8. ULUSAL HAVACILIK VE UZAY KONFERANSI **UHUK-2020-082**
9-11 Eylül 2020, Türk Hava Kurumu Üniversitesi, Ankara

SES ALTI UÇUŞ KOŞULLARINDAKİ BİR UÇAK KANADININ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE ÇIRPINMA ANALİZİ

Damla DURMUŞ [1]
İstanbul Teknik Üniversitesi
Uçak Mühendisliği, İstanbul

Metin O. KAYA [2]
İstanbul Teknik Üniversitesi
Uçak Mühendisliği, İstanbul

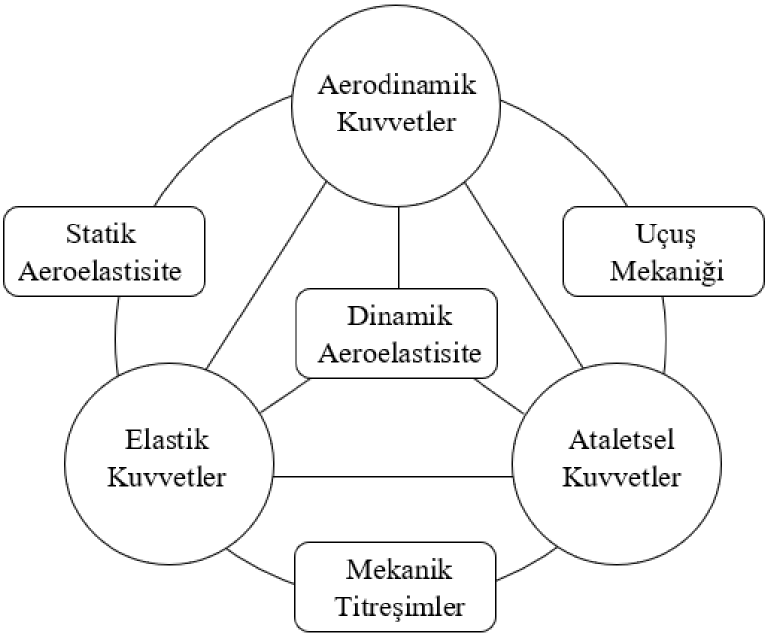
ÖZET

Bu çalışma kapsamında diferansiyel dönüşüm yöntemi ile bir uçak kanadının ses altı uçuş koşullarındaki aeroelastik karakteristiği sayısal çözümleme ile incelenmiştir. Uçak kanadı, kanat yapısal modelini sadeleştirmek adına yaygın olarak tercih edilen Euler-Bernoulli kirişi olarak modellenmiştir. Kanat üzerine etkiyen aerodinamik kuvvetler ise Theodorsen'in aerodinamik teorisiyle ifade edilmiştir. Eğilme ve burulma hareketi yapan ankastre Euler-Bernoulli kirişinin enerji ifadeleri verildikten sonra dinamik davranışını tanımlayan hareket denklemleri Hamilton prensibi ile türetilmiştir. Etkili bir çözüm yöntemi olan Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY) tanıtılmış ve hareket denklemleri ile sınır şartlarını yeni ifadelere dönüştürmek için gerekli kurallar verilmiştir. DDY ile Euler-Bernoulli kirişinin hareket denklemleri ve sınır koşulları yeniden ifade edilmiştir. Dönüştürülmüş hareket denklemleri ile sınır koşulları geliştirilen kod ile çözülmüştür. Geliştirilen kodun doğruluğunu ve güvenilirliğini teyit etmek amacıyla literatürde doğal frekans ve çırpınma değerleri mevcut olan Goland kanadı ile Hale-Altitude Long-Endurance (HALE) kanadı seçilmiştir. Geliştirilen kod yardımıyla dönüştürülmüş denklemlerin çözülmesi ile Goland ve HALE kanatları için çeşitli modlarda doğal frekans değerleri elde edilmiştir. DDY ile bulunan doğal frekanslar değerleri, literatürdeki aynı kanat modellerinin serbest titreşim analizlerinden elde edilen doğal frekans değerleri ile her bir mod için karşılaştırılmıştır. Ardından Euler-Bernoulli kirişi olarak modellenen kanadın çırpınma analizleri yine Goland ve HALE kanatları için gerçekleştirilmiştir. Sistemin aeroelastik analizi için klasik aeroelastik çözüm yöntemlerinden biri olan ve literatürde yaygınca kullanılan k-yönteminden yararlanılmıştır. Bulunan çırpınma hızı ve frekansı değerleri Goland ve HALE kanatlarının literatürdeki değerleri ile karşılaştırılmıştır. Yapılan çalışmanın literatürdeki verilerle kıyaslaması ile oldukça düşük hata paylarıyla çok yakın sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

[1] Araştırma Görevlisi, Uçak Mühendisliği Bölümü, E-posta:durmus17@itu.edu.tr
[2] Prof. Dr., Uçak Mühendisliği Bölümü, E-posta: kayam@itu.edu.tr

GİRİŞ

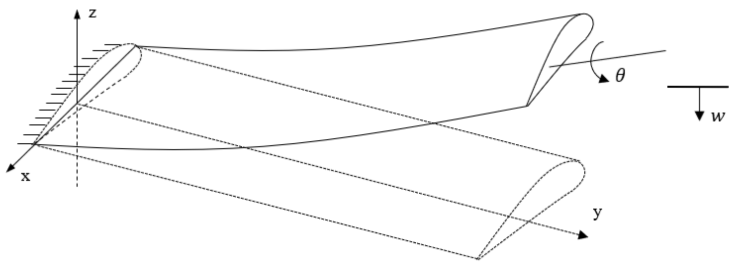
Aeroelastisite, uçak yapısına etki eden aerodinamik, ataletsel ve elastik kuvvetler arasındaki etkileşimi inceleyen çok disiplinli bir çalışma alanıdır [Bisplinghoff, Ashley ve Halfman, 1955]. Şekil 1'de verilen Collar'ın aeroelastik üçgeni kuvvetlerin aeroelastik etkileşimini göstermektedir [Collar, 1946]. Aeroelastisite olgusu statik ve dinamik olmak üzere iki temel kategoride incelenmektedir. Statik aeroelastisite aerodinamik ve elastik kuvvetlerin etkileşiminin bir sonucudur. Statik kararsızlık çalışmalarında çoğunlukla diverjans problemi ele alınmaktadır. Dinamik aeroelastisite ise aerodinamik, ataletsel ve elastik kuvvetlerin tümüyle etkileşimini incelemektedir. En önemli dinamik kararsızlık problemlerinden biri olarak görülen çırpınma (flutter), kendi kendini besleyen salınımlarla uçak yapısına büyük hasarlar verebilmektedir. Çırpınma durumunun meydana gelmeye başladığı kritik uçuş hızına çırpınma hızı denmektedir. Günümüze kadar çırpınma hızını tahmin edebilmek için birçok matematiksel ve deneysel model geliştirilmiştir. Yıkıcı sonuçlara sebep olabilecek bir kararsızlık problemi olmasından dolayı hava aracı tasarımının erken aşamalarında olası çırpınma etkileri ele alınmalıdır.



Şekil 1: Collar'ın aeroelastik üçgeni

YÖNTEM

Uçak kanadının yapısal modelinde Euler-Bernoulli kirişi kullanılmıştır. Euler-Bernoulli kiriş modeli sadeliğinden dolayı karmaşık mühendislik sistemlerinin dinamiğini temsil etmek için literatürde yaygınca kullanılan bir modeldir. Euler-Bernoulli kiriş modelinde, kiriş kesitinin deformasyondan sonra yine düzlem olarak kaldığı varsayılmaktadır. Uçak kanadına etki eden aerodinamik yükler ise Theodorsen'in aerodinamik teorisi ile ifade edilmiştir. Sayısal çözümleme süresi analizlerde karşılaşılabilen problemlerden biridir. Aerodinamik yüklerin Theodorsen'in aerodinamik teorisiyle ifade edilmesi analizi önemli ölçüde sadeleştirmektedir. Bu nedenden dolayı Theodorsen teorisi literatürde yaygınca kullanılan bir yöntemdir. Şekil 2'de eğilme ve burulma serbestlik derecelerine sahip bir kanat kesiti verilmiştir.



Şekil 2: Eğilme ve burulma hareketi yapan bir kanadın şematik gösterimi

Aeroelastik hareket denklemlerinden önce doğal frekans analizi için serbest titreşim denklemleri elde edilmiştir. Eğilme-burulma hareketi yapan Euler-Bernoulli kirişinin hareket denklemleri Hamilton prensibi ile aşağıda gösterildiği gibi elde edilmiştir.

$$-\frac{d^2}{dy^2}\left(EI\frac{d^2w}{dy^2}\right)+m\frac{d^2w}{dt^2}+mX_\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}=0 \tag{1}$$

$$\frac{d}{dy}\left(GJ\frac{d\theta}{dy}\right)+mR_\theta^2\frac{d^2\theta}{dy^2}+mX_\theta\frac{d^2w}{dt^2}=0 \tag{2}$$

Burada m birim uzunluk başına kütle, X_θ statik dengesizlik, R_θ atalet yarıçapı, EI kanadın eğilme sertliği ve GJ kanadın burulma sertliği olarak tanımlanmaktadır.
Eğilme ve burulma hareketleri için basit harmonik hareket varsayılmış ve aşağıda verilen ifadelerden yararlanılmıştır.

$$w\left(y,t\right)=\overline{w}\left(y\right)e^{i\omega t} \tag{3}$$

$$\theta\left(y,t\right)=\overline{\theta}\left(y\right)e^{i\omega t} \tag{4}$$

Hareket denklemleri zamandan bağımsız hale getirildikten sonra adi diferansiyel denklemlere dönüştürülmüştür. Elde edilen adi diferansiyel denklemler aşağıdaki parametreler ile boyutsuzlaştırılarak Deklem (6) ve (7)'de verilen boyutsuz ifadelere ulaşılmıştır.

$$\xi=\frac{y}{l}\qquad w=\frac{\overline{w}}{b}\qquad \theta=\overline{\theta} \tag{5}$$

$$-\lambda_1^4\frac{1}{\omega^2}\frac{d^4w}{d\xi^4}+w+\frac{X_\theta}{b}\theta=0 \tag{6}$$

$$\lambda_2^2\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\theta}{d\xi^2}+\frac{X_\theta}{b}w+\frac{R_\theta^2}{b^2}\theta=0 \tag{7}$$

İfadeleri sadeleştirebilmek için Denklem (6) ve (7)'de kullanılan katsayılar aşağıda verilmiştir.

$$\lambda_1^4=\frac{E_0I_0}{ml^4}\qquad \lambda_2^2=\frac{G_0J_0}{ml^2} \tag{8}$$

Benzer işlemler aeroelastik hareket denklemlerine ulaşmak için aerodinamik kuvvetler ve momentler de sisteme dahil edilerek tekrarlanmıştır.

$$-\frac{d^2}{dy^2}\left(EI\frac{d^2w}{dy^2}\right)+m\frac{d^2w}{dt^2}+mX_\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}-L=0 \tag{9}$$

$$\frac{d}{dy}\left(GJ\frac{d\theta}{dy}\right)+mR_\theta^2\frac{d^2\theta}{dy^2}+mX_\theta\frac{d^2w}{dt^2}+M=0 \tag{10}$$

Burada, L ve M sırasıyla aerodinamik taşıma ve aerodinamik moment olarak tanımlanmaktadır. Bu ifadeler Theodorsen fonksiyonu $C(k)$ cinsinden Denklem (11) ve (12)'de verilmiştir. $C(k)$

fonksiyonu Denklem (13)'te verilen indirgenmiş frekans k'ya bağlı olarak değişken değerler almaktadır.

$$L = 2\pi\rho_\infty U_\infty bC(k)\left[\dot{w} + U_\infty\theta + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\theta}\right] + \pi\rho_\infty b^2(\ddot{w} + U_\infty\dot{\theta} - ba\ddot{\theta}) \tag{11}$$

$$\begin{aligned} M = b\left(\frac{1}{2} + a\right)\Bigg\{2\pi\rho_\infty U_\infty bC(k) + \left[\dot{w} + U_\infty\theta + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\theta}\right] \\ +\pi\rho_\infty b^2(\ddot{w} + U_\infty\dot{\theta} - ba\ddot{\theta})\Bigg\} - \pi\rho_\infty b^3\left[\frac{1}{2}\ddot{w} + U_\infty\dot{\theta} + b\left(\frac{1}{8} - a2\right)\ddot{\theta}\right] \end{aligned} \tag{12}$$

$$k = \frac{\omega b}{U_\infty} \tag{13}$$

Burada, ω frekansı, b yarım veter uzunluğunu, U_∞ ise uçuş hızını göstermektedir. Denklemler zamandan bağımsız hale getirildikten sonra Denklem (5)'te verilen boyutsuz parametreler ile boyutsuzlaştırılmıştır. İfadeleri sadeleştirebilmek için Denklem (8)'deki katsayılara ek olarak aşağıda verilen katsayı kullanılmıştır.

$$\mu = \frac{m}{\pi\rho_\infty b^2} \tag{14}$$

Sadeleştirme işlemlerinin ardından Denklem (15) ve (16)'da verilen aeroelastik hareket denklemleri elde edilmiştir.

$$-\mu\lambda_1^4\frac{1}{\omega^2}\frac{d^4w}{d\xi^4} + \mu w + \mu\frac{X_\theta}{b}\theta - l_w w - l_\theta = 0 \tag{15}$$

$$\mu\lambda_2^2\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \mu\frac{X_\theta}{b}w + \mu\frac{R_\theta^2}{b^2}\theta + m_w w + m_\theta\theta = 0 \tag{16}$$

l_w, l_θ, m_w ve m_θ aerodinamik terimleri ifade etmektedir ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$l_w = 2\frac{i}{k}C(k) - 1 \tag{17}$$

$$l_\theta = a + \frac{2}{k^2}C(k) + \frac{i}{k}\left[1 + 2\left(\frac{1}{2} - a\right)C(k)\right] \tag{18}$$

$$m_w = 2\frac{i}{k}C(k)\left(\frac{1}{2} + a\right) - a \tag{19}$$

$$m_\theta = 2\left(\frac{1}{2} + a\right)\frac{1}{k^2}C(k) - \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2} - a\right)\left[1 - 2\left(\frac{1}{2} + a\right)C(k)\right] + a^2 + \frac{1}{8} \tag{20}$$

Eğilme ve burulma hareketi yapan ankastre bir Euler-Bernoulli kirişinin geometrik sınır koşulları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$w(0,t) = \frac{\partial w}{\partial y}(0,t) = 0 \qquad \theta(0,t) = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(l,t) = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(l,t) = 0 \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y}(l,t) = 0 \tag{22}$$

Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Diferansiyel dönüşüm yöntemi (Differential tranformation method, DTM), adi ve kısmi diferansiyel denklemleri çözmeye yarayan, Taylor seri açılımına dayanan matematiksel bir yöntemdir [Yalçın, Arıkoğlu ve Özkol, 2009]. Analitik çözüm elde edebilmek için birçok mühendislik problemine uygulanabilir. DDY ile fonksiyonlar Tablo 1'de yer alan ilişkiler kullanılarak dönüştürülür.

Tablo 1: Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi teoremleri

Asıl Fonksiyon	**Dönüştürülmüş Fonksiyon**
$f(x) = u(x) \pm v(x)$	$F(k) = U(k) \pm V(k)$
$f(x) = au(x)$	$F(k) = aU(k)$
$f(x) = \frac{du(x)}{dx}$	$F(k) = (k+1)U(k+1)$
$f(x) = \frac{d^m u(x)}{dx^m}$	$F(k) = (k+1)(k+2)\cdots(k+m)U(k+m)$
$f(x) = u(x)v(x)$	$F(k) = \sum_{l=0}^{k} V(l)U(k-l)$

Burada, $f(x)$ asıl fonksiyonu, $F(k)$ ise dönüştürülmüş fonksiyonu ifade eder. Benzer şekilde sınır koşulları da Tablo 2'de verilen kurallar ile dönüştürülür.

Tablo 2: Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi sınır koşulları teoremleri

x=0		**x=1**	
Sınır Koşulları	**Dönüştürülmüş Sınır Koşulları**	**Sınır Koşulları**	**Dönüştürülmüş Sınır Koşulları**
$f(0) = 0$	$F(0) = 0$	$f(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} F(k) = 0$
$\frac{df}{dx}(0) = 0$	$F(1) = 0$	$\frac{df}{dx}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k.F(k) = 0$
$\frac{d^2 f}{dx^2}(0) = 0$	$F(2) = 0$	$\frac{d^2 f}{dx^2}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k.(k-1)F(k) = 0$
$\frac{d^3 f}{dx^3}(0) = 0$	$F(3) = 0$	$\frac{d^3 f}{dx^3}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k.(k-1).(k-2)F(k) = 0$

DDY teoremleri sırasıyla titreşim ve çırpınma analizleri için hareket denklemleri ile sınır koşullarına uygulanmıştır. Denklem (6) ve (7)'ye DDY kurallarının uygulanmasıyla aşağıdaki dönüştürülmüş ifadeler elde edilmiştir.

$$\overline{w}[m+4] = \frac{\omega^2}{\lambda_1^4}\left(\frac{\overline{w}[m] + \overline{X}_\theta \overline{\theta}[m]}{(m+4)(m+3)(m+2)(m+1)}\right) \tag{23}$$

$$\overline{\theta}[m+2] = -\frac{\omega^2}{\lambda_2^2}\left(\frac{\overline{X}_\theta \overline{w}[m] + \overline{R}_\theta^2 \overline{\theta}[m]}{(m+2)(m+1)}\right) \tag{24}$$

Çırpınma analizi için DDY teoremlerinin Denklem (15) ve (16)'da verilen hareket denklemlerine uygulanmasıyla aşağıdaki dönüştürülmüş denklemler elde edilmiştir.

$$\overline{w}[m+4] = \frac{Z}{\lambda_1^4}\left(\frac{\overline{w}[m] + \overline{X}_\theta \overline{\theta}[m] - \frac{l_w}{\mu}\overline{w}[m] - \frac{l_\theta}{\mu}\overline{w}[m]}{(m+4)(m+3)(m+2)(m+1)}\right) \tag{25}$$

$$\overline{w}[m+2] = -\frac{Z}{\lambda_2^2}\left(\frac{X_\theta \overline{w}[m] + \overline{R}_\theta^2 \overline{\theta}[m] + \frac{m_w}{\mu}\overline{w}[m] + \frac{m_\theta}{\mu}\overline{\theta}[m]}{(m+2)(m+1)}\right) \tag{26}$$

Eğilme ve burulma serbestlik derecelerine sahip ankastre Euler-Bernoulli kirişinin sınır şartları DDY ile aşağıdaki gibi yeniden ifade edilmiştir.

$$\overline{w}(0) = \overline{w}(1) = \overline{\theta}(0) = 0 \tag{27}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k.(k-1)\overline{w}(k) = 0 \tag{28}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k.(k-1).(k-2)\overline{w}(k) = 0 \tag{29}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\overline{\theta}(k) = 0 \tag{30}$$

Dönüştürülen denklemlerin aeroelastik çözümü için k-yönteminden yararlanılmıştır. Bu yöntemde varsayılan harmonik hareketin devamlılığını sağlayabilmek için yapay bir sönümleme parametresi, g, kullanılarak çırpınma hızına ulaşılmaktadır. Çeşitli indirgenmiş frekans değerleri için Denklem (25) ve (26)'nın çözülmesiyle Z hesaplanmaktadır.

$$Z = \frac{1+ig}{\omega^2} \tag{31}$$

Z'nin hesaplanmasıyla sistemin çırpınma karakteristiğine ulaşılmaktadır. Aşağıdaki denklemler ile hızın ve frekansın sönümleme ile değişimi grafikleri elde edilmektedir. Böylece, bu grafiklerden kolayca çırpınma değerleri bulunabilmektedir.

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{Re(Z)}} \tag{32}$$

$$g = \frac{Im(Z)}{Re(Z)} \tag{33}$$

$$V_i = \frac{\omega_i b}{k} \tag{34}$$

UYGULAMALAR

İncelenecek olan kanat modellerinin doğal frekansını ve çırpınma karakteristiğini elde edebilmek amacıyla DDY kullanılarak bir MATHEMATICA kodu geliştirilmiştir. Geliştirilen kodun doğruluğunu test edebilmek adına farklı örnek çalışmalar yapılmıştır. Bu bağlamda literatürde aeroelastik çalışmaları yaygınca gerçekleştirilmiş olan iki farklı kanat tipi örnek çalışma olarak seçilmiş ve bu kanatların serbest titreşim ile çırpınma incelemeleri yapılmıştır.

Goland Kanadı

Goland kanadı geçmişten günümüze havacılık alanında birçok çalışmada kullanılmış bir kıyaslama modelidir. Tablo 3'te geometrik ve yapısal özellikleri verilen Goland kanadının sırasıyla titreşim ve çırpınma analizleri yapılmıştır.

Tablo 3: Goland kanadının yapısal ve geometrik özellikleri

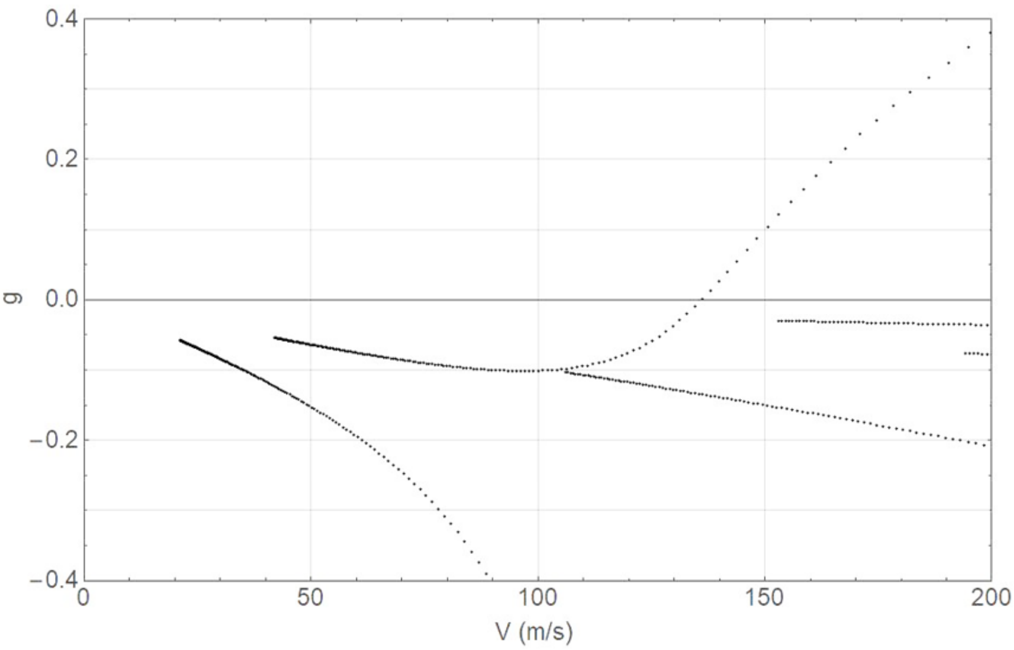
Parametre	**Değer**	**Birim**
Kanat yarı açıklığı (l)	6.096	m
Veter (c)	1.8288	m
Eğilme sertliği (EI)	9.77x10^6	$N.m^2$
Burulma sertliği (GJ)	0.987x10^6	$N.m^2$
Birim uzunluk başına kanat kütlesi (m)	35.71	kg/m
Birim uzunluk başına elastik eksen etrafındaki kütlesel atalet momenti (I_{EA})	8.64	$kg.m$
Elastik eksen konumu (y_0)	0.33c	m
Statik dengesizlik (X_θ)	6.523	kg
Hava yoğunluğu (ρ_∞)	1.225	kg/m^3

Eğilme-burulma hareketi yapan Goland kanadının titreşim karakteristiği DDY ile analiz edilmiş ve doğal frekans değerleri bulunmuştur. Tablo 4'te elde edilen ilk altı doğal frekans değeri literatürdeki bir çalışma ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 4: Goland kanadının doğal frekans değerleri

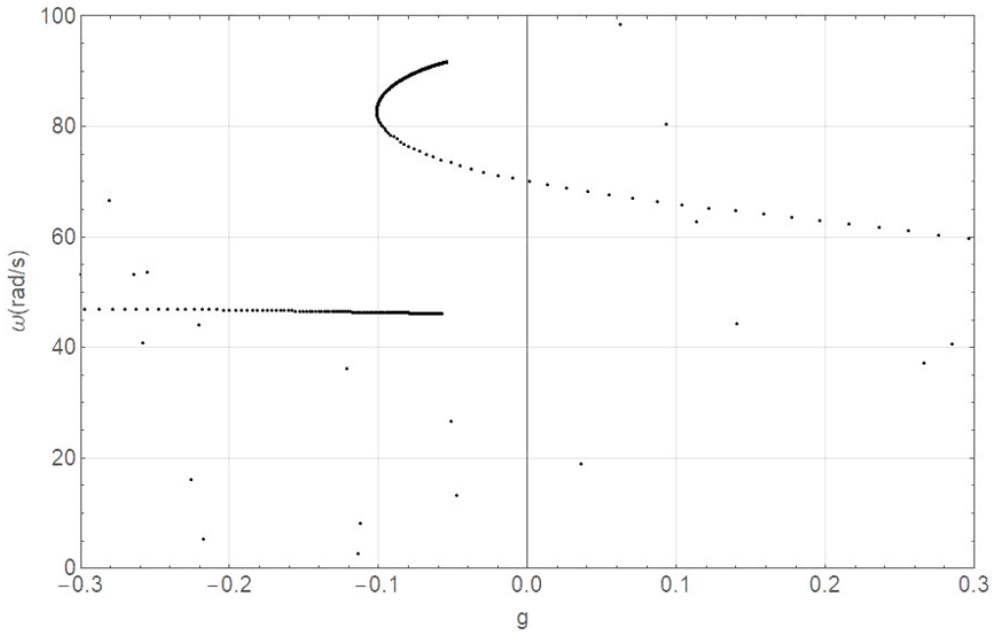
Frekans (rad/s)			
Mod #	**Çalışma**	**[Eslimy-Isfahany, 1996]**	**Hata (%)**
1	49.58	49.6	0.04
2	97.28	97.0	0.29
3	248.58	248.9	0.13
4	356.32	355.6	0.20
5	451.91	451.5	0.09
6	608.24	610.0	0.29

Değerler arasındaki en büyük hata oranı % 0.29 olarak ikinci modda bulunmuştur. Goland kanadının literatürdeki bir diğer titreşim analizi çalışması Hashemi ve Richard tarafından yapılmıştır [Hashemi ve Richard, 2000]. Hashemi ve Richard'ın çalışmasında ilk üç doğal frekans sırasıyla $49.62\ rad/s$, $97.05\ rad/s$ ve $249\ rad/s$ olarak bulunmuştur. Her iki literatür çalışması ile de DDY'den elde edilen doğal frekans değerleri oldukça tutarlıdır.
DDY ile Goland kanadının çırpınma kararsızlık sınırları belirlenmiş ve elde edilen sonuçlar literatür ile karşılaştırılmıştır. Uçuş hızının sönümleme ile değişimi her bir mod için Şekil 3'te gösterilmiştir. $V - g$ grafiği, klasik çırpınma grafiği olarak bilinmektedir ve sistemin dinamik davranışı hakkında kolayca bilgi vermektedir.



Şekil 3: Goland kanadı için uçuş hızının sönümleme ile değişimi

$V - g$ grafiğinde, eğrinin yatay ekseni kestiği, yani g'nin işaretinin negatiften pozitife değiştiği, yer kritik çırpınma hızını verir. Kritik hızın üzerindeki hızlarda çırpınma kararsızlığı görülür. Şekil 3'ten de görülebileceği üzere kritik hız yani çırpınma hızı $136.10\ m/s$ olarak bulunmuştur. Goland kanadı için frekansın sönümleme ile değişimi ise Şekil 4'te verilmiştir.



Şekil 4: Goland kanadı için frekansın sönümleme ile değişimi

Frekansın sönümleme ile değişimi grafiklerinde sönümlemenin işaret değiştirdiği yer kritik frekans değerini vermektedir. Şekil 4'ten de görülebileceği üzere Goland kanadının çırpınma frekansı 70.01 rad/s olarak bulunmuştur. Goland kanadının DDY ile analizinden elde edilen çırpınma değerleri Tablo 5'te referans bir çalışma ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 5: Goland kanadının çırpınma değerleri

	Çalışma	**[Goland, 1945]**	**Hata (%)**
Çırpınma hızı, m/s	136.10	137.16	0.77
Çırpınma frekansı, rad/s	70.01	70.70	0.97
İndirgenmiş frekans	0.47	0.471	0.21

Tablo 5'te sunulan DDY ile elde edilmiş olan sonuçlar, Goland [1945] ile kıyaslandığında oldukça düşük hata payına sahiptir. Literatürden bir diğer benzer çalışma olarak [Matter, Darabseh ve Mourad, 2018], Goland kanadını Galerkin yöntemi ile analiz etmiş ve çırpınma hızını 136.41 m/s, çırpınma frekansını ise 69.35 rad/s olarak bulmuştur. Literatürden örnek çalışma olarak seçilen her iki çalışmanın sonuçlarının da DDY ile elde edilen sonuçlarla iyi bir şekilde örtüştüğü görülmektedir.

HALE Kanadı

HALE (High-Altitude Long Endurance) kanadının yüksek kanat açıklık oranına sahip olması, aerodinamik verimliliği artırmak gibi bazı avantajlar sağlar. Bu avantajların yanı sıra, HALE kanadı dinamik kararsızlığa oldukça yatkındır [Arena, Lacarbonara ve Marzocca, 2013]. Bu özelliğinden dolayı aeroelastik çalışmalarda literatürde yaygın bir biçimde tercih edilen bir kıyaslama modelidir. Tablo 6'da yapısal ve geometrik özellikleri verilen HALE kanadının DDY ile serbest titreşim ve çırpınma analizleri gerçekleştirilmiştir.

Tablo 6: HALE kanadının yapısal ve geometrik özellikleri

Parametre	**Değer**	**Birim**
Kanat yarı açıklığı (l)	16	m
Veter (c)	1	m
Eğilme sertliği (EI)	2x10^{14}	$N.m^2$
Burulma sertliği (GJ)	1x10^{14}	$N.m^2$
Birim uzunluk başına kanat kütlesi (m)	0.75	kg/m
Birim uzunluk başına elastik eksen etrafındaki kütlesel atalet momenti (I_{EA})	0.1	$kg.m$
Elastik eksen konumu (y_0)	0.5c	m
Statik dengesizlik (X_θ)	0	kg
Hava yoğunluğu (ρ_∞)	0.0889	kg/m^3

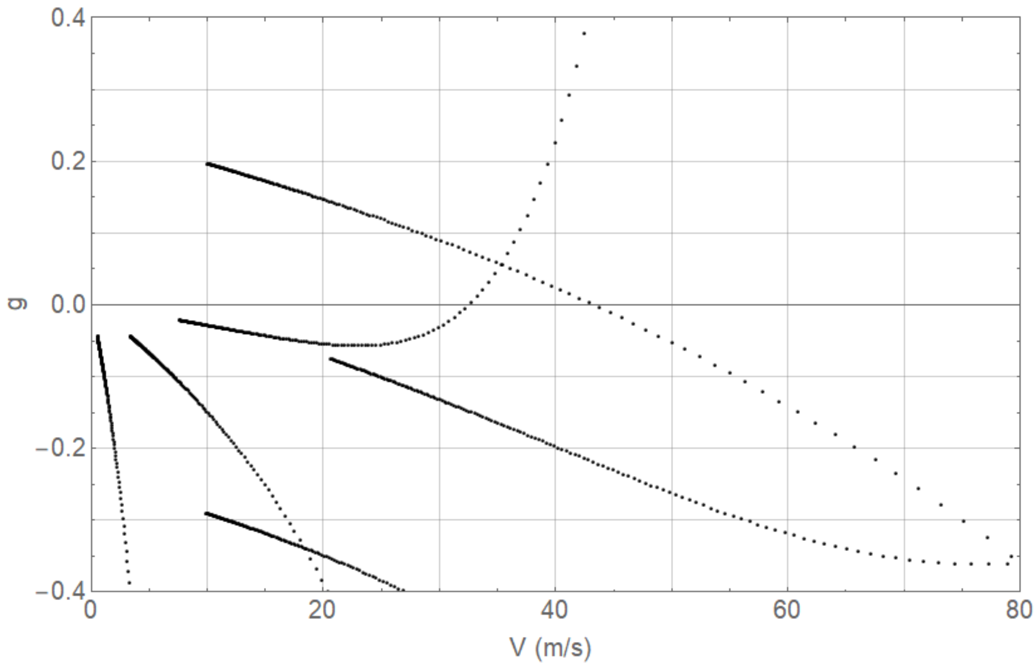
Eğilme-burulma hareketi yapan HALE kanadının ilk altı doğal frekansı Tablo 7'de sunulmuş ve literatürdeki bir çalışma ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 7: HALE kanadının doğal frekans değerleri

Frekans (rad/s)			
Mod #	**Çalışma**	**[Patil, 2001]**	**Hata (%)**
1	2.24	2.24	0
2	14.06	14.06	0
3	31.05	31.07	0.06
4	39.36	39.36	0

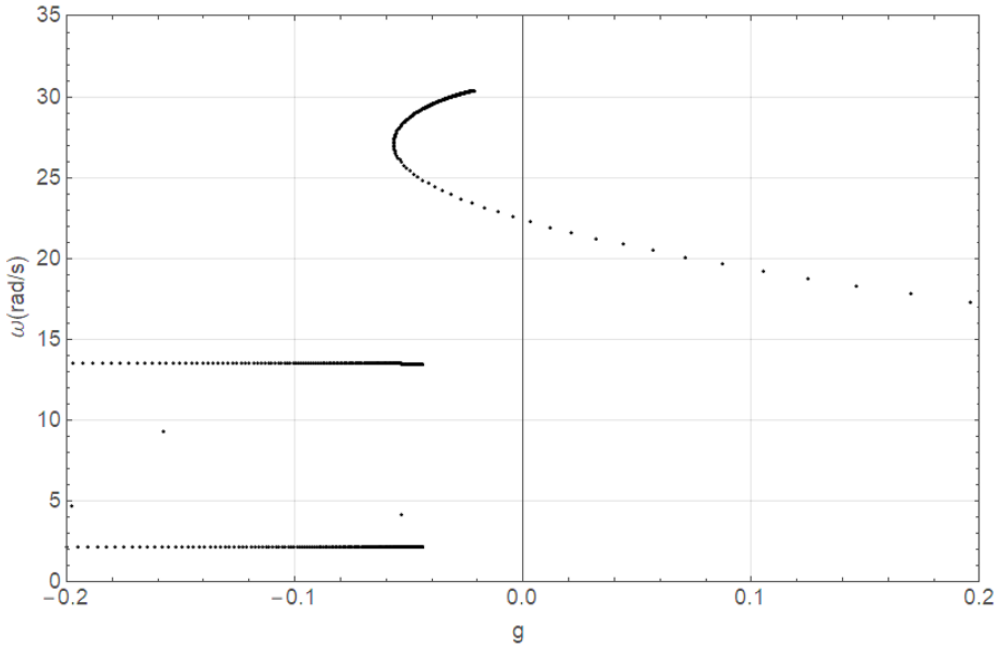
Tablo 7'den de görüldüğü gibi DDY ile elde edilen sonuçlar literatürdeki değerler ile mükemmel bir uyum içerisindedir. Üçüncü mod için bulunmuş olan doğal frekans değeri dışındaki tüm doğal frekans değerleri birebir aynı bulunmuştur ki zaten üçüncü moddaki sonuç oldukça düşük bir hata oranına sahiptir.

DDY ile HALE kanadının serbest titreşim analizinden sonra çırpınma analizi gerçekleştirilmiştir. HALE kanadı için uçuş hız ile sönümleme arasındaki ilişki, her bir mod için Şekil 5'te gösterilmiştir.



Şekil 5: HALE kanadı için uçuş hızının sönümleme ile değişimi

Şekil 5'te, g'nin işaretinin eksiden artıya geçtiği noktada sistemin kritik hızı gözlemlenebilir. HALE kanadı için çırpınma hızı grafikten $32.22\ m/s$ olarak bulunmuştur. Benzer bir çalışma [Arena, Lacarbonara ve Marzocca, 2013] tarafından yapılmış ve HALE kanadının çırpınma hızı DDY ile elde edilen kritik hıza çok yakın bir değer olan $31\ m/s$ olarak bulunmuştur. Şekil 6, sistemin frekansının sönümleme ile değişimini göstermektedir.



Şekil 6: HALE kanadı için frekansın sönümleme ile değişimi

Şekil 6'dan, sistemin kritik çırpınma frekansı $22.39\ rad/s$ olarak bulunmuştur. HALE kanadının DDY ile analizinden elde edilen çırpınma hızı ve çırpınma frekansı değerleri Tablo 8'de sunulmuş ve literatür ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 8: HALE kanadının çırpınma değerleri

	Çalışma	**[Patil, 2001]**	**Hata (%)**
Çırpınma hızı, m/s	32.22	32.21	0.03
Çırpınma frekansı, rad/s	22.39	22.61	0.97
İndirgenmiş frekans	0.347	0.350	0.86

Tablo 8'den de görülebileceği üzere HALE kanadının DDY ile analizinden bulunan çırpınma hızı ve çırpınma frekansı değerleri literatürdeki değerler ile iyi bir uyum içerisindedir.

SONUÇ

Bu çalışma kapsamında DDY ile ses altı uçuş koşullarındaki bir ankastre kanadın serbest titreşim ve çırpınma analizi yapılmıştır. Ankastre uçak kanadı Euler-Bernoulli kirişi olarak modellenmiştir. Kanada etkiyen aerodinamik yükler için Theodorsen'in aerodinamik teorisinden yararlanılmıştır. Hareket denklemleri DDY ile yeniden ifade edilerek k-yöntemiyle aeroelastik çözüme ulaşılmıştır. Doğrulama çalışmaları olarak literatürde yaygın bir biçimde aeroelastik analizleri yapılmış olan Goland ve HALE kanatları referans alınmıştır. Her iki kanat modeli için de doğal frekans, çırpınma hızı ve çırpınma frekansı değerleri elde edilmiştir. Değerlerin çeşitli grafikler ve tablolar ile kıyaslanmasıyla DDY ile elde edilen titreşim ve çırpınma değerlerinin literatürdeki verilerle çok iyi bir uyum içerisinde olduğu görülmüştür. Bu çalışmanın devamı olarak bir diğer yaygın kiriş modeli olan Timoshenko kiriş modeli ile bir uçak kanadının yine DDY ile dinamik kararsızlık analizinin yapılması planlanmaktadır.

Kaynaklar

Bisplinghoff, R. L., Ashley, H., ve Halfman, R. L., 1995. *Aeroelasticity*, Dover Publications Inc., New York.

Collar, A. R., 1946. *The Expanding Domain of Aeroelasticity*, Journal of the Royal Aeronautical Society, 1, pp. 613-636.

Yalcin, H. S., Arikoglu, A., ve Ozkol, I., 2009. *Free vibration analysis of circular plates by differential transformation method*, Applied Mathematics and Computation, 212(2), 377-386.

Eslimy-Isfahany, S. H. R., Banerjee, J. R., ve Sobey, A. J., 1996. *Response of a bending–torsion coupled beam to deterministic and random loads*, Journal of Sound and Vibration, 195(2), 267-283.

Hashemi, S. M., ve Richard, M. J., 2000. *A Dynamic Finite Element (DFE) method for free vibrations of bending-torsion coupled beams*, Aerospace Science and Technology, 4(1), 41-55.

Goland, M., 1945. *The flutter of a uniform cantilever wing*, Journal of Applied Mechanics, 12(4), A197–A208.

Matter, Y. S., Darabseh, T. T., ve Mourad, A. H. I., 2018. *Flutter analysis of a viscoelastic tapered wing under bending–torsion loading*, Meccanica, 53(15), 3673-3691.

Patil, M. J., Hodges, D. H., ve Cesnik, C. E., 2001. *Nonlinear aeroelasticity and flight dynamics of high-altitude long-endurance aircraft*, Journal of Aircraft, 38(1), 88-94.

Arena, A., Lacarbonara, W., ve Marzocca, P., 2013. *Nonlinear aeroelastic formulation and post-flutter analysis of flexible high-aspect-ratio wings*, Journal of aircraft, 50(6), 1748-1764.