VIII. ULUSAL HAVACILIK VE UZAY KONFERANSI
9-11 Eylül 2020, Türk Hava Kurumu Üniversitesi, Ankara

UHUK-2020-065

KATLANMIŞ KOMPOZİT PLAKALARIN YAPISAL AÇIDAN İNCELENMESİ

Buse Tuğçe TEMUÇİN[1] Hasan KIYIK[2] Özge ÖZDEMİR[3] Metin O. Kaya[4]

İstanbul Teknik Üniversitesi/İstanbul

ÖZET

Bu çalışma kapsamında kompozit katlanmış plakalar, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak titreşim açısından incelenmiştir. Bu değerlendirmenin yapılabilmesi için farklı malzemeler ve sınır koşulları kullanılarak öncelikli olarak plakalar, katlanmış plakalar belirli plaka teorileri ile analiz edilmiştir. Kirchhoff-Love ve Geliştirilmiş Reissner-Mindlin plaka teorileri baz alınarak Mathematica programı ile bir sonlu elemanlar çözümü hazırlanmış ve ABAQUS yazılım paketinden de yararlanılarak model analizi yapılmıştır. Elde edilen doğal frekans değerleri literatür verileriyle kıyaslanmıştır. Elde edilen veriler doğrulandıktan sonra farklı malzemeler ve plaka teorileri için titreşim açısından yapıya etkileri yorumlanmıştır.

GİRİŞ

Hava araçlarındaki yapısalların mukavemet ve titreşim açılarından değerlendirilerek, dayanımları daha yüksek ve hafif yapıların kullanılması geçmişten günümüze daha da önem kazanmıştır. Plakalar, kabuklar, ince cidarlı kirişler ve paneller gibi hava aracı yapısallarının temelini oluşturmaktadır. Bu çalışmanın temel amacı, katlanmış plakaların yapısal açıdan incelenmesi ve titreşim açısından değerlendirilmesidir. Kompozitlerin yapısal özelliklerinin uyarlanabilir olması performans açısından tercih edilmelerini sağlamıştır. Elyaf takviyeli katmanlı kompozitlerin ortaya çıkmasıyla, katlanmış plaka yapılarının uygulanabilirliği, düşük ağırlık ve yüksek mukavemet özellikleri nedeniyle artmıştır. Katman açısını ve sıralamasını kontrol ederek farklı özellikler elde etmek mümkün hale gelmiştir [Niyogi, Laha, ve Sinha, 1999].

Plaka teorilerinden Kirchhoff ve Reissner-Mindlin teorileri karşılaştırıldığında, hem kalın hem de ince plakalarda kullanımı ve kompozit malzemede daha iyi sonuçlar vermesi açısından Reissner-Mindlin plaka teorisi üzerinde durulmuştur. Plaka kalınlığı diğer boyutlarına göre daha küçük olan plakalar ince plaka olarak adlandırılırken, bu oran daha küçük olduğunda (L/h<10) plaka kalın olarak adlandırılmaktadır[Petyt, 1990]. İzotropik malzemeler için Kirchhoff plaka teorisi ince plakalarda uygulanabilirdir. Ancak kalın ve kompozit plakalarda kayma etkisi de bulunduğundan Reissner-Mindlin teorisinin uygulanması daha yakın sonuçlar ortaya koyar. İnce yapılarda da kullanılabilen bu teorinin dezavantajı olan kayma kilitlemesini ortadan kaldırmak için çeşitli kayma gerilmesi alanları kabulü yapılır ya da indirgenmiş integrasyon yöntemi kullanılır [Oñate, 2013].

[1] Uçak Müh., Uçak Müh. Böl., E-posta: temucin@itu.edu.tr

[2] Makine Müh., Uçak Müh. Böl., E-posta: kiyik16@itu.edu.tr

[3] Yrd. Doç. Dr., Uçak Müh. Böl., E-posta: ozdemirozg@itu.edu.tr

[4] Prof. Dr., Uçak Müh. Böl., E-posta: kayam@itu.edu.tr

YÖNTEM

Reissner-Mindlin plaka teorisinin varsayımları aşağıdaki gibi verilebilir [Niyogi, Laha, ve Sinha, 1999]:

i) Plakanın orta düzleminin düzlem içi deformasyonu, plaka kalınlığı boyunca olan düzlem dışı harekete kıyasla küçüktür. (u = v = 0)

ii) Hareket boyunca kalınlık değişmez. Orta düzlemdeki her nokta aynı yer değiştirmeye sahiptir.

iii) Deformasyon sonrası plaka orta düzlemi normalindeki her nokta aynı eğri üzerinde kalır ancak orta düzleme dik kalmaz.

iv) Enine kayma gerilmeleri ve dönme etkileri göz önünde bulundurulur.

Mindlin teorisi iii ve iv numaralı varsayımları açısından Kirchhoff plaka teorisinden ayrılır ve dönme deplasmanlarını düşey deplasmandan bağımsız kabul eder. Diğer varsayımlar Kirchhoff teorisi ile aynıdır ancak Kirchhoff plakanın normalinin düzleme dik kaldığını ve enine kayma etkilerinin ihmal edilebileceğini söyler. Bu nedenle Kirchhoff plaka teorisi ince plakalarda, Reissner-Mindlin plaka teorisi ise kalın plakalarda önerilir. Ancak Reissner-Mindlin de çeşitli modifikasyonlar ile ince plakalarda kullanılabilmektedir.

Yapıların sonlu elemanlar yöntemi ile değerlendirilebilmesi açısından öncelikli olarak 4 düğüm noktalı iki boyutlu Q4 adı verilen elemanlar seçilmiş ve yapı bu elemanlara bölünerek, elemanlar ve düğüm noktaları numaralandırılmıştır. Bir eleman için membran, ince plaka eğilme ve kalın plaka eğilme durumlarına bağlı olarak şekil fonksiyonları elde edilmiştir. Şekil fonksiyonu bir eleman için eleman deplasmanı ile düğüm noktaları deplasmanları arasındaki ilişkiyi tanımlar. Bu fonksiyonlar düğüm noktaları baz alınarak serbestlik derecelerine göre oluşturulmuştur. Böylece elemanın katılık ve kütle matrislerinin eldesinde kullanılmıştır.

Reissner-Mindlin teorisi ince plakalarda kullanıldığında kayma kilitlemesi adı verilen sorunlar ortaya çıkmaktadır. Bunun nedeni plaka kalınlığı olan h azaldıkça, kayma katılığının sistemi domine ederek aşırı rijit bir duruma sokmasıdır. Bu olaya kayma kilitlemesi adı verilir. Bu durumu düzeltmek ve ince plakalarda da Mindlin teorisi kullanabilmek için bu çalışmada teori içerisindeki kayma katılığı Gauss integrasyon yöntemi ile indirgenmiştir. Gauss yöntemi için de boyutsuz eksende (0,0) noktasında denklem 1'de verilen şekilde integrasyon yapılarak kayma katılığı terimleri indirgenmiştir.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f\, dA = \iint_{-1}^{1} \phi(\xi,\eta)\, \det J\, d\eta d\xi = \sum_i \sum_j W_i W_j \phi(\xi_i,\eta_j) \quad (1)$$

Bu denklemde J jakobiyen matrisi, η ve ξ sırasıyla boyutsuz x ve y eksenleri, W gauss ağırlık faktörü olarak adlandırılır.

İzotropik Plaka

İlk olarak izotropik malzemeye sahip homojen düz bir plaka Reissner-Mindlin teorisi baz alınarak modellenmiştir. Her düğüm için 3 serbestlik derecesi verilmiştir. Bunun nedeni teorilerin homojen ve izotropik plakalarda orta yüzeyin referans düzlem olarak kabul etmesi ve eksenel gerilmelerin bu yüzeyde sıfır kabul edilmesinden kaynaklıdır [Oñate, 2013]. Bu kabuller u ve v eksenel yer değiştirmeler, w düzleme dik yer değiştirme ve $\theta_y\ ve\ \theta_x$ değerleri dönme etkileri ele alındığında aşağıdaki gibi verilebilir.

$$u(x,y,z) = z\theta_y(x,y) \quad v(x,y,z) = -z\theta_x(x,y) \quad w(x,y,z) = w \quad (2)$$

Sonlu elemanlar yöntemi ile çözümün devamında, T_e kinetik enerji, U_e potansiyel enerji olmak üzere, deplasmanlar ve eksenel/kayma gerilme değerleri kullanılarak enerji formüllerinden gerekli eleman kütle M_e ve K_e katılık matrislerinin formülasyonları elde edilmiştir [Petyt, 1990].

$$T_e = \frac{1}{2}\int \rho(h\dot{w}^2 + h\dot{v}^2 + h\dot{u}^2)dV = \frac{1}{2}\int \rho\left(h\dot{w}^2 + \frac{h^3}{12}\dot{\theta_x}^2 + \frac{h^3}{12}\dot{\theta_y}^2\right)dA = \frac{1}{2}\int\left(\{\dot{\delta}\}_e^{\,T}[m_e]\{\dot{\delta}\}_e\right) \quad (3a)$$

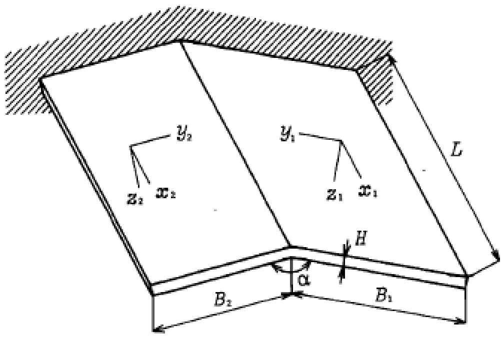
$$U_e = \frac{1}{2}\int \frac{h^3}{12}\{X\}^T[D]\{X\}\,dA + \frac{1}{2}\int \kappa h\{Y\}^T[D^s]\{Y\}\,dA = \frac{1}{2}\int \left(\{\dot{\delta}\}_e^{\ T}[k_e]\{\dot{\delta}\}_e\right) \tag{3b}$$

$$[K]_e = [K]_b + [K]_s = \int [B]^T[D][B] = \int [B^s]^T[D^s][B^s] + \int [B^b]^T[D^b][B^b] \tag{4a}$$

$$[M]_e = \int [N]^T[\rho][N] \tag{4b}$$

Bu denklemlerde B gerinme matrisi, B^b eğilme gerinmeleri matrisi, N şekil fonksiyonu matrisi, D malzeme özellikleri elastisite matrisi, D^s kayma elastisite matrisi, D^b eğilme elastisite matrisi, X ve Y elemanın eksenel ve kayma gerinmeleri, K_s kayma katılığı, K_b eğilme katılığı olarak adlandırılır. Denklem 4a ve Denklem 4b ile verilen eleman matrisleri, sonlu elemanlar kurallarına göre toplanarak global kütle ve global katılık matrisleri elde edilir. K_e eleman katılığı, M_e eleman kütlesi ve w doğal frekans tanımlarıdır. Global matrislere sınır şartları uygulanarak matris indirgemesi yapılır ve indirgenmiş matristen doğal frekanslar w olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[K]_e - [M]_e\{w^2\} = 0 \tag{5}$$



Şekil 1: Ankastre Katlanmış Plaka [Irie, Yamada, ve Kobayashi, 1984].

Katlanmış ya da kenarlardan birleştirilen plakalar Şekil 1'de görülebilir. Bu plakalarda farklı lokal eksenlerin kullanılmasından dolayı bu lokal eksenlerin bir global eksene taşınması gerekliliği ortaya çıkmıştır. Bu transformasyon sırasında bir plakanın düzlem dışı ekseni global eksende düzlem içi bir eksene denk gelebileceğinden dolayı, düzlem içi etkilerin de göz önünde bulundurulması gerektiği görülmüş ve eksenel gerilmeler hesaba katılmıştır. Bunun neticesinde 5 serbestlik derecesine sahip bir sisteme ulaşılmış, delme (dikey eksende dönme) serbestlik derecesi de aynı nedenle eklenerek global kütle ve katılık matrisleri 6 serbestlik derecesine genişletilmiştir [Niyogi, Laha, ve Sinha, 1999]. Bu transfer işlemi için plakalar arası açıya bağlı olarak tanımlanan denklem 7a'da verilen T transformasyon matrisi kullanılmıştır. Denklem 7b'de görülebileceği gibi katılık ve kütle matrisi transferleri yapılmıştır.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{4} N_j [I_5] \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_{x_j} \\ \theta_{y_j} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} \tag{6}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad [R] = \begin{bmatrix} Cos[X,x] & Cos[Y,x] & Cos[Z,x] & 0 & 0 & 0 \\ Cos[X,y] & Cos[Y,y] & Cos[Z,y] & 0 & 0 & 0 \\ Cos[X,z] & Cos[Y,z] & Cos[Z,z] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cos[X,x] & Cos[Y,x] & Cos[Z,x] \\ 0 & 0 & 0 & Cos[X,y] & Cos[Y,y] & Cos[Z,y] \\ 0 & 0 & 0 & Cos[X,z] & Cos[Y,z] & Cos[Z,z] \end{bmatrix} \tag{7a}$$

$$[K]_g = [T]^T[K]_p[T] \quad [M]_g = [T]^T[M]_p[T] \tag{7b}$$

Kompozit Plaka

Günümüz havacılığında önemli yere sahip olan kompozit malzemelerin yapısal etkisinin görülmesi amaçlanarak, kalın ve ince plakalarda kompozit malzemeli bir kutu kirişinin doğal frekansları incelenmiştir. Kompozitlerde lamine yapıdan dolayı eksenel kuvvetler ve düzlem içi gerilmeler etkin durumdadır aynı nedenle enine kayma gerilmeleri de göz önünde bulundurulmalıdır. Bu nedenle referans düzlem olan orta yüzeyde eksenel yer değiştirmelerin hesaba katılması gerekir. Membran, eğilme ve kayma etkilerinin kompozit malzemeler için seçilen plaka teorisine membran eleman katılık ve kütle matrislerinin de eklenmesi ve serbestlik derecesinin denklem 8'de gösterildiği gibi 3'ten 5'e çıkarılması gerekliliği ortaya çıkar.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{4} N_j [I_5] \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_{x\,j} \\ \theta_{y\,j} \end{Bmatrix} \tag{8}$$

$$[K]_e = [K]_m + [K]_b + [K]_s + [K]_{mb} \tag{9}$$

Bu denklemlerde K_m membran katılığı, K_{mb} membran-eğilme katılığıdır. Tüm etkilerin titreşim üzerindeki sonuçlarını görebilmek ancak Reissner-Mindlin plaka teorisinin genişletilmiş versiyonunun uygulanması ile mümkün olmuştur. Aynı zamanda kompozit malzemelerde eğilme ve membran etkilerinin birbirine bağlı etkileri de görülür. Bu etkilerin hepsini her katman için ABD adı verilen klasik laminasyon teorisine bağlı D matrisi kullanarak görebiliriz [Reddy,2004].

$$D = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \tag{10a}$$

$$B = \begin{bmatrix} N_{j,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{j,y} & 0 & 0 & 0 \\ N_{j,y} & N_{j,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{j,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{j,y} \\ 0 & 0 & 0 & N_{j,y} & N_{j,x} \\ 0 & 0 & N_{j,y} & 0 & N_j \\ 0 & 0 & N_{j,x} & N_j & 0 \end{bmatrix} \tag{10b}$$

$$[B_{ij}] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[\bar{Q}_{ij}]^k ({z_k}^2 - {z_{k-1}}^2)\ , \quad [D_{ij}] = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}[\bar{Q}_{ij}]^k ({z_k}^3 - {z_{k-1}}^3) \quad i,j = 1,2,6 \tag{10c}$$

$$[A1_{ij}] = \sum_{k=1}^{n}[\bar{Q}_{ij}]^k (z_k - z_{k-1}) \quad i,j = 1,2,6, \quad [A2_{ij}] = \sum_{k=1}^{n}[\bar{Q}_{ij}]^k \kappa (z_k - z_{k-1}) \quad i,j = 4,5 \quad \kappa = 5/6 \tag{10d}$$

$$[K]_m = \int [B_m]^T [A_{ij}][B_m] dA \qquad [K]_b = \int [B_b]^T [D_{ij}][B_b] dA \qquad i,j = 1,2,6 \tag{10e}$$

$$[K]_s = \int [B_s]^T [A_{ij}][B_s] dA \quad i,j = 4,5 \qquad [K]_{mb} = \int [B_m]^T [B_{ij}][B_b] + [B_b]^T [B_{ij}][B_m] dA \quad i,j = 1,2,6 \tag{10f}$$

Bu denklemlerde $A1_{ij}$, $A2_{ij}$, B_{ij} ve D_{ij} matrisleri sırasıyla kompozit bir laminenin eksenel, kayma, eksenel-eğilme ve eğilme katılığıdır ve bunlar Q ile belirtilen plakanın açısal dizilimine bağlı olarak elde edilen matrislere bağlıdır.

UYGULAMALAR VE DEĞERLENDİRME

Düz ve homojen-izotropik bir plakanın boyutsuz doğal frekans değerleri ve ABAQUS yazılım paketinden yararlanılarak elde edilen frekans değerlerinin karşılaştırılması Tablo 1'de yer almaktadır. (2a = 1; 2b = 1; h = 0.1; E = 10920; v = 0.3; ρ=1; 4 kenarından basit mesnetlenmiş.)

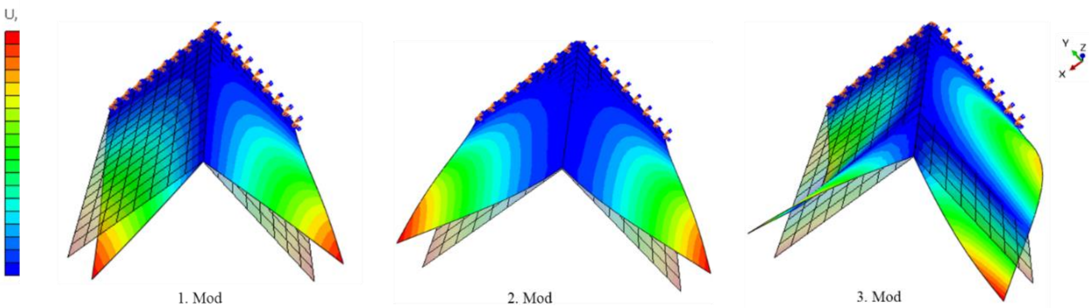
Tablo 1: Boyutsuz frekans karşılaştırma $\lambda^{0.5} = hw\sqrt{\rho/G}$.

Modlar	Kod Çözümü	ABAQUS Çözümü	Sonlu Eleman Yöntemi (Petyt, 1990)	Analitik (Petyt, 1990)
(1,1)	0.0934	0.0933	0.0945	0.0930
(2,1)	0.2250	0.2247	0.2347	0.2218
(2,2)	0.3456	0.3443	0.3597	0.3402
(3,1)	0.4286	0.4279	0.4729	0.4144
(3,2)	0.5347	0.5318	0.5746	0.5197
(3,3)	0.6894	0.6882	0.7520	0.6821

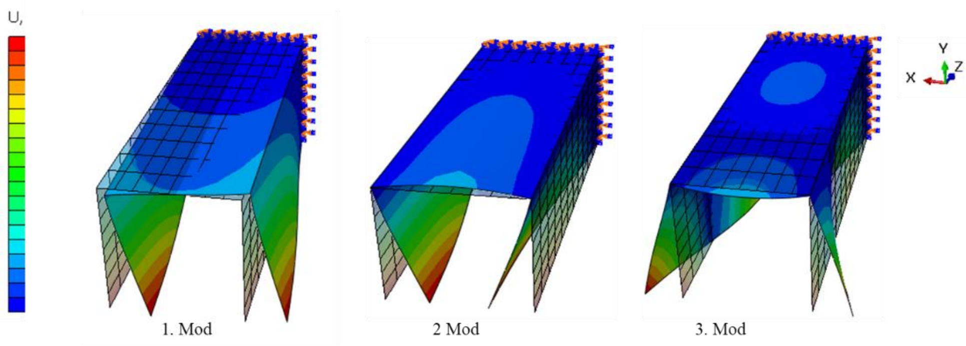
İzotropik ve homojen ince plakalar üzerinde çalışılarak 90°tek katlamalı ve iki katlamalı ankastre mesnetlenmiş plaka yapılarının titreşim değerleri elde edilerek ABAQUS yazılım paketinden elde edilen frekans değerleri ve literatür ile Tablo 2'de karşılaştırılmıştır. Plakaların mod şekilleri Şekil 2 ve Şekil 3'te görülebilir. (Bir katlama için; 2a=1.5; 2b=2a/2; h=0.03; İki katlama için; 2a=2; 2b=2a/3; h=0.04; E=10.92 GPa; v=0.3; ρ=1000 kg/m³)

Tablo 2: 90° tek/iki katlamalı ankastre ince bir plakanın boyutsuz doğal frekans değerlerinin karşılaştırılması.

Tip	Modlar	Kod Çözümü-Kirchhoff (16x8)	Kod Çözümü-Mindlin (16x8)	ABAQUS (16x8)	Liu ve Huang (1992)	Niyogi, Laha, ve Sinha (1999)
90° tek katlamalı	1	0.049	0.049	0.0487	0.0491	0.049
	2	0.0972	0.0966	0.0970	0.0971	0.0971
	3	0.1785	0.1792	0.1782	0.1786	0.1881
90° iki katlamalı	1	0.1249	0.1238	0.1234	0.1249	0.1249
	2	0.1257	0.1252	0.1271	0.1252	0.1260
	3	0.2579	0.2599	0.2678	0.2697	0.2579



Şekil 2: 90° tek katlamalı ankastre izotropik bir plakanın mod şekilleri

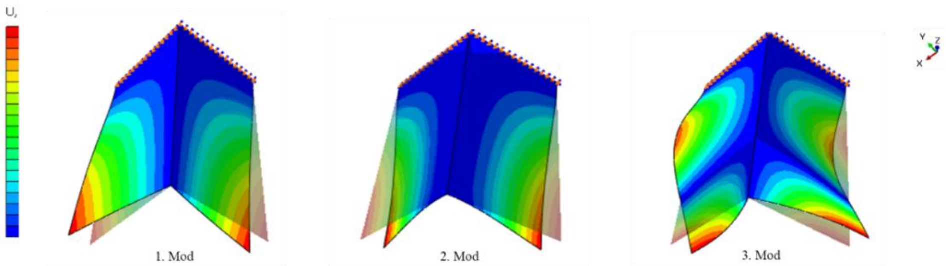


Şekil 3: 90° iki katlamalı ankastre izotropik bir plakanın mod şekilleri

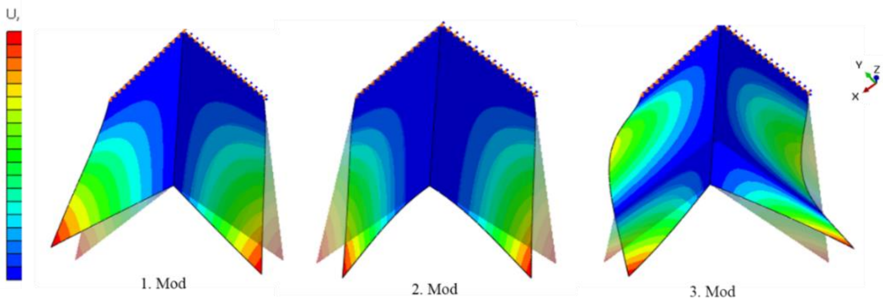
Kompozit bir plaka için 90°tek katlamalı plakaların doğal frekans değerleri sonlu elemanlar yöntemi ve Q4 elemanları kullanılarak elde edilmiştir. Katman dizilimi iki farklı şekilde eşit kalınlıkta 2 katmandan oluşan ince bir kompozit plaka katlanarak sonlu elemanlar yöntemi ile hazırlanan Mathematica kodu yardımıyla elde edilen frekans değerleri, literatür verileri ve ABAQUS yazılım paketi sonuçları ile Tablo 3'te karşılaştırılmıştır. Plakaların mod şekilleri Şekil 4 ve Şekil 5'te görülebilir. (Ankastre-2a; 2b=2a/2; h=0.02a; E1=25E2; G_{12}=G_{13}=0.5E2; G_{23}=0.2E2; ν_{12}= ν_{21}=0.25)

Tablo 3: 90° tek katlamalı ankastre ince kompozit bir plakanın boyutsuz doğal frekans değerlerinin karşılaştırılması.

Katman Dizilimi	Modlar	Kod Çözümü-Kirchhoff (16x8)	Kod Çözümü-Mindlin (16x8)	ABAQUS (16x8)	Haldar ve Sheikh (2005)
[45°/-45°]	1	5.876	5.666	5.518	5.527
	2	9.723	9.476	9.086	9.281
	3	19.459	18.585	17.887	18.216
[0°/90°]	1	3.647	3.601	3.601	3.598
	2	9.976	9.901	9.681	9.663
	3	16.237	16.098	15.894	15.776



Şekil 4: 90° tek katlanmış [45°/-45°] katman dizilimli ankastre kompozit bir plakanın mod şekilleri



Şekil 5: 90° tek katlanmış [0°/90°] katman dizilimli ankastre kompozit bir plakanın mod şekilleri

SONUÇ

Bu çalışmada katlama açısı 90°olarak kabul edilmiş ince tek ve çift katlamalı kompozit ve metal plakalar değerlendirilmiş, mod şekilleri ve doğal frekans değerleri çıkartılmıştır.
Sonuç olarak, farklı dizilimlerin frekans değerlerini etkilediği, membran etkilerinin ve yanal kayma etkilerinin katlanmış yapılarda önemli olduğu ortaya çıkmıştır. Reissner-Mindlin çözümünün modifikasyonlarla kullanıldığında izotropik ince plakalarda Kirchhoff kadar iyi sonuç verdiği, kompozitlerde Kirchhoff'tan daha doğru sonuç verdiği görülmüştür. Bu çalışmanın asıl amacı olan yapıların farklı plaka teorileri ile analiz edilebilmesi ve titreşim açısından daha iyi sonuçlar elde edilebilmesi konusunda başarılı olunmuştur. Bu konuda çok sayıda farklı teori ve uygulama yöntemleri ile bilgisayar kodu yazılmıştır.

Kaynaklar

Haldar, S., ve Sheikh, A. H. (2005). Free Vibration Analysis of Isotropic and Composite Folded Plates Using A Shear Flexible Element. *Finite Elements in Analysis and Design*, 208-226.

Irie, T., Yamada, G., ve Kobayashi, Y. (1984). Free vibration of a cantilever folded plate. *J. of Acoustial Society of America*, 1743-1748.

Liu, W. H., ve Huang, C. C. (1992). Vibration Analysis of Folded Plates. *Journal of Sound and Vibration, 157*(1), 123-137.

Niyogi, A. G., Laha, M. K., ve Sinha, P. K. (1999). Finite element vibration analysis of laminated. *Shock and Vibration*, 273-283.

Oñate, E. (2013). *Structural Analysis with the Finite Element Method* (Vols. Beams, Plates and Shells). Barcelona,Spain: Springer.

Petyt, M. (1990). *Introduction to Finite Element Vibration Analysis.* Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of Laminated Composite Plate and Shells.* NewYork, United States of America: CRC Press LLC.