

TEKİL DEĞER AYRIŞIM YÖNTEMİ İLE UYDU YÖNELİM BELİRLENMESİ VE HATA KOVARYANS ANALİZİ

Didem Ceren Mandı¹
Gazi Üniversitesi, Ankara

Cengiz Hacızade²
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ÖZET

Bu çalışmada tekil değer ayrışımı (singular value decomposition, SVD) yöntemi ile uydu yönelim belirlenmesinde Wahba problemi çözümü ele alınmıştır. Tekil değer ayrışım yöntemi diğer yöntemler arasında en güvenilir sonuç verenlerden biridir. Bu uygulamanın sonucunda optimal dönüşüm matrisinin elde edilmesi amaçlanmıştır. Elde edilen optimal dönüşüm matrisi ile Wahba'nın kayıp fonksiyonu minimize edilmektedir. Wahba'nın kayıp fonksiyonu güneş vektörü ve manyetik alan vektöründen yararlanılarak oluşturulmuştur. Söz konusu vektörleri uydu koordinat sisteminde elde etmek için bu ölçümleri gerçek hayatta kullanıcıya sağlayacak olan güneş ve manyetik alan sensörlerinin basit benzetim modelleri oluşturulmuştur. Farklı koordinat düzlemleri arasında geçişi sağlayacak dönüşüm matrisleri de hesaplamalara dahil edilmiştir. Çalışma sonucunda gerçek değerler ile hesaplanan değerler arasındaki farklar incelenmiştir ve hatanın kovaryans analizi yapılmıştır.

GİRİŞ

Gönderilen uyduların ve uzay araçlarının operasyonlarına devam etmesi için yönelimin doğru belirlenmesi hayati önem taşımaktadır. Bu nedenle, operasyon gereksinimlerine göre, uygun sensörler ve veri işleme prosedürleri kullanılarak yönelim belirleme ve kontrol sistemleri hassasiyeti geliştirilir. Bu çalışma için Wahba'nın kayıp fonksiyonundan yararlanılmıştır. 1965 yılında, Grace Wahba en küçük kareler çözümünü minimuma indirecek uygun ortogonal matris bulmayı temel alan bir problem ortaya çıkarmıştır (Markley, 1988). Wahba'nın bu problemi birçok uzay aracının yönelim belirleme algoritmasının temelini oluşturmaktadır.

Problemin çözümü için de farklı yöntemler kullanılmıştır. TRIAD (Tree Axis Attitude Determination), QUEST (QUaternion ESTimator) yöntemi, SVD (Singular Value Decomposition) yöntemi bu çözüm şekillerindendir (Wertz, 1978). SVD metodu, tekil değer ayrışım yöntemi olarak adlandırılır. Tekil değer ayrışım yöntemi, teorik analiz yapmak ve optimal yönelim matrisini belirlemek için çok uygun bir araçtır. Bu çalışmada, tekil değer ayrışım yöntemi kullanılarak yönelim hatasının kovaryans analizi yapılmıştır.

Wahba'nın Kayıp Fonksiyonu

Wahba, 3 eksenle yönelim belirleme için bir fonksiyon geliştirmiştir. Bu fonksiyon ile en küçük kareler çözümünü minimize edecek olan A_{opt} matrisinin hesaplanması hedeflenmiştir. Bu problem Wahba problemi olarak adlandırılmıştır. Wahba'nın kayıp fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

¹ Tasarım Mühendisi, E-posta: didemceren.mandi@gazi.edu.tr

² Prof. Dr, Uçak Mühendisliği, E-posta: cingiz@itu.edu.tr

$$L(A) = \sum_{i=1}^n w_i |u_B^i - Au_R^i|^2 \quad (1)$$

w_i : i. sensörün ağırlık değeri

u_B : uydu eksen takımındaki vektör

u_R : referans takımındaki vektör

n : vektör sayısı

A : referans eksen takımından uydu eksen takımına dönüşüm matrisi.

Kayıp fonksiyonu, ölçülen ve dönüştürülen vektörler arasındaki farkın karesinin ağırlıklı toplamıdır. Kayıp fonksiyonu aşağıdaki gibi açılabilir.

$$L(A) = 1 - \sum_{i=1}^n a_i b_i^T A r_i = 1 - \text{tr}(AB^T) \quad (2)$$

Burada

$$B = \sum_{i=1}^n a_i b_i r_i^T \quad (3)$$

b_i uydu eksen takımında ölçülen birim vektör, r_i referans koordinat düzleminde birim vektör ve a_i pozitif ağırlıktır. B matrisi tekil değer ayrışımına uygundur yani tekil vektörlerine ve ortogonal matrislerine ayrılabilir. Eğer $L(A)$ minimize edilmek isteniyorsa, $\text{tr}(AB^T)$ maksimize edilmelidir.

SVD Metot

Yukarıda bahsedildiği gibi $\text{tr}(AB^T)$ maksimum olması için birçok yöntem uygulanabilir. Fakat en kesin ve güvenilir yollardan biri SVD çözümüdür (Cilden, Hajiye, Soken; 2015). B matrisinin tekil değer ayrışımı aşağıda verilmiştir:

$$B = U \Sigma^T V^T = U \text{diag}[\Sigma_{11} \quad \Sigma_{22} \quad \Sigma_{33}] V^T \quad (4)$$

burada U ve V ortogonal matrislerdir. Σ ise tekil matristir ve $\Sigma_{11} \geq \Sigma_{22} \geq \Sigma_{33} \geq 0$

$$U^T A_{opt} V = \text{diag}[1 \quad 1 \quad \det(U) \det(V)] \quad (5)$$

Optimal dönüşüm matrisi,

$$A_{opt} = U \text{diag}[1 \quad 1 \quad \det(U) \det(V)] V^T \quad (6)$$

olarak belirlenir.

Kuaterniyon hata kovaryans matrisi

Optimal dönüşüm matrisi belirlendikten sonra yönelim kuaterniyonlarının doğruluğunu tespit etmek için hata kovaryans matrisi belirlenir. Kovaryans matrisi, Euler açıları için aşağıdaki formüllerle hesaplanır (Shuster, 1983)

$$P_{SVD} = U \text{diag}[(s_2 + s_1)^{-1} \quad (s_3 + s_1)^{-1} \quad (s_1 + s_2)^{-1}] U^T \quad (7)$$

$$s_1 = \Sigma_{11}, \quad s_2 = \Sigma_{22}, \quad s_3 = \det(U) \det(V) \Sigma_{33}$$

Kovaryans matrisinin kuaterniyonlar cinsinden hesaplanması için kuaterniyonla Euler açıları arasındaki aşağıdaki bağıntılar kullanılır.

$$a = \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \quad (8)$$

$$b = \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \quad (9)$$

$$c = \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \quad (10)$$

$$d = \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \quad (11)$$

Kuaterniyon hata kovaryans matrisi aşağıdakine eşittir

$$P_{Quaternion} = D \times P_{SVD} \times D' \quad (12)$$

burada

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial \phi} & \frac{\partial a}{\partial \theta} & \frac{\partial a}{\partial \psi} \\ \frac{\partial b}{\partial \phi} & \frac{\partial b}{\partial \theta} & \frac{\partial b}{\partial \psi} \\ \frac{\partial c}{\partial \phi} & \frac{\partial c}{\partial \theta} & \frac{\partial c}{\partial \psi} \\ \frac{\partial d}{\partial \phi} & \frac{\partial d}{\partial \theta} & \frac{\partial d}{\partial \psi} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Benzetim Modelleri

Dünya Manyetik Alan Modeli

Dünyanın manyetik alanının modellenmesi için farklı yöntemler mevcuttur. Bunlardan biri analitik modeldir ve çalışmada bu yöntem kullanılmıştır.

Benzetimde kullanılan yörünge alçak dünya yörüngesi olduğu için dünyanın dönüş hızı ihmal edilmiş ve manyetik alan sabit varsayılmıştır. Dünyanın manyetik alan vektörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$H_x = \frac{M_e}{r^3} \{[\sin(i) \cos(\varepsilon) - \cos(i) \sin(\varepsilon) \cos(\omega_e t)] \cos(\omega_0 t) + \sin(\varepsilon) \sin(\omega_e t) \sin(\omega_0 t)\} \quad (14)$$

$$H_y = -\frac{M_e}{r^3} \{\sin(i) \sin(\varepsilon) \cos(\omega_e t) + \cos(i) \cos(\varepsilon)\} \quad (15)$$

$$H_z = \frac{2M_e}{r^3} \{[\sin(i) \cos(\varepsilon) - \cos(i) \sin(\varepsilon) \cos(\omega_e t)] \sin(\omega_0 t) - \sin(\varepsilon) \sin(\omega_e t) \cos(\omega_0 t)\} \quad (16)$$

Burada

$M_e = 7.943 \times 10^3 [Wb.m]$, Dünya manyetik manyetik dipol momenti

$\mu = 98601 \times 10^{14} m^3/s^2$, Dünya yerçekimi sabiti

i ,	Yörünge eğikliği
$\omega_e = 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$,	Dünyanın dönüş hızı
$\varepsilon = 11.7^\circ$,	Manyetik dipol eğikliği (jeomanyetik eksen eğikliği)
$r = (6378.140 + 500 + 2 \times n) \times 1000 \text{ m}$,	Yörünge irtifası (dünya merkezinden uydu ağırlık merkezine)
$\omega_0 = \left(\frac{\mu}{r^3}\right)^{\frac{1}{2}}$	Ataletsel referans sistemine göre yörünge açısal hızı

Manyetik alan vektörü doğrultman kosinüslerle ifade edilirse vektör komponentleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$H_0 = \begin{bmatrix} H_{x0} \\ H_{y0} \\ H_{z0} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (17)$$

H_0 , doğrultman kosinüsler cinsinden manyetik alan vektörüdür,

$H_x = H_1, H_y = H_2, H_z = H_3$ manyetik alan vektör bileşenleridir.

Manyetometre Ölçüm Modeli

Manyetometre modeli, birim manyetik alan vektörünün atalet referans koordinat sisteminden uydu body eksen takımına çeviren transformasyon matrisi ile çarpılıp ve manyetometre bozuntu vektörü eklenmesiyle elde edilir.

$$H_m = AH_0 + \eta_m \quad (18)$$

η_m manyetometre bozuntu vektörüdür.

Güneş Vektörü

Güneş vektörü uydu konumunu belirlemede kullanılan bir diğer parametredir. Benzetimdeki yörünge alçak dünya yörüngesi olduğu için yörünge irtifası ihmal edilir ve güneş modeli yalnızca zamana bağlı değişir. Güneş vektörü aşağıdaki gibi hesaplanmıştır (Vallado, 2001).

$$T_{TDB} = \frac{JD_{UTC} + 2441545.0}{36525} \quad (19)$$

Güneşin ortalama boylam değeri

$$\lambda_{M_{SUN}} = 280.460^\circ + 36000.770 T_{UT1} \quad (20)$$

Güneşin ortalama anomali değeri

$$M_{SUN} = 357.257 \ 723 \ 3^\circ + 35999.050 \ 34 T_{TDB} \quad (21)$$

Güneş eliptik boylamı, $\lambda_{\text{elliptic}}$ aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\lambda_{\text{elliptic}} = \lambda_{M_{SUN}} + 1.914\,666\,471^\circ \sin(M_{SUN}) + 0.019\,994\,643 \sin(2M_{SUN}) \quad (22)$$

Son olarak dünya yörüngesi ile ekvator düzlemi arasındaki açının hesaplanması gerekmektedir.

$$\epsilon = 23.439\,291 - 0.0130\,04\,2T_{TDB} \quad (23)$$

Güneş vektörü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{s}_{ECI} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_{\text{elliptic}} \\ \sin \lambda_{\text{elliptic}} \times \cos \epsilon \\ \sin \lambda_{\text{elliptic}} \times \sin \epsilon \end{bmatrix} \quad (24)$$

Güneş vektörü benzetimi

Hesaplanan birim güneş vektörüne, vektör referans koordinat sisteminden uydu body eksen takımına çevrildikten sonra Güneş sensörü bozuntu vektörü eklenmesi ile elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_{Body_1} \\ \hat{s}_{Body_2} \\ \hat{s}_{Body_3} \end{bmatrix} = L \times \begin{bmatrix} \hat{s}_{ECI_1} \\ \hat{s}_{ECI_2} \\ \hat{s}_{ECI_3} \end{bmatrix} + \eta_s, \quad (25)$$

burada η_s Güneş sensörü bozuntu vektörüdür.

YÖNTEM VE UYGULAMALAR

Öncelikle bu algorithmada kullanılmak üzere, kuaterniyonlar ve açısal hızlar için başlangıç değerleri verilmiştir. Uydu açısal hareketinin kinematik ve dinamik modellerinin simülasyonu yapılmıştır. Yöntemin tekillik sorunu ile karşılaşmadan yürütülmesi için Euler cinsinden verilen değerler kuaterniyonlara dönüştürülmüştür.

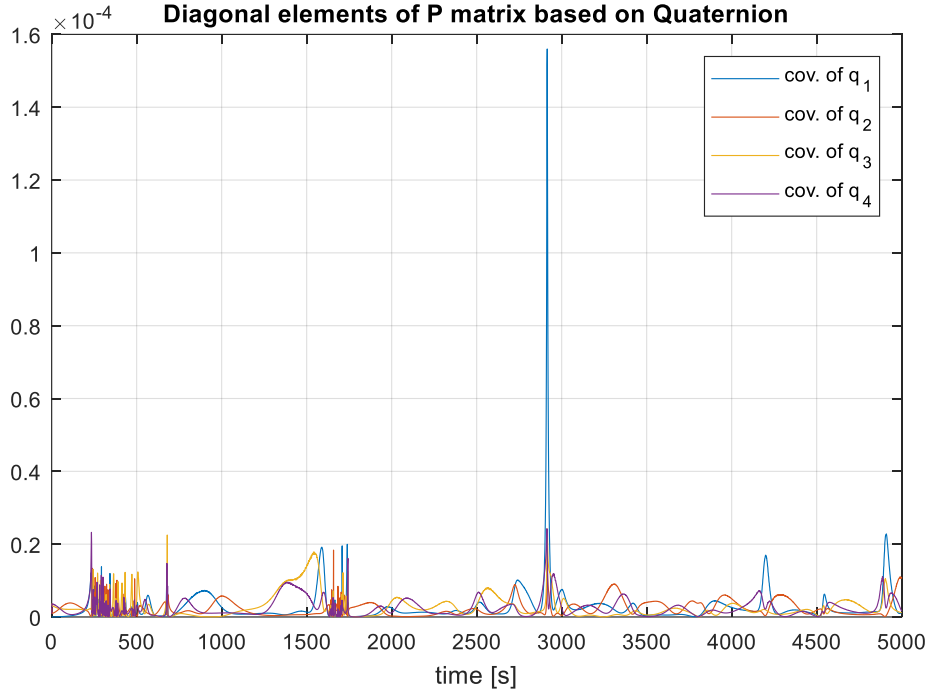
İki referans vektörün elde edilebilmesi için MATLAB'te güneş vektörü ve Dünya manyetik alan vektörü modellenmiştir. Ölçüm değerleri, ölçüm modelleme yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Hareketi üç boyutta tanımlamak için başlangıç noktası, açı veya uzunluk gerekir. Bir referans çerçevesi, bir referans sisteminin pratik olarak gerçekleştirilmesini sağlayan koordinatları ile birlikte gökyüzünde bir dizi tanımlanabilir noktadan oluşur (Kerschen, 2012). İşlemlerin doğru bir şekilde ilerleyebilmesi için vektörlerin aynı koordinat düzleminde hesaplanması gerekmektedir. Bu yüzden farklı koordinat düzlemlerindeki vektörler arasında dönüşümler uygulanır. Bu çalışmada sıklıkla koordinat sistemlerinin düzenlenmesi için dönüşüm matrislerine başvurulmuştur.

Vektörler elde edildikten sonra bunlar Wahba'nın kayıp fonksiyonuna yerleştirilmiştir. Bu işlem sonucu bulunan matris tekil değer ayrışma yöntemi ile ortogonal ve tekil matrislerine bölünmüştür. Bundaki amaç Wahba'nın kayıp fonksiyonunu en aza indirmektir ve bunun için en uygun dönüşüm matrisi hesaplanmalıdır.

Hesaplanan optimum yönelim matrisi, yönelim vektörlerinin hesaplanması işleminde kullanılır. Bu çalışmada optimum yönelim matrisi kullanılarak yönelim Kuaterniyon bulunmuştur. Yönelim hata kovaryans matrisi önce Euler açıları cinsinden hesaplanmıştır. Kuaterniyon hata kovaryans matrisi Euler açıları cinsinden hesaplanmış kovaryans matrisin dönüştürülmesi sonucu bulunmuştur. Kuaterniyon hata kovaryans matrisinin diyagonal elemanları uygun kuaterniyonların hata

varyanslarını ifade etmektedir. Kuaterniyon hata varyansları grafikleri Şekil 1’de gösterilmiştir. Sunulmuş grafikte görüldüğü gibi, kuaterniyon hata varyansları değerleri düşüktür. Bu ise uydu yöneliminin tekil değer ayrışımı yöntemi yardımı ile iyi bir doğrulukla tespit edildiğini gösterir.

Şekil 1’de verilmiş grafikte görüldüğü gibi, kuaterniyon hata varyans değerleri bazı bölgelerde büyük değerlere varmaktadır. Güneş vektörü ile manyetik alan vektörlerinin söz konusu bölgelerde paralel olduğu saptanmıştır. Bu bölgelerde SVD metodun doğruluğunun düşük olduğu görülmüştür.



Şekil 1: Kuaterniyon hata varyansları

SONUÇ

Wahba’nın kayıp fonksiyonunda kullanmak üzere güneş vektörü ve manyetik alan vektörleri belirlenmiştir. Ölçüm değerlerinin modellenebilmesi için de sensör benzetimleri yapılmıştır. Yörünge referans düzleminde elde edilen Dünya manyetik alan ve Güneşe yönelme vektörleri uydu eksen takımına dönüştürülmüştür. Bu vektörlere uygun ölçüm bozuntuları eklenerek manyetomtre ve güneş sensörü ölçümlerinin simülasyonları yapılmıştır. Oluşan vektörler Wahba’nın kayıp fonksiyonuna yerleştirilip SVD yöntemi ile dönüşüm matrisine ulaşılmıştır. Dönüşüm matrisi yardımı ile kuaterniyon değerleri oluşturulmuştur. Optimal rotasyon matrisi ile yönelim kuaterniyonları ve sonrasında kuaterniyon hata kovaryans matrisi hesaplanmıştır. Kuaterniyon hata varyans değerlerinde bazı bölgelerde sıçramalar olduğu gözlemlenmiştir. Bu bölgelerin güneş vektörü ile manyetik alan vektörlerinin paralel olduğu bölgelerde olduğu saptanmıştır. Bu bölgelerde SVD metot çözüm hassasiyetini kaybetmektedir.

Kaynaklar

- Cilden, D., Hajiyeve, C., Soken, H.E. (2015). *Attitude and Attitude Rate Estimation for a Nanosatellite Using SVD and UKF*. Recent Advances in Space Technologies, Istanbul, Turkey.
- Cilden D., Conguroglu, E. S., Hajiyeve, C. (2017). *Single Frame Attitude Determination Methods for Nanosatellites*. Istanbul, Turkey
- Kerschen, G. (2012). *The Orbit in Space and Time*. Retrieved from http://www.ltas-vis.ulg.ac.be/cmsms/uploads/File/Lecture03B_TimeSpace_2011-2012.pdf

- Markley, F.L. (1988). *Attitude Determination Using Vector Observations and Singular Value Decomposition*
- Shuster, M. D.(1983). *A Comment on Fast Three-Axis Attitude Determination Using Vector Observations and Inverse Iteration*. Retrieved from http://www.malcolmdshuster.com/Pub_1983d_J_Tietze_scan.pdf
- Vallado, D.A. (2001). *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Springer Science & Business Media.
- Wertz, J.R. (1978). *Spacecraft Attitude Determination and Control*. Kluwer