi olarak adlandırılmaktadır. Kayma kilitlemesi durumunu düzeltmek için Gauss integrasyon yöntemi kullanılmıştır. Gauss integrasyon yöntemi aşağıdaki denklem kullanılarak yapılır. J jakobiyen matrisi, η ve ξ boyutsuz koordinatlar ve W Gauss ağırlık faktörüdür.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) \det J d\eta d\xi = \sum_i \sum_j W_i W_j \phi(\xi_i, \eta_j) \tag{7}$$

Katlanmış plakalar için lokal ve global yer değiştirmeler Şekil 5.'de gösterildiği gibidir.



Şekil 5: Tipik bir katlanmış plaka için Lokal ve global eksen takımları [Guha Niyogi, 1999]

Yer değiştirmeler için $\{u\} = [T]\{u'\}$ bağıntısı kullanılarak transformasyon matrisi yardımıyla lokal eksen takımından global eksen takımına dönüşüm yapılabilir [Guha Niyogi, 1999]. Benzer şekilde global rijitlik matrisleri, kütle matrisleri ve kuvvet vektörü aşağıdaki denklemler yardımıyla yazılır.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(y', x) & \cos(z', x) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(x', y) & \cos(y', y) & \cos(z', y) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(x', z) & \cos(y', z) & \cos(z', z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(x', x) & \cos(y', x) & \cos(z', x) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(x', y) & \cos(y', y) & \cos(z', y) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(x', z) & \cos(y', z) & \cos(z', z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \theta'_x \\ \theta'_y \\ \theta'_z \end{Bmatrix} \quad (8)$$

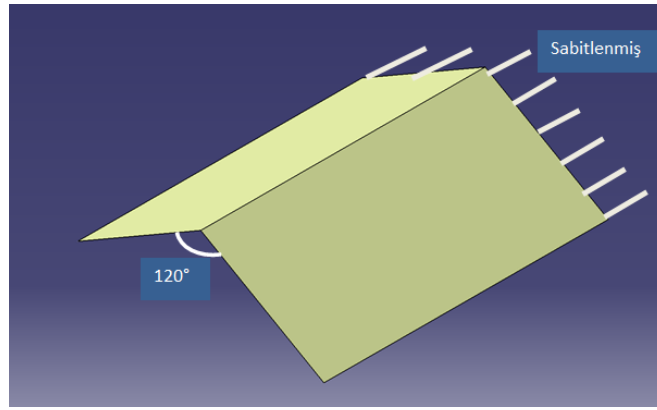
$$[K']_e = [T]^T [K]_e [T] \quad (9)$$

$$[M']_e = [T]^T [M]_e [T] \quad (10)$$

$$\{f'\}_e = [T]^T \{f\}_e \quad (11)$$

UYGULAMALAR

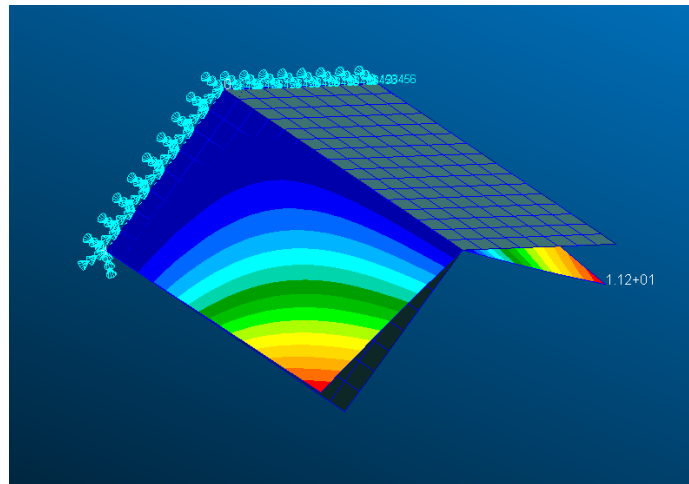
Tek katlamalı aralarında 120° açı bulunan izotropik ve homojen iki plaka katlanmış ve bir ucundan basit mesnetlenmiştir. Her bir plaka için mesnetlenen kısımların uzunluğu 1.5 m, diğer kenar uzunluğu 0.75 m ve kalınlığı 0.03 m olarak alınmıştır. Malzeme özellikleri ise; elastisite modülü $E=10.92 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, poisson oranı 0.3 ve kütle yoğunluğu 1000 kg/m^3 olarak alınmıştır. Bu tek katlamalı plakaların analizi sonlu elemanlar yöntemi ile dört düğüm noktalı elemanlar kullanılarak yapılmıştır. İnce plakanın çözüm yöntemi için Kirchhoff plaka teorisi ve Reissner-Mindlin plaka teorisi kullanılmıştır. Mathematica programında yazılan sonlu elemanlar kodu ile Kirchhoff yöntemi için 4×3 'lük ve Reissner-Mindlin yöntemi için 6×4 'lük eşit parçalar halinde ağ yapısı oluşturularak sonuçlar literatürden ve Nastran paket programından elde edilen veriler ile kıyaslanmıştır. Literatürde yapılan çalışmalarda ağ yapısı 4×3 'lük eşit parçalar halinde oluşturulmuştur.



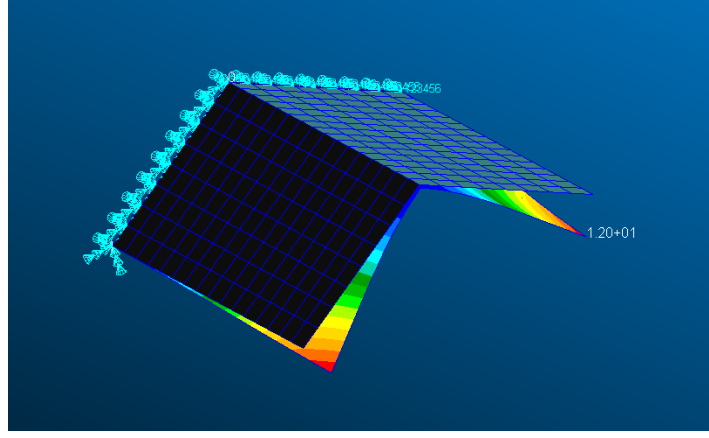
Şekil 6: Aralarında 120 derece açı bulunan tek katlamalı plaka modeli

Tablo 1: 120° tek katlamalı plakanın doğal frekans değerlerinin (boyutsuz frekans) literatürdeki çalışmalardan ve Nastran paket programından elde edilen veriler ile kıyaslanması

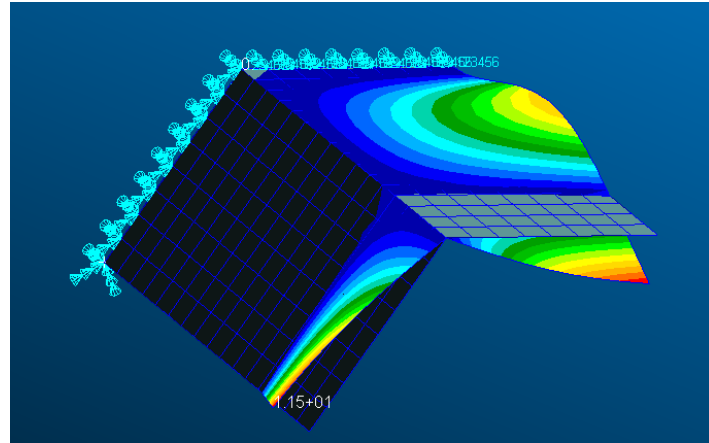
Modlar	Mevcut Sonuçlar (Kirchhoff)	Mevcut Sonuçlar (Reissner-Mindlin)	A.Guha Niyogi ve arkadaşları, 1999	Liu ve arkadaşları, 1992	Irie ve arkadaşları, 1984	Nastran Sonuçları
1	0.0491	0.0485	0.0490	0.0491	0.0492	0.0484
2	0.0940	0.0940	0.0941	0.0943	0.0949	0.0932
3	0.1788	0.1835	0.1883	0.1787	0.1795	0.1750
4	0.2057	0.2115	0.216	0.2065	0.2082	0.2021
5	0.3021	0.3008	0.293	0.2971	0.2984	0.2867



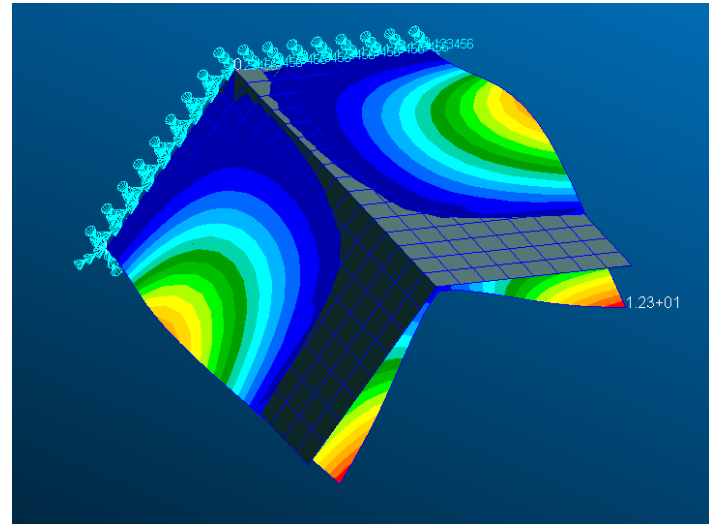
Şekil 7: 120 derece açılı tek katlamalı plaka için birinci mod şekli



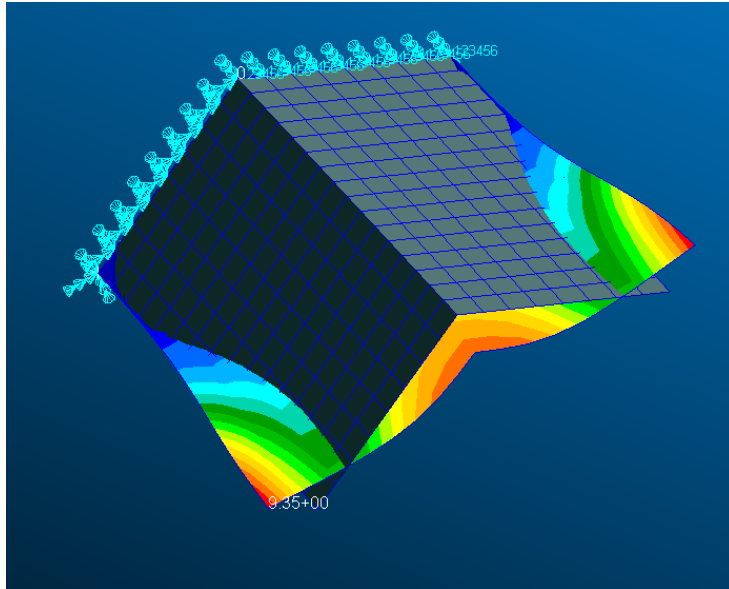
Şekil 8: 120 derece açılı tek katlamalı plaka için ikinci mod şekli



Şekil 9: 120 derece açılı tek katlamalı plaka için üçüncü mod şekli

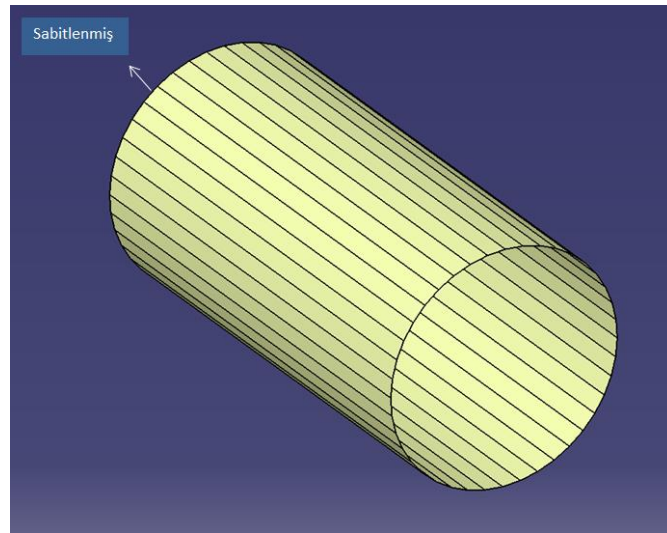


Şekil 10: 120 derece açılı tek katlamalı plaka için dördüncü mod şekli



Şekil 11: 120 derece açılı tek katlamalı plaka için beşinci mod şekli

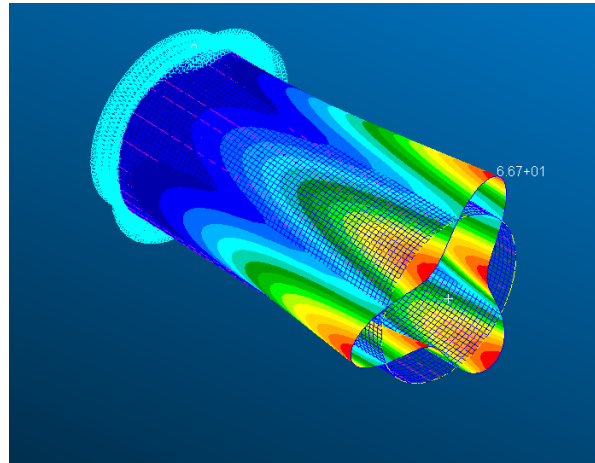
Otuz dokuz katlamalı aralarında 9° açı bulunan izotropik ve homojen kırk plaka katlanmıştır ve bir ucundan basit mesnetlenmiştir. Dolayısıyla silindirik bir kabuk yapısı oluşturulmuştur. İçi boş ince cidarlı silindirik bir yapı modellenip silindirik yapının dış yarı çapı 150 mm, uzunluğu 600 mm ve cidar kalınlığı 1 mm olarak alınmıştır. Malzeme özellikleri ise; elastisite modülü $E=7.1 \times 10^{10}$ N/m², poisson oranı 0.33 ve kütle yoğunluğu 2770 kg/m³ olarak alınmıştır. Bu otuz dokuz katlamalı plakaların analizi sonlu elemanlar yöntemi ile dört düğüm noktalı elemanlar kullanılarak yapılmıştır. İnce silindirik tüpün çözüm yöntemi için Kirchhoff plaka teorisi ve Reissner-Mindlin plaka teorisi kullanılmıştır. Mathematica programında yazılan sonlu elemanlar kodu ile 20 x 2'lik eşit parçalar halinde ağ yapısı oluşturularak sonuçlar literatür ve Nastran paket programından elde edilen veriler ile kıyaslanmıştır.



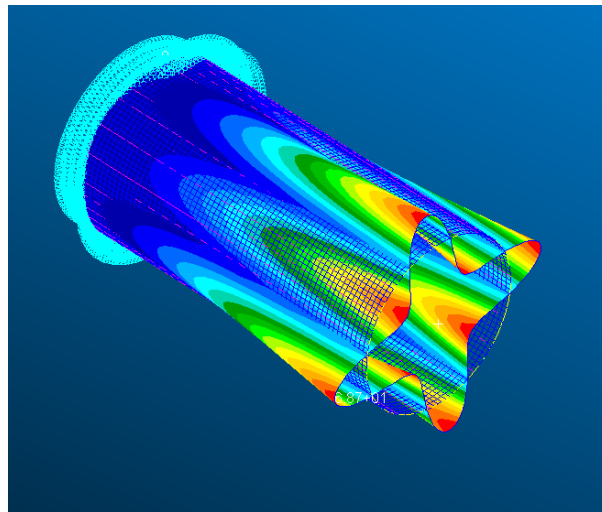
Şekil 12: Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı modeli

Tablo 2: Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için doğal frekans değerlerinin (Hertz) literatürdeki çalışmalardan ve Nastran paket programından elde edilen veriler ile kıyaslanması

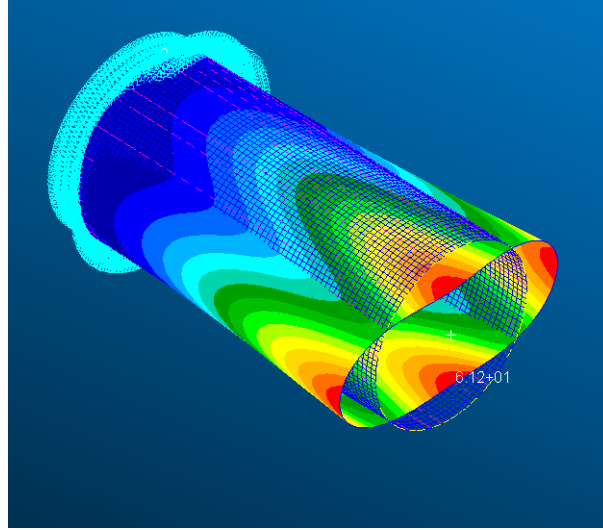
Modlar	Mevcut Sonuçlar (Reissner-Mindlin)	Mevcut Sonuçlar (Kirchhoff)	Aruna Rawat ve arkadaşları, 2019	ANSYS (Lee and Kwak, 2015)	FLH (Lee and Kwak, 2015)	DM (Lee and Kwak, 2015)	Nastran Sonuçları
(1,3)	147.52	146.82	146	146	146	153	146.16
(1,4)	177.78	175.98	175	174	175	185	175.56
(1,2)	242.70	242.15	242	243	242	243	241.46
(1,5)	268.37	263.90	263	261	263	274	263.48
(1,6)	390.17	381.91	382	378	381	391	380.79



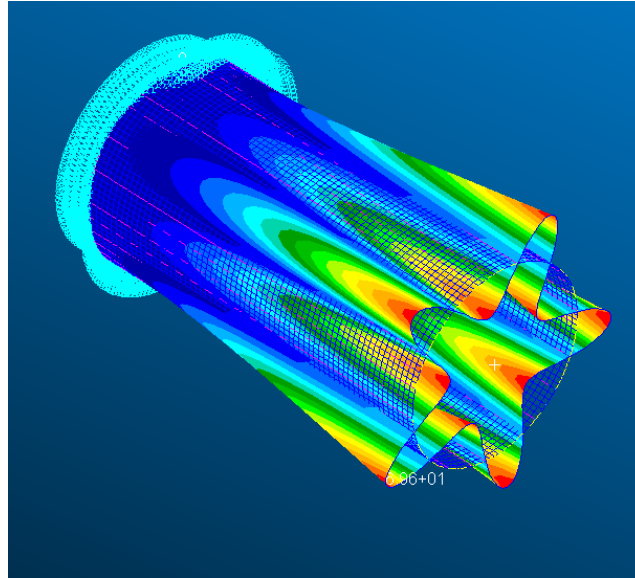
Şekil 13: Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için birinci mod şekli



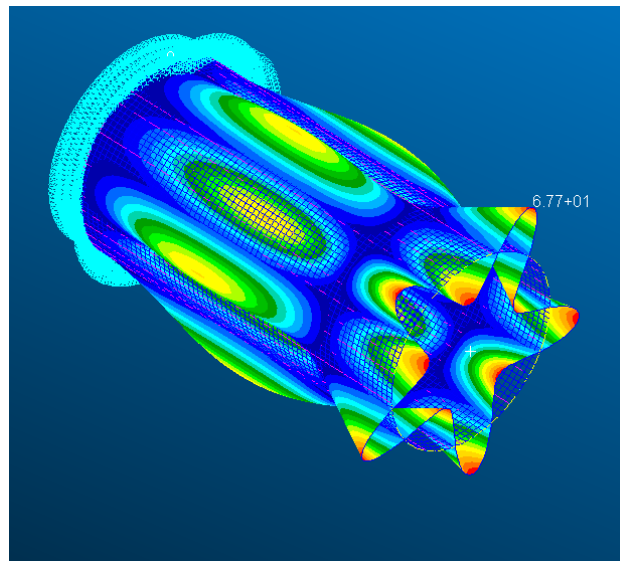
Şekil 14: Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için ikinci mod şekli



Şekil 15: Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için üçüncü mod şekli



Şekil 16: Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için dördüncü mod şekli



Şekil 17: Basit mesnetlenmiş ince silindirik tüp yapısı için beşinci mod şekli

SONUÇLAR

Katlamalı plaka yapısı ve kabuk yapısı modellenmiş farklı plaka teorileri ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak analizleri yapılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi kodları Mathematica programında yazılmış olup sınır şartları literatürde yapılan çalışmalara benzer şekilde verilmiştir. Elde edilen sonuçlar Nastran paket programı ve literatürde yapılan çalışmalar ile kıyaslandığında sonlu elemanlar yöntemi ile hazırlanan kodların iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

Yapılan analizleri incelersek modifikasyona uğramış Reissner-Mindlin teorisinin Kirchhoff plaka teorisi kadar iyi sonuç verdiği görülmüştür. Ayrıca beklendiği gibi benzer ağ yapısı ile oluşturulmuş homojen izotropik ince silindirik kabuk yapısı analizini incelersek Kirchhoff plaka teorisinin Reissner-Mindlin teorisine göre daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Mathematica programında yazılan sonlu elemanlar kodu ticarileştirilebilir olup farklı türde problemlere uygulanabilecektir.

Kaynaklar

- Bucalem, M.L. and Bathe, K.J., 1997. Finite element analysis of shell structures. Archives of Computational Methods in Engineering, 4(1), pp.3-61.
- Guha Niyogi, A., Laha, M.K. and Sinha, P.K., 1999. Finite element vibration analysis of laminated composite folded plate structures. Shock and Vibration, 6(5-6), pp.273-283.
- Irie, T., Yamada, G., & Kobayashi, Y. (1984). Free vibration of a cantilever folded plate. The Journal of the Acoustical Society of America, 76(6), 1743-1748..
- Lee, H., & Kwak, M. K. (2015). Free vibration analysis of a circular cylindrical shell using the Rayleigh–Ritz method and comparison of different shell theories. Journal of Sound and Vibration, 353, 344-377..
- Liu, W. H., & Huang, C. C. (1992). Vibration analysis of folded plates. Journal of Sound and Vibration, 157(1), 123-137..
- Oñate, E., 2013. Structural analysis with the finite element method. Linear statics: volume 2: beams, plates and shells. Springer Science & Business Media.
- Petyt, M., 2010. Introduction to finite element vibration analysis. Cambridge university press.
- Rawat, A., Matsagar, V. A., & Nagpal, A. K. (2019). Free vibration analysis of thin circular cylindrical shell with closure using finite element method. International Journal of Steel Structures, 20(1), 175-193..