

## TÜRBÜLANSIN BİR PROBLEMİ VE “TÜRBÜLANSIN KUANTİK DAVRANIŞI” YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜMÜ

Cahit Çıray\*, ODTÜ-Ankara

### ÖZET

*Türbülanslı akımların klasikleşmiş bir problemi, türbülanslı ortamın yapı taşları olan çevrintilerin boyutları ile de özdeşleştirilen “dalga boylarının frekans ile olan bağlantısıdır”.*

*Bu tebliğde anılan problemin çözümüne ilişkin ilk çalışmalar ve bugün varılan noktanın özetlenmesinden sonra yazarın kullandığı çözüm ele alınmaktadır.*

*Çözümün temelini teşkil eden “türbülansın “kuantik yaklaşımı” anlatılmakta ve bu ad ile türbülans olayının “tanesel” ve “dalga” davranışı, moleküler hareketlilikten başlayarak bir fiziksel model (veya paradigma) bünyesinde açıklanmaktadır. Moleküllerin maruz kaldığı bir akım nedeniyle “tanesel” kütlelerin yani çevrintilerin **oluşmasındaki ilk evreler**, geliştirilen bir matematik formülasyona dayalı “moleküler benzetim” ile gösterilmektedir.*

*Devamında, kuantik davranışın dalga hareketi boyutu izah edilmekte ve bunun sonucu olarak türbülansın salınan hızlarının “grup-hızı” oldukları yargısına varılmaktadır.*

*Grup-hızı tanımı ile türbülans kinetik enerji spektrumu ölçümler bağdaştırıldığı bir çalışma ile dalga boyu-frekans ilişkisi yani türbülansın saçılım (dispersion) fonksiyonu bulunmaktadır.*

*Bu tarz hesaplamalar on değişik türbülanslı akıma uygulanmış olup bu tebliğde yalnız dördüne ait sonuçlar verilmektedir.*

*Sonuçlar türbülanslı akımların sağlaması gereken kriterler yönünden irdelenmektedir.*

---

\*Profesör(E), PhD, DIC, MS(Eng). Havacılık ve Uzay Mühendisliği Bölümü-ODTÜ.  
E-mail: cciray@metu.edu.tr

## GİRİŞ

### Problemin Tanımı.

Türbülanslı akımının yapısının belirlenmesi, türbülansın temel taşları olan çevrıntilerin özelliklerinin belirlenmesidir. Çevrıntiler bir süre için bir araya gelip beraberce hareket eden, akışkan molekülerinin teşkil ettiği maddesel kütlelerdir. Oluşumları, hareketleri, hızları, yaşam süreleri ve boyutları (her üç yönde) zaman ve uzay koordinatlarına göre gelişigüze'dir. Dolayısı ile türbülanslı akımın temel özelliklerinden olan "akım çokluklarının zaman ve uzay koordinatlarına göre gelişigüze olduğu" şeklinde tespit edilen özelliğini veren, işte bu çevrıntilerdir. Çevrıntilerin hızları yaşamları sürecinde saçılımlı-dalga özellikleri gösterirler. Dolayısı ile dalga hareketinin frekansı, dalga boyu (veya dalga sayısı) ve kinetik enerjisi vardır. Dalga boyu aynı zamanda çevrintinin boyutu olarak da düşünülebilir.

Dalga boyu ile frekans arasındaki ilişkinin, yani "saçılım ilişkisi"nin belirlenmesi veya hesabı, bu tebliğde "Türbülansın bir problemi" olarak ele alınmıştır. Bu problem için ilk öneri G.I. Taylor tarafından,

$$(1) \quad k = \frac{f}{\bar{U}}$$

şeklindeki ifade ile yapılmıştır [Taylor G.I. 1938]. Burada "f" dalganın frekansını, "k" dalga sayısını ve " $\bar{U}$ " türbülanslı akımın ölçüm yapılan (x, t) koordinatlarındaki zamansal-ortalama hızıdır. Bu ilişki, (x, t) koordinatlarındaki türbülansın salınan "u" hızı gibi bir çokluğunun, bir kayba uğramadan " $x - \bar{U}\Delta t, t - \Delta t$ ", koordinatlarından " $\bar{U}$ " hızı ile taşındığını ifade eder. Diğer bir deyişle:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

bu hipotezinin matematik ifadesidir. Türbülanslı akım çoklukları, dolayısı ile bunların yüklü olduğu çevrıntiler viskoz veya başka kökenli bir kayba uğramadan, ortalama hız ile taşınırlar. Bu davranış literatürde "donmuş veya donuk türbülans" paradigması olarak bilinir.

(1) numaralı eşitlikten anlaşılacağı gibi küçük frekanslara karşı gelen dalga sayıları çok küçük veya dalga boyları çok büyük değerler verir. Bu durum türbülanslı akımın meydana geldiği ortamın geometrik sınırlarını aşan sonuçlar verebilir ki böyle sonuçlar fiziksel olarak gerçekçi değildir. Örneğin çapı 10cm olan bir borudaki türbülanslı akımın cıdardan uzak bir noktadaki zamansal ortalama hızı 10 m/s olsun. Bu durumda, örneğin 5hertz'e karşı gelen dalga boyu 2m olur. Landau- Lifshitz akım ortamının geometrik boyutunun en büyük dalga boyu olarak kabul eder ve buna karşı gelen frekansı (1) eşitliğine göre hesaplar [Landau- Lifshitz, 1959. s: 118, *ilk üç satır*]. Verilen boru örneğinde, dolayısı ile en büyük dalga boyu 10cm ve en küçük frekans da 150 hertz olur. Yani bu akımda 0 ile 150 hertz aralığında kinetik enerji yok demektir. Oysa, spektrum ölçümlerinde bu aralıkta bir hayli kinetik enerjinin var olduğu görülür.

Anılan (1) eşitliğinin geliştirilmesi için yapılan çalışmalar genelde (1) eşitliğinin temel çizgisini takip etmişlerdir. Diğer bir deyişle, frekansa uygun düşen bir hız bulup frekansı bu hıza bölerek dalga sayısını elde etme yolunu seçmişlerdir. Hızı bulmak için takip edilen diğer bir yaklaşımda İki- nokta-çapraz-zaman-korölasyonu veya çapraz-hız-spektrumdan yararlanılır. Çapraz-hız-spektrumundan hesaplanan faz farkı yardımı ile bulunan hız (1) ifadesindeki ortalama hız yerine kullanılır. Bu yaklaşım G.I. Taylor'un "donmuş türbülans" hipotezi doğrultusundaki bir uygulamalardır. Bu konuda kapsamlı bilgi ve aynı doğrultudaki bir uygulama [de Kat R. and Ganapathisubramani B. 2015]'de görülebilir.

Bu tebliğde ise, moleküler aktiviteden başlayarak çevrıntilerin “oluşumunu” ve “hızlarının saçılımı-dalga özelliklerini” göz önüne alan, dolayısı ile türbülansın “tane ve dalgali” davranışına dayanan bir paradigmadan yola çıkılmıştır. Bu özellikler “Türbülansın Kuantik Davranışı” diye ifade edilmiştir. İlerleyen satırlarda bu anlayış çerçevesinde türbülans kinetiğinde ve türbülans yapısının incelenmesinde ortaya çıkan “dalga-sayısı-frekans ilişkisi” probleminin çözümü gösterilecektir.

### **Kuantik Davranış paradigması ve Çözüm Gelişmesi.**

Her ne kadar bu tebliğde mantıksal olarak “Türbülansın Kuantik Davranışı” paradigması önce ve salınan hızların grup-hızı olarak ele alınmaları sonra ve rn sonra da hesaplama yöntemi anlatılsa da, bu geliştirmeler zamansal olarak bu sıralamaya göre ortaya çıkmamıştır. Önce, “kızgın tel” ile neyin ölçüldüğünün analizi ile uğraşmış ve “grup hızı” kavramına erişilmiş ve takiben hesaplama tarzı ortaya atılmıştır [Çıray C., 1982]. Türbülansın fiziksel karakterinin temelde bir “sürekli ortam olamayacağı fikrinin zaman içinde benimsenmesi ile moleküler aktiviteye ilgi duyulmuş ve “moleküler simülasyon” çalışmaları sürecine geçilmiştir [Çıray C., 2017], [Eneren (Aksoy) Ş. P., Çıray C. 2017]. Nihayetle “Kuantik Davranış” paradigması fikri oluşmuştur [Çıray C, 2019].

### **BİR TÜRBÜLANS PARADİGMASI**

Türbülanslı akımın oluşması çevrıntilerin ortaya çıkması ile gerçekleşir. Çevrıntiler ise akışkanı teşkil eden moleküllerin topaklaşması ile meydana gelirler. Durağan haldeki bir akışkanın molekülleri geliş-güzel hareketlilik içindedirler. Sıfırla yüksek denilebilecek hızlar ile doğrusal veya orbital yörüngelerde ve bir eksen etrafında dönme hareketi yapabilirler. Moleküller tek çekirdekli atomik yapıya sahipse, moleküller “basit” olarak nitelendirilirler. Birden fazla çekirdeği olan moleküllerim doğrusala harekete ilaveten bir eksen etrafında dönme hareketleri de mevcuttur. İzleyen satırlarda moleküllerin (basit veya çok çekirdekli) yalnızca doğrusal hareketleri göz önüne alınacaktır. Moleküllerin birbirini takip eden iki çarpışma arasındaki hareketleri her zaman tek yönlü-doğrusal bir hareket değildir ve bu aralıktaki hareketin yörüngesi eğrisel olabilir [Eneren (Aksoy) Ş.P. and Çıray C. 2015]. Çarpışmadan sonra molekül yeni bir yön kazanır. Birbirini izleyen iki çarpışma arasındaki mesafenin (yörüngenin uzunluğu değil) ortalaması yani “Ortalama Uçuş Mesafesi; OUM” diye tanımlanır. Yörünge-uzunluğu ortalamasının “OUM”nin iki katına yakın olan durumlar Argon gazı ile yapılan simülasyonlarda tespit edilmiştir, [Eneren (Aksoy) Ş.P. 2016, Tablo 4. s.43]. Bilindiği gibi bir akışkanın kinematik viskozitesi moleküllerin ortalama hızı ile “OUM”nin çarpımı olarak hesaplanmaktadır (Doğal Viskozite). Bu hesaplama akışkanın moleküler aktiviteden başka bir hareketliliğinin olmadığı durum için geçerlidir. Akışkanın herhangi bir kütleli hareketi olması durumunda, bir raddeye kadar moleküler aktivitede ve “OUM” ile hesaplanmış olan viskozitede hissedilir bir değişikliğin olmadığı anlaşılmaktadır. Dolayısı ile akışkanın dinamik dengesinde göz önüne alınan viskozite, bu viskozitedir. Pratikte, bu durumdaki hareketlilik, akışkanın “Laminer Akımı” diye anılır. Buna “Viskoz Akım” demek daha doğrudur. Gerçekte, laminar akımlar viskoz akımların bir alt grubudur.

Akışkanın kütleli-hızının artması ile moleküllerin kütleli-hız yönünde kazandıkları hız bileşeni ile birbirlerine yaklaşımları ve beraberce hareketlendikleri, yani topaklaşmaları görülmektedir. Topaklaşma olayı, çevrıntilerin oluşması ve akımın türbülanslı rejime geçmesinin işaretidir. Topaklaşma veya bebek-çevrıntilerin oluşması moleküler-simülasyon ile elde edilmiş olup (1) ila (4) numaralı Şekillerde elde edilen ilk sonuçlar gösterilmiştir [Kabakçı İ. 2019]. Bu şekillerde değişik kütleli-hızlarda tespit edilmiş olan molekül (veya parçacık) topakları görülmektedir.

Simülasyon  $20 \times 20 \times 20 \sigma^3$  hacmine yerleştirilmiş  $\sigma = 3.4 \text{ Å}$  çapında 1000 adet Argon molekülünün 1000 ps boyunca izlenmesi ile gerçekleştirilmiştir. Beş simülasyonun bazı sonuçları aşağıdaki TABLO 1’de verilmiştir.

TABLO 1

| Deneme | Kütlesel-Hız | Topak Sayısı | Molekül sayısı |
|--------|--------------|--------------|----------------|
| -      | m/s          | -            | -              |
| I      | 89           | 2            | 14             |
| II     | 223          | 7            | 13             |
| III    | 447          | 1            | 16             |
| IV     | 894          | 4            | 18             |
| V      | 2233         | 1            | 24(şekil yok)  |

İncelemenin sınırları içerisinde, artan kütleli-hız ile topaklardaki molekül sayısının doğrusal olarak arttığı gözlenebilir. Topaklaşma ile çevrıntilerin oluştuğu makul bir düşüncedir. Dolayısı ile topaklaşma, çevrıntilerin oluşmasını ve akımın türbülanslı rejime geçilmesinin ifade eder.

Türbülanslı akımın bünyesini teşkil eden çevrıntiler şekil, büyüklük ve hayat süreleri bakımından oldukça geniş bir spektruma sahiptirler. Ömürlerinin sınırlı olması bir süre sonra bölüneceklerini ve dağılacaklarını (saçılma olayı) gösterir. Hayat süreleri boyunca hareketleri gelişigüzeldir. Boyutlarının ve şekillerinin sabit kaldığını iddia etmek mümkün değildir. Peki, o zaman çevrıntinin tanımı nedir? Benimsenen (en azından bu yazının müellifi tarafından) şöyledir:

“Bir süre için belirli bir grup içinde hareket etmeyi yeğleyen akışkan moleküllerinin teşkil ettiği bir topluluk olup bu süre içinde grup-kıyılı koronur”.

“Kıyılık” kavramı değişik şekillerde algılanmıştır. Örneğin, L. Prandtl bunu “momentum” olarak ele alırken, G.I.Taylor kıyılı “çevri” (vorticity) olarak düşünmüştür.

Çevrıntilerin hareket ve hızları gelişigüzel olup zamansal bir ortalama sağıtır ve ortalama hız yerel kütleli-hız olarak kabul edilir.

Türbülanslı rejimde akımın dinamik dengesini çevrıntilerin hareketleri tanımlar. Moleküler aktivitenin (dolayısı ile viskozitenin) etkisi azalır. Bu olgu, yani moleküler-aktivite etkisinin azalıp yerini çevrıntilerin hakimiyetine bırakması türbülanslı rejimi tanımlayan bir özelliktir. Çevrıntıyi teşkil eden moleküllerin ve/veya molekül-grupları olan parçacıkların, kendilerine özgü hareketleri vardır. Diğer bir deyişle, çevrıntiler hareketsiz parçacıklardan değil fakat bir süre beraber hareket etmeyi yeğleyen parçacıklardan meydana gelmişlerdir.

Çevrıntinin hareketi, gerçekte grup halinde hareket eden bu parçacıkların hareketlerinin bir sonucu, görüntüsü veya algılanmasıdır. Diğer taraftan, zaman boyunca oluşan ve kaybolan çevrıntinin hareketi saçılımlı-dalga hareketidir. Şekil (5)de bu iki oluşum temsil edilmeye çalışılmıştır. Sonuç olarak çevrıntinin hız- dalga boyu- ilişkisini “grup-hızı” tanımına göre ifade etmek doğru olur. Bu halde:

$$(2) \quad u = \frac{df}{dk}$$

bağlantısı geçerlidir. Dalga teorisinde grup-hızı aynı zamanda kütlenin yer-değiştirme hızı ve enerjinin taşınım hızıdır. Dolayısı ile (2) ifadesindeki “u” ister KTH (Kızgın Tel Hızölçeri) tekniği ister PIH (Parçacık Hız Ölçeri) tekniği kullanılsın, türbülansın ölçülen “salınım” hızıdır.

Salınım hızının grup-hızı olması “Türbülansın Kuantik Davranışı” yaklaşımının temelidir.

## DALGA BOYUNUN HESAPLANMASI

### Hesaplamanın Temelleri.

Şüphesiz saçılım ilişkisini bulmak için (2) eşitliği tek başına yeterli olamaz. Bu tebliğe konu olan yaklaşımda iki ilave bilgi kullanılmıştır. Bunlar salınım hızının Olasılık-Yoğunluğu-Fonksiyonu (OYoF) ve Türbülans-Kinetik-Enerji Spektrumu’dur (TükES).

TükES türbülanslı akım ortamının bir noktada deneysel olarak elde edilmiş bir ilişkidir ve frekans başına boyutsuz kinetik enerjiyi gösterir,  $G(f)$ . Tanımı:

$$u'^2 = \overline{u^2} = u'^2 \int_0^\infty G(f) df$$

olup neticede:

$$(3) \quad \int_0^\infty G(f) df = 1 \quad \text{dir.}$$

TükES ilgilenilen noktada türbülans gerçek yapısını bünyesinde taşıyan bir fonksiyondur. İzleyen hesaplama sürecinin doğru olması halinde, elde edilecek sonuçlar türbülansın o noktadaki gerçek fiziğini verir.

“Türbülansın Kuantik Davranışı” yaklaşımına göre saçılım ilişkisinin geliştirilmesinde kullanılan yardımcı ikinci kaynak “OYoF”dur ve türbülanslı akımın “salınım hızı”nın (veya anıl hızı’nın) olasılık-yoğunluğu fonksiyonudur,  $P(x)$  ile simgelenmiştir.  $(x)$  boyutsuz  $(u)$ dur.

OYoF ve TükES fonksiyonları kullanılarak:

$$(4) \quad \int_{-\infty}^\infty P(x) u^2 dx = u'^2 \int_0^\infty G(f) df$$

eşitliğini yazmak mümkündür. Bu eşitlikten yararlanarak  $u(f)$  ve  $P(f)$  ilişkileri elde edilir. Bunun için (4) eşitliği:

$$(5) \quad \int_{-x_i}^{-x_{i-1}} P_L(x) u^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_R(x) u^2 dx = u'^2 \int_{f_i}^{f_{i+1}} G(f) df$$

şeklinde kullanılmıştır. Kullanıla OYoF simetrik değildir ve  $P_L$  ile  $P_R$  sırası ile OYoF’nun sol ve sağ ayaklarıdır. Dolayısı ile aynı frekanstaki “ $\pm u$ ” hızlarının farklı olasılıklara sahip olabilirler.

(5) denklemi, OYoF’nun “ $\pm x_i$  ile  $\pm x_{i\pm 1}$ ” aralığına karşı gelen kinetik enerjinin TükES’nda “ $f$  ile  $f+df$ ” frekans aralığındaki kinetik enerjiye denk olduğunu gösterir. Denklem, OYoF’nun sol ve sağ ayak- ları için yazılarak OYoF’nun asimetrik olması göz önüne alınmıştır; Şekil (6) bu durumu ve eşitliği temsil etmektedir.

Hesap tarzının devamında, tespit edilmiş olan  $u(f)$  ilişkisi, grup-hızı ifadesini veren (2) denklemine uygulanır ve bu sefer de  $f(k)$  ve dolayısı ile  $u(k)$  bulunur.

### Çözüm İşlemleri ve Olasılık-Yoğunluğu Fonksiyonu.

Hesaplamalar yukarıda özetlenen esaslara göre önce (5) sonra da (2) denkleminin çözülmesi ile yapılmıştır. Kullanılan matematik, tanımlanan parametreler, boyutsuzlandırma, denklemlerin bilfiil hesaplamada kullanılan şekilleri ve OYüF ile ilgili matematiksel bilgiler toplu olarak “EK” de görülebilir. Oldukça detaylı olup dokuz sayfeyi bulması nedeniyle tebliğ metnine dahil edilmemiştir. Ancak çözümde kullanılan:

$$(6) \quad P(y) = P(1)y^n \exp[A^n(1 - y^n)]$$

Olasılık-Yoğunluğu-Fonksiyonu üzerinde durmak gereklidir. Bu ifade de görülen “y” aslında daha önce tanımlanmış olan “x” ile bağlantılıdır, yani:

$$(7) \quad x = \frac{u}{u'} \quad , \quad y = 1 + Ix = \frac{U}{\bar{U}} \quad \text{dır.}$$

Fiziksel açıda “I” görelî-türbülans- şiddeti ve “y” boyutsuz anıl-hız’dır. (6) eşitliğinde görülen üç sabite gelince: P(1) ve “A” her “OYüF”ün sağlaması gereken tanım koşullarından “n” değeri cinsinden hesaplanır (bkz. EK). Bunları veren eşitlikler aşağıda gösterilmiştir, (EK 21 ve EK 17).,

$$(8) \quad A = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)} \quad , \quad P(1) = \frac{nA^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)\exp(A^n)}.$$

Her iki sabit, üçüncü sabit olan “n” argümanı cinsinden Gama fonksiyonu yardımı ile hesaplanırlar. Bu sonuncu sabit ise OYüF’nün “κ” momenti “μ<sup>κ</sup>”da görülür, (EK 25).

$$(9) \quad \mu^\kappa = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^{\kappa-1} \Gamma\left(\frac{n+\kappa+1}{n}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{n+2}{n}\right)\right]^\kappa}.$$

İkinci moment ise “I” ile bağlantılıdır, (EK 6):

$$(10) \quad \mu^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{n}\right)^2} = 1 + I^2.$$

Dolayısı ile ölçüm noktasına ait türbülans şiddeti “u’”, ortalama hızı “ $\bar{U}$ ” değerler ile TÜKES fonksiyonu G(f)’nin bilinmesi halinde önce “n” hesaplanır, sonra P(y) belli olur ve nihayet (5) denkleminin çözümü yapılabilir.

Bu çalışmada kullanıla OYüF, gerçekte Maxwell-Boltzmann (veye Boltzmann) Olasılık-Yoğunluğu fonksiyonundan esinlenerek geliştirilmiştir, [Çiray C.,1980]. Bir tür “Genelleştirilmiş M-B fonksiyonu” denebilir. Bu esininin kaynağı, M-B fonksiyonunun denge durumundaki basit moleküllerin istatistiğini temeli olması ve özellikle moleküllerin hızlarının (hız bileşenlerinin değil) istatistiksel dağılımını

göstermesidir. Yazarın buradaki düşüncesi çevrintilerin istatistiğinin moleküllerinkinden çok uzakta olamadığı şeklindedir.

Şüphesiz bu kullanılan ŞOYoF bir tercih sonucudur. Simetrik, yani orijinal M-B fonksiyonu veya başka bir OYoF'nu da seçmek mümkündür. Denenecek OYoF'larının başarısı, deneysel sonuçla ile beraber değerlendirmek gerekir.

### SAYISAL SONUÇLAR

Anlatıla hesaplama tarzı on ayrı halde denenmiştir. Bu tebliğe bunlardan yalnız dördü konmuştur. Gösterilen haller TEST 2, TEST 8,9 ve TEST 10'dur bunlara hesaplama sonuçları ve ilgili akım (ve türbülans) koşulları sırası ile TABLO 2, 3, 4 ve 5'te verilmiştir.

Tabloların baş kısmında ortalama hız " $\bar{U}$ ", türbülans şiddeti " $u'$ ", görelî-türbülans-şiddeti " $I$ " ile " $n$ ",  $P(1)$ , " $A$ " değerleri sıralanmıştır. " $n$ " değerlerinin en yakın tam sayı seçilmesi nedeni ile deneyden bulunan  $I_{actua}$  ile hesaplanan  $I_n$  arasında ihmal edilebilecek farklılıklar vardır. Alt sırada kolonların başlıkları sıralanmıştır. Bunlar sırası ile frekanslar " $f$ ", spektrumda frekans aralıklarına karşıt gelen deney sonucu elde edilmiş boyutsuz kinetik enerji " $\Delta G$ " ve frekans satırında hesaplama sonucu elde edilmiş değerler yani boyutsuz salınan hız " $x$ ", dalga sayısı " $k$ ", dalga uzunluğu " $L$ " ve OYoF değerleri  $P_L$ ,  $P_R$  yer almıştır. Her tablonun altındaki şekilde ilgili TÜKES fonksiyonu görülmektedir.

**TEST**'lerin veri kaynakları ve ilgili akımların nitelikleri kısaca özetlenmiştir. Bunlardan 2 ve 10 numaradakiler sınır tabaka, 8 numaradaki ızgara türbülansı ve 9'daki boru akımıdır.

**TEST 2:** Bu hal 30X30cm<sup>2</sup> en kesitinde kapalı devre Rüzgâr Tüneline (RT) yerleştirilmiş, veteri 30cm olan, NACA 0012 kanat profili üzerinde yapılan ölçümlerden biridir. Profil 12° hücum açısında yerleştirilmiş ve KTH ölçümü hücum kenarında 4cm ve cidardan 6.7mm mesafededir. Ölçme noktasından RT'nin üst duvarına olan mesafe yaklaşık 13 cm'dir, [Çiray C. 1980 ve 2017].

**TEST 8:** Izgara mansabında oluşan türbülanslı akımda yapılmış bir çalışmadır. Ölçümler Fransız Bilim adamı Favre'a aittir. Izgara gözleri 2.5X2.5 cm<sup>2</sup> olup 5mm çapındaki çubuklardan yapılmıştır. Ölçüm yapılan nokta ızgaradan 40M (yani 40X2.5=100cm) mesafededir. TABLO 3'de görülen veriler Hinze'nin "Turbulence" kitabından derlenmiştir, [Hinze 1959, 1].

**TEST 9:** Bu çalışma bir boru akımına aittir. Laufer tarafından yapılmış olup TABLO 4'deki veriler Hinze'nin "Turbulence" kitabından derlenmiştir, [Hinze 1959, 2]. Boru çapı 25cm olup hesaplamalarda cidardan 6.25cm mesafede yapılan ölçüm sonuçları kullanılmıştır.

**TEST 10:** Bu TEST'de Klebanoff'un sınır tabaka çalışmasının verileri kullanılmıştır. Veriler gene Hinze'nin "Turbulence" kitabından derlenmiştir [Hinze 1959, 3]. Ölçme istasyonunda sınır tabaka kalınlığı 7.6 cm olup, ölçme noktası cidardan 0.05X7.6 = 0.38cm mesafededir.

### İRDELEME

**Spektrum.** Noktasal olarak yapılan TÜKES ölçümleri frekans temelinde yapılır ve 1 hertz'den başlayarak 50 -100 hertz'e kadar olan bir bandı taramak mümkündür. Dolayısı ile frekans temelinde bulunmuş bir spektrumda (f-Spektrum) küçük frekans bandı da dahil olmak üzere, türbülansın yapısı tümüyle görülür. Ancak (1) ifadesi kullanılarak f-spektrumundan elde edilen dalga-sayı temelli spektum (k-Spektrum) için aynı şeyi söylemek mümkün değildir. Gerçekten (1) transformasyonu ile hesaplanmış olan bir k-Spektrumunun f-Spektrumundan bir farkı yoktur.

Frekans değerleri sabit bir sayı “  $\frac{1}{U}$  ” ile çarpılarak dalga-sayıları elde edilmiştir. Bu nedenle k-spektrumunda belirli bir “ $k^*$ ” değerinden daha küçük dalga-sayısı bandı gösterilmez. Örneğin **TEST 9**’da yararlanılmış olan çalışmada  $k^*$  değeri 0,02 1/cm olarak görülür ki bu en büyük dalga boyu (veya çevrintinin) 50 cm olduğuna işaret eder. Halbuki boru çapı 25 cm’dir. Boru çapı ile uyumlu olan  $k^* = 0.04$ ’dür. Bu da (1) ifadesinin kullanılması halinde  $f^* = k^* \bar{U} = 0.04 \times 3000 = 120$  hertz eder. Anlaşıldığı gibi 0-120 hertz aralığında k-spektrumunda bir bilgi gözükmemektedir. Halbuki bu aralıkta önemli bir enerji miktarı olduğu gibi aynı zamanda büyük çevrintilerin olduğu bölgedir. Dolayısı ile türbülansın yapısında ve dinamiğinde göz ardı edilemez. Bu boşluğu doldurmak için TÜKES fonksiyonu  $G(k)$  yerine “ $k^2 G(k)$ ” şeklinde hesaplanmaktadır. Bu son şeklin doğal viskozite ile çarpımı, yani “ $\partial k^2 G(k)$ ”, spektrumun dinamik dengesini veren denklemde enerjinin viskoz-kayıbını (viscous dissipation) temsil eder. Türbülans enerjisinin viskozite nedeniyle uğradığı enerji kaybında küçük çevrintilerin önemini ifade eder. Büyük çevrintiler bölgesinin yapısını ne ölçüde yansıttığı sual işarettir. Diğer taraftan, spektrumun “Atalet-Alt-Bölgesi”nde (Inertial Sub Range)  $G(k) \propto k^{-\frac{5}{3}}$  davranışı gerek (1) temelli hesaplamada, gerekse Kuantik davranış yaklaşımında belirgindir.

**Çevrintiler.** Referanslardaki f-Spektrum verilerinin Türbülansın Kuantik Davranışı çerçevesinde değerlendirilmesi halinde,  $f = 1$  hertz için hesaplanan en büyük dalga boylarının (veya çevrintilerin) türbülanslı akımın zati-sınırlarını (intrinsic boundaries) aşmadığı görülür. İzleyen Tabloda sunulan dört TEST ait hesaplanan en büyük dalga boyları ile bu akımların zati-sınırlarının büyüklükleri toplu halde gösterilmiştir.

| TEST | $L_{MAX}$ (cm) | $L_{ZATI}$ (cm) | AKIM TİPİ         |
|------|----------------|-----------------|-------------------|
| 2    | 7.23           | 13              | RÜZ.TÜN.- PROFİL  |
| 8    | 057            | 2.5 ve 0.5      | IZGARA TÜRBÜLANSI |
| 9    | 2.32           | 25              | BORU AKIMI        |
| 10   | 1.13           | 7.6             | SINIR TABAKA      |

**Frekans, dalga boyu, salınım hızı ve olasılık ilişkisi,  $F(f, L, u, P)$ .** Bu dört değişkenin artan frekansa göre aldıkları değerler 2, 3, 4, 5 numaralı TABLO’lardan izlenebilir. Sunulan dört TEST’de bu değişkenlerin davranışları ortaktır. Frekansın artması ile, beklendiği gibi, dalga sayısı artar veya çevrintiler küçülür. Salınım hızlarının arttığı, hatta  $f = 5000$  hertz’deki değerin  $f = 1$  hertz’dekinin iki katına ulaştığı görülebilir. TABLO’ların son iki kolonunda bulunan OYO’F değerlerinin, artan frekans veya artan salınım hızları ile küçüldükleri görülür. Bu küçülme, olasılığın da küçüldüğüne işaret eder. Diğer bir deyiş ile, yüksek frekanstaki çevrintilerin boyutları ufak, hızları yüksek ve olası, lıkları da küçüktür. Hız salınımlarının bu davranışı, Şekil 11’de görülen “Tekleme” (Intermittency) ölçümleri ile benzerlikler taşımaktadır [Rotta J., 1956]. Benzerlik, “Tekleme”nin türbülans bölge- sindeki salınım hızlarının yüksek frekansta ve yüksek değerlerde olması, ayrıca bu bölgenin oluşma olasılığının küçük olmasıdır. “Tekleme”deki laminar denem bölge TEST’lerde görülemez. Rotta’nın ölçümleri yaklaşık 6 mm çapındaki bir boruda ve çok küçük bir Reynolds sayısında ( $Re = 2520$ ) yapılmıştır.

**Saçılım ilişkisi,  $f(k)$ .** TABLO’larda verilen frekans ve dalga sayılarından hareketle  $f(k)$  saçılım ilişkisini bulmak mümkündür. Elde edilen bu ilişkiler Şekil 12’de gösterilmiştir. Log-log kağıtta çizilmiş olan bu sonuçları alçak (1-500 hertz) ve yüksek (500-5000 hertz) frekans aralıklarında doğrusal bir değişim gösterdikleri kabul edilebilir. Bu durumda saçılım ilişkisinin genel ifadesi:



$$(11) \quad f = Ck^\beta$$

olarak yazılır. “ $\beta$ ” saçılım katsayısı olup oldukça dar bir aralıkta değişir. Dört TEST için değerler verilmiştir.

| TEST | Saçılım Katsayıları    |                |
|------|------------------------|----------------|
|      | 1-100 (veya 500) hertz | 500-5000 hertz |
| 2    | 1.2438                 | 1.221          |
| 8    | 1.4793                 | 1.2723         |
| 9    | 1.5083                 | 1.2107         |
| 10   | 1.4577                 | 1.1628         |

(11) ve (2) numaralı denklemlerden hareket ederek grup hızı ile faz hızı bağlantısı elde edilebilir.

$$u = \frac{df}{dk} = C\beta \frac{k^\beta}{k}$$

$$(12) \quad u = \beta \frac{f}{k}$$

**Çevrintilerin Hayat Süreleri.** Türbülansın Kuantik Davranışı yaklaşımında, çevrintiler dalga grubunun oluşması ile hayata gelir ve grubun saçılımı ile son bulur. Bu süre içinde grup hızı ile dalga boyu kadar yol alır. Dolayısı ile hayat süresi grubun periyodu kadardır. Dolayısı ile çevrintinin “T” haya süresi (13) ile hesaplanır.

$$(13) \quad T = \frac{L}{u}$$

Buna göre en büyük ve en küçük çevrintilerin hayat süreleri aşağıda verilmiştir.

| TEST | En Büyük | En Küçük |
|------|----------|----------|
|      | s        | $\mu$ s  |
| 2    | 0.127    | 26.4     |
| 8    | 0.105    | 27.5     |
| 9    | 0.105    | 28.1     |
| 10   | 0.105    | 28.8     |

Büyük çevrintilerin hayat süreleri  $T = 0.1$  s mertebesinde iken  $f = 5000$  hertz’salınım hızlarını vere çevrintilerin hayat süreleri çok daha kısa ve  $T = 25-20$   $\mu$ s civarındadır.

Bu çalışmada eldeki imkanlar içinde en türbülansın kinetik enerji spektrumunda ancak  $f = 5$  khertz üst sınırına kadar gidilebilmiştir. Bu gün spektrum ölçümlerinde KTH tekniği ile frekans üst sınırını 100 khertz’e çekmek mümkündür. Spektrumun yüksek frekans bölgesinin olabildiğince büyütülmesi türbülansın kökeni hakkında bilgiler vermesinin mümkün olacağı değerlendirilmektedir.

## DEĞERLENDİRME

**Ne yapıldı:** Bu tebliğde türbülansın temel taşları olan çevrintileri hem parçacık hem de saçılımlı dalga özelliklerini kapsayan “Türbülansın Kuantk Davranış” algılaması bir fiziksel paradigma çerçevesinde açıklanmıştır. Bu yaklaşımın fiziksel sonucu, salınım hızının grup hızı olmasıdır. Bu sonuç uygun bir matematikle bazı türbülanslı akımlara uygulanmış ve çevrintiler özellikleri hakkında gerçekçi değerler hesaplanabilmiştir. Bunlar çevrintilerin büyüklükleri, hayat süreleri, doğru spektrum fonksiyonu ve saçılım fonksiyonu gibi özelliklerdir. Çevrintilerin oluşmasının ilk adımı olan topaklaşmanın moleküler simülasyon ile elde edilmiş ilk sonuçları ilk defa bir yayında, bu tebliğde yer almıştır.

**Ne yapılıyor, yapılacak, yapımalı:** Öncelik, hesaplama sürecinin bir EH Yazılımı (Computer Code) haline getirmektedir. Dijital veya analog olarak kaydedilmiş KTH veya PIH ölçüm sonuçlarını veri kabul eden bu yazılım nihayetinde frekans spektrumunu ve dalga-sayısı spektrumunu, çevrinti bilgilerini ve saçılım fonksiyonunu bilgilerini “çıktı” olarak hazırlayacaktır. Bu çalışma bir hayli gelişmiş durumdadır. Bu tebliğde açıklanan fikir temelindeki TEST’lerin verileri paralelinde ama günümüzün daha hassas metotlarını kullanarak değişik akımlarda ve değişik koşullarda uygulanmalar planlanmıştır. İki Yüksek Lisans öğrencisi bu konularda çalışma halindedirler.

Üç boyutlu spektrum, tebliğde kullanılan “genelleştirilmiş M-B OYoF”nun alternatiflerini denemek, yapılacak çalışmalar arasındadır

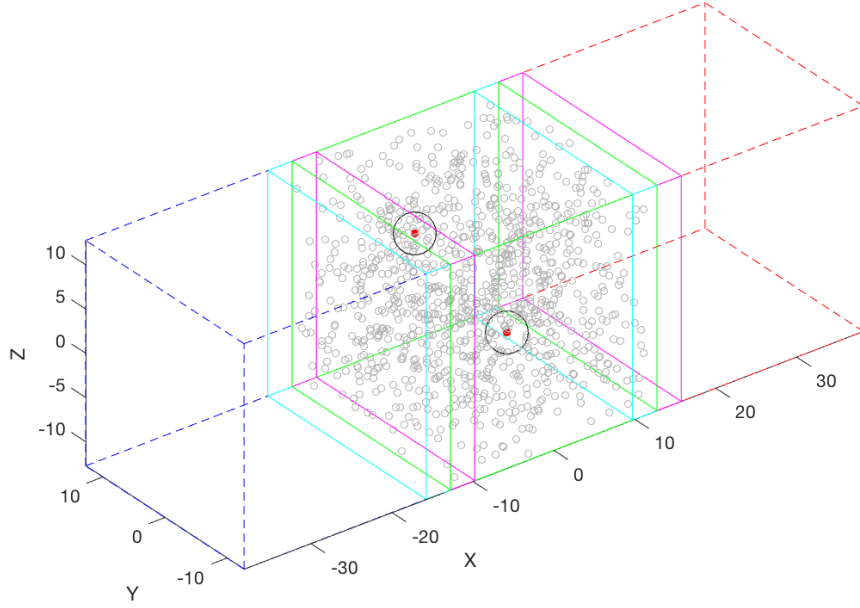
## TEŞEKKÜR

Beni sabırla dinleyen ve gerekirse dikkatimi çeken değerli dostum Prof. Dr. Cevdet Çelenligil’e, aynı şekilde desteğini ve görüşlerini esirgemeyen Dr. Mustafa Perçin’e, deneysel çalışmalara destek olan ODTÜ- RÜZGEM’e samimi teşekkürlerimi sunarım.

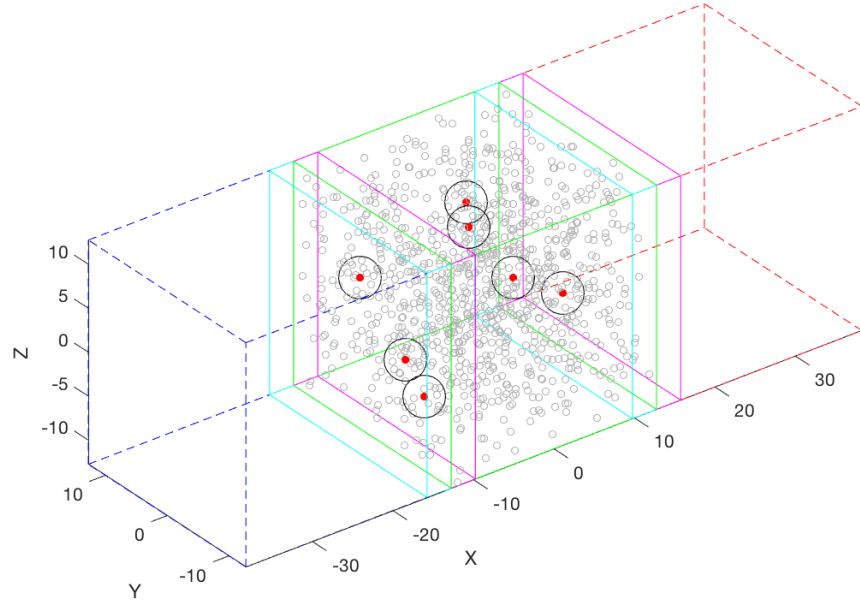
## REFERANSLAR

- [Taylor G. I. 1938], The Spectrum of Turbulence. Proceedings Royal Society, London. **164** (919), 476-490.
- [Taylor G. I., 1915], Philosophical Transactions **A**, 215 (1915), 1-26.
- [Lin C. 1953] On Taylor’s Hypothesis and the Acceleration Terms in Navier-Stokes Equations. Quarterly Appl. Math. , **10**(4). 295-306.
- [Landau-Lifshitz 1959] Fluid Mechanics. Pergamon Press, 1959. S:118.
- [de Kat R. and Ganapathisubramani B. 2015] Frequency-wavenumber mapping in turbulent shear flow. J. of Fluid Mech. (2015), Vol. 783, pp. 166-190. Cambridge University Press, 2015.
- [Çıray C., 1980] On Wave Number Definition. METU Journal of Pure and Applied Sciences. Vol.13. No:3. pp: 431-488. December 1980, (this issue appeared in 1982).
- [Çıray C., 2015] A Formulation for the Activity of Simple Molecules - Part I, AIAC 8 -2017-028. 8. Ankara İnternational Aerospace Conference, 2015..

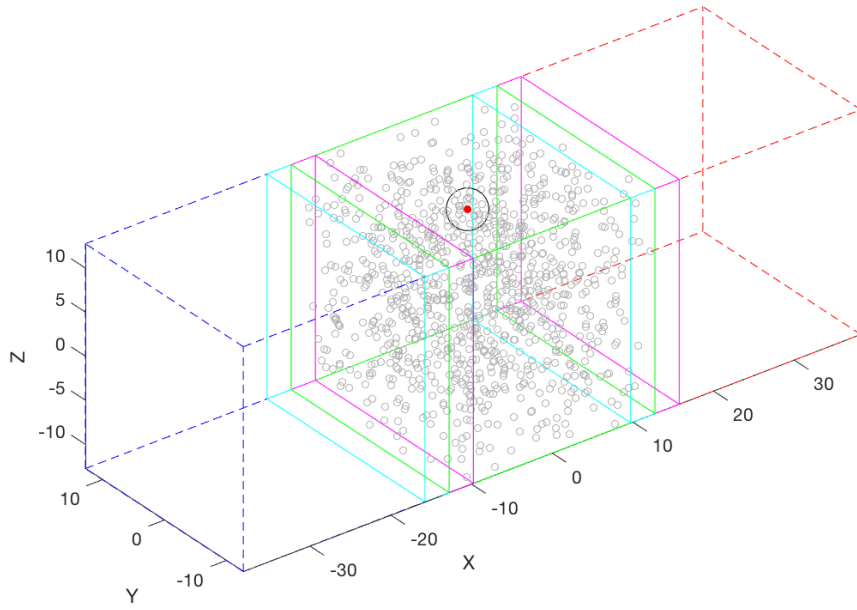
- [Eneren (Aksoy) Ş. P. and Çıray C., 2015] A Formulation for the Activity of Simple Molecules - Part II, AIAC 8 -2017-031. 8. Ankara İnternational Aerospace Conference, 2015.
- [Enere (Aksoy) Ş.P. 2016] Validation of a Particle Simulation Approach. MS Thesis. Graduate School of Pure and Applied Sciences, METU. 2016.
- [Çıray C., 2017] Wave Number in Turbulence and its Discrete Nature. AIAC 9 -2017-041, 9. Ankara İnternational Aerospace Conference, 2017.
- [Çıray C., 2019] Quantic Behavior of Turbulence, AIAC 10 -2019-044, 10. Ankara İnternational Aerospace Conference, 2019.
- [Kabakçı İ. 2019] Applications of a Particle Simulation Approach. MS Thesis. Graduate School of Pure and Applied Sciences, METU. 2019.
- [Hinze 1959,1] Turbulence. McGraw Hill, 1959. s. 61, Figure 1-18.
- [Hinze 1959,2] Turbulence. McGraw Hill, 1959. s. 269, Figure 4-3.
- [Hinze 1959,3] Turbulence. McGraw Hill, 1959. s. 501, Figure 7-23.
- [Rotta J., 1956] Ing. Archives **24**, 258-281 (1956). Bu Şekil H. Schlichting'in Boundary Layer Theory, fourth edition, McGraw Hill Co. INC, 1960, kitabının s. 37'deki şekilden kopya edilmiştir..

**ŞEKİLLER VE TABLOLAR**

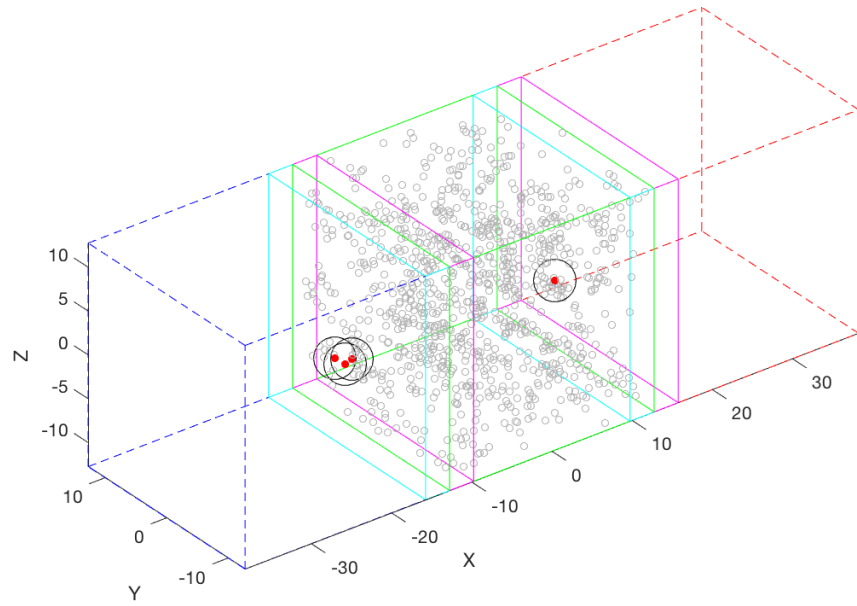
Şekil 1: Kütlesel-Hız 89 m/s ; Topak Sayısı 2 ; Tane Sayısı 14.



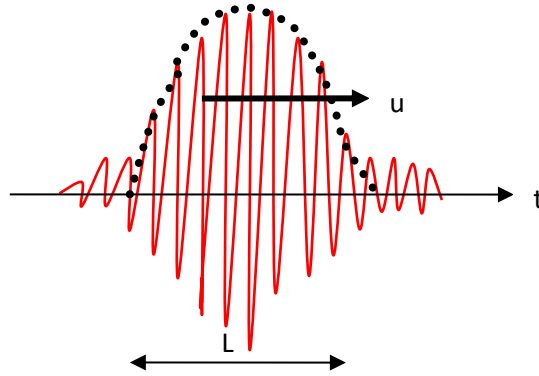
Şekil 2: Kütlesel-Hız 223 m/s ; Topak Sayısı 7 ; Tane Sayısı 13.



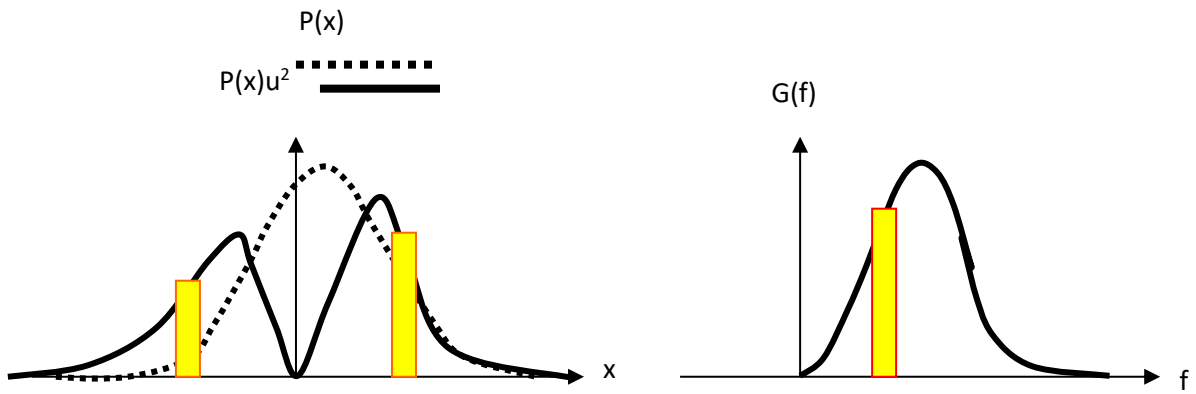
Şekil 3: Kütlesel-Hız 447 m/s ; Topak Sayısı 1 ; Tane Sayısı 16.



Şekil 4: Kütlesel-Hız 894 m/s ; Topak Sayısı 4 ; Tane Sayısı 18



Şekil 5: Çevrintinin iç Yapısı ve Saçılım Olayı



Şekil 6: Olasılık-Yoğunluğu Fonksiyonu ve (5) Denklemi.

TABLO 2  
VERİ ve SONUÇLAR. TEST 2

$\bar{U} = 32.22 \text{ m/s}$      $I_{\text{ACTUAL}} = 0.0354$      $n=35$      $A = 0.98355565$

$u'=135 \text{ cm/s}$      $I_{n=35} = 0.0352$      $P(1) = 0.4088$

| f    | $\Delta G$ | x      | k                | L      | $P_R(x)$ | $P_L(x)$ |
|------|------------|--------|------------------|--------|----------|----------|
| c/s  | -          | -      | $\text{cm}^{-1}$ | cm     | -        | -        |
| 0    |            | -      | -                | -      | 0.4088   | 0.4088   |
|      | 0.02041    |        |                  |        |          |          |
| 1    |            | 0.4214 | 0.1384           | 7.225  | 0.4564   | 0.3089   |
|      | 0.100      |        |                  |        |          |          |
| 2    |            | 0.4848 | 0.2411           | 4.1472 | 0.4546   | 0.2931   |
|      | 0.294      |        |                  |        |          |          |
| 5    |            | 0.6142 | 0.4952           | 2.0193 | 0.4419   | 0.2615   |
|      | 0.0237     |        |                  |        |          |          |
| 10   |            | 0.6920 | 0.8515           | 1.1744 | 0.4280   | 0.2413   |
|      | 0.0452     |        |                  |        |          |          |
| 20   |            | 0.8085 | 1.472            | 0.6794 | 0.3986   | 0.2171   |
|      | 0.0820     |        |                  |        |          |          |
| 50   |            | 0.9695 | 3.042            | 0.3287 | 0.3428   | 0.18     |
|      | 0.0.866    |        |                  |        |          |          |
| 100  |            | 1.112  | 5.278            | 0.1895 | 0.2825   | 0.1578   |
|      | 0.1710     |        |                  |        |          |          |
| 200  |            | 1.342  | 9.072            | 0.1102 | 0.1792   | 0.1217   |
|      | 0.2430     |        |                  |        |          |          |
| 500  |            | 1.639  | 18.44            | 0.0542 | 0.0707   | 0.0854   |
|      | 0.0926     |        |                  |        |          |          |
| 1000 |            | 1.808  | 31.94            | 0.0313 | 0.0336   | 0.0694   |
|      | 0.087      |        |                  |        |          |          |
| 2000 |            | 2.002  | 56.372           | 0.0177 | 0.0111   | 0.0544   |
|      | 0.1140     |        |                  |        |          |          |
| 5000 |            | 2.298  | 121.317          | 0.0082 | 0.0011   | 0.0371   |

TABLO 3  
VERİ ve SONUÇLAR. TEST 8

| $\bar{U} = 12.25 \text{ m/s}$ |            | $I_{\text{ACTUAL}} = 0.0200$ |                  | $n=63$          |          | $A= 0.991485$ |  |
|-------------------------------|------------|------------------------------|------------------|-----------------|----------|---------------|--|
| $u'=24.5\text{cm/s}$          |            | $I_{n=63}= 0.0199$           |                  | $P(1) = 0.4104$ |          |               |  |
| f                             | $\Delta G$ | x                            | k                | L               | $P_R(x)$ | $P_L(x)$      |  |
| c/s                           | -          | -                            | $\text{cm}^{-1}$ | cm              | -        | -             |  |
| 0                             |            | -                            | -                | -               | 0.4104   | 0.4104        |  |
|                               | 0.00298    |                              |                  |                 |          |               |  |
| 1                             |            | 0.2217                       | 1.756            | 0.5696          | 0.4495   | 0.357         |  |
|                               | 0.00298    |                              |                  |                 |          |               |  |
| 2                             |            | 0.2808                       | 2.776            | 0.3602          | 0.4562   | 0.3426        |  |
|                               | 0.00861    |                              |                  |                 |          |               |  |
| 5                             |            | 0.3838                       | 5.092            | 0.1964          | 0.4630   | 0.3161        |  |
|                               | 0.0149     |                              |                  |                 |          |               |  |
| 10                            |            | 0.4853                       | 8.043            | 0.1243          | 0.4626   | 0.2902        |  |
|                               | 0.0298     |                              |                  |                 |          |               |  |
| 20                            |            | 0.6153                       | 12.704           | 0.0787          | 0.4504   | 0.2580        |  |
|                               | 0.0893     |                              |                  |                 |          |               |  |
| 50                            |            | 0.8466                       | 23.229           | 0.0430          | 0.3946   | 0.2056        |  |
|                               | 0.130      |                              |                  |                 |          |               |  |
| 100                           |            | 1.068                        | 36.621           | 0.0273          | 0.3055   | 0.1624        |  |
|                               | 0.186      |                              |                  |                 |          |               |  |
| 200                           |            | 1.317                        | 58.123           | 0.0172          | 0.1881   | 0.1228        |  |
|                               | 0.290      |                              |                  |                 |          |               |  |
| 500                           |            | 1.656                        | 109.880          | 0.0091          | 0.0608   | 0.0822        |  |
|                               | 0.134      |                              |                  |                 |          |               |  |
| 1000                          |            | 1.893                        | 182.147          | 0.0055          | 0.0178   | 0.0614        |  |
|                               | 0.0 595    |                              |                  |                 |          |               |  |
| 2000                          |            | 2.057                        | 312.017          | 0.0032          | 0.0057   | 0.0500        |  |
|                               | 0.0513     |                              |                  |                 |          |               |  |
| 5000                          |            | 2.230                        | 670.940          | 0.0015          | 0.0013   | 0.0402        |  |



TABLO 4  
VERİ ve SONUÇLAR. TEST 9

$\bar{U} = 30.00\text{m/s}$      $I_{\text{ACTUAL}} = 0.0287$      $n=43$      $A= 0.987950$

$u'=86\text{cm/s}$      $I_{n=43}= 0.0289$      $P(1) = 0.4050$

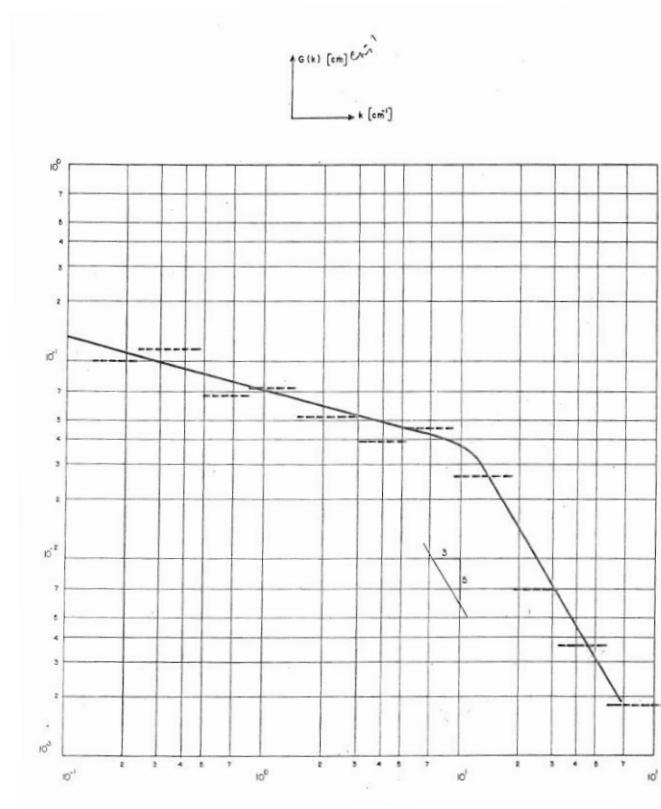
| f    | $\Delta G$ | x      | k                | L      | $P_R(x)$ | $P_L(x)$ |
|------|------------|--------|------------------|--------|----------|----------|
| c/s  | -          | -      | $\text{cm}^{-1}$ | cm     | -        | -        |
| 0    |            | -      | -                | -      | 0.4050   | 0.4050   |
|      | 0.00462    |        |                  |        |          |          |
| 1    |            | 0.2577 | 0.4310           | 2.320  | 0.4456   | 0.3462   |
|      | 0.00462    |        |                  |        |          |          |
| 2    |            | 0.3267 | 0.6811           | 1.4683 | 0.4513   | 0.3292   |
|      | 0.013      |        |                  |        |          |          |
| 5    |            | 0.4473 | 1.2447           | 0.8016 | 0.4542   | 0.2993   |
|      | 0.0462     |        |                  |        |          |          |
| 10   |            | 0.6524 | 1.9120           | 0.5231 | 0.4357   | 0.2500   |
|      | 0.0436     |        |                  |        |          |          |
| 20   |            | 0.7746 | 2.936            | 0.3406 | 0.4095   | 0.2226   |
|      | 0.105      |        |                  |        |          |          |
| 50   |            | 0.9806 | 5.433            | 0.1840 | 0.3413   | 0.1806   |
|      | 0.247      |        |                  |        |          |          |
| 100  |            | 1.306  | 8.629            | 0.1159 | 0.1985   | 0.1265   |
|      | 0.142      |        |                  |        |          |          |
| 200  |            | 1.499  | 13.83            | 0.0723 | 0.1185   | 0.1012   |
|      | 0.155      |        |                  |        |          |          |
| 500  |            | 1.724  | 27.438           | 0.0364 | 0.0513   | 0.0774   |
|      | 0.152      |        |                  |        |          |          |
| 1000 |            | 1.991  | 47.105           | 0.0212 | 0.0123   | 0.0557   |
|      | 0.0401     |        |                  |        |          |          |
| 2000 |            | 2.115  | 82.689           | 0.0120 | 0.0052   | 0.047    |
|      | 0.0318     |        |                  |        |          |          |
| 5000 |            | 2.231  | 183.553          | 0.0054 | 0.0020   | 0.0412   |

TABLO 5  
VERİ ve SONUÇLAR. TEST 10

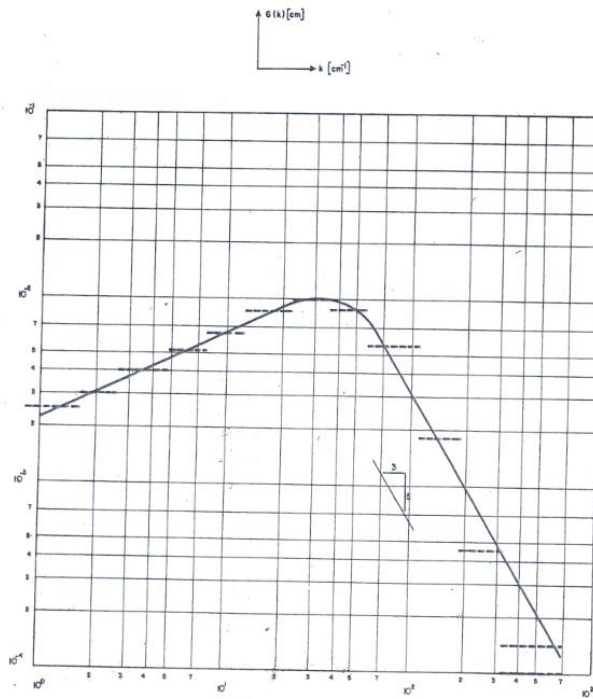
$\bar{U} = 13.15 \text{ m/s}$      $I_{\text{ACTUAL}} = 0.0228$      $n=55$      $A= 0.990351$

$u' = 30 \text{ cm/s}$      $I_{n=55} = 0.0227$      $P(1) = 0.4094$

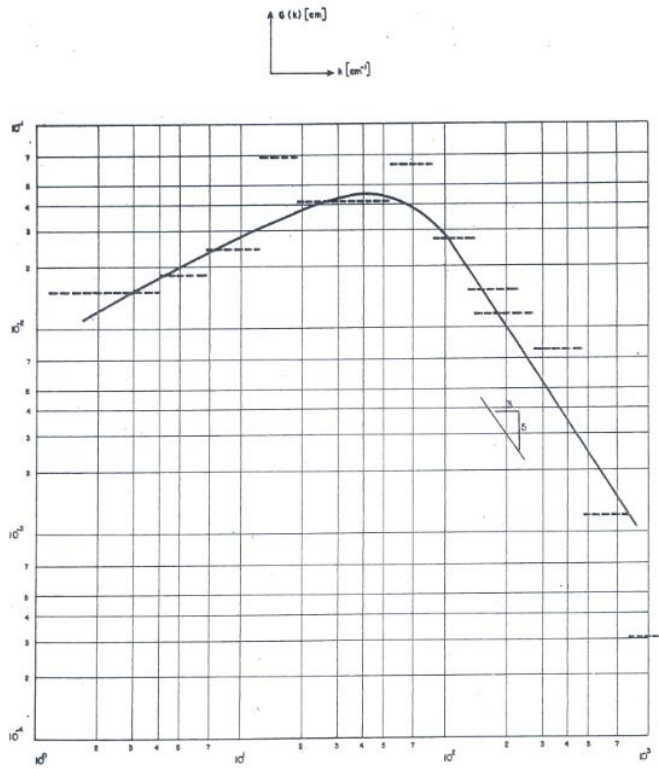
| f    | $\Delta G$ | x      | k                | L      | $P_R(x)$ | $P_L(x)$ |
|------|------------|--------|------------------|--------|----------|----------|
| c/s  | -          | -      | $\text{cm}^{-1}$ | cm     | -        | -        |
| 0    |            | -      | -                | -      | 0.4094   | 0.4094   |
|      | 0.01282    |        |                  |        |          |          |
| 1    |            | 0.3608 | 0.8826           | 1.133  | 0.4600   | 0.3220   |
|      | 0.0126     |        |                  |        |          |          |
| 2    |            | 0.4574 | 1.395            | 0.7171 | 0.4612   | 0.2974   |
|      | 0.0354     |        |                  |        |          |          |
| 5    |            | 0.6188 | 2.562            | 0.3903 | 0.4477   | 0.2576   |
|      | 0.0491     |        |                  |        |          |          |
| 10   |            | 0.7619 | 4.079            | 0.2452 | 0.4181   | 0.2245   |
|      | 0.0769     |        |                  |        |          |          |
| 20   |            | 0.9237 | 6.564            | 0.1523 | 0.3656   | 0.1903   |
|      | 0.191      |        |                  |        |          |          |
| 50   |            | 1.202  | 12.475           | 0.0802 | 0.2429   | 0.1406   |
|      | 0.         |        |                  |        |          |          |
| 100  |            | 1.404  | 20.513           | 0.0488 | 0.1508   | 0.1111   |
|      | 0.234      |        |                  |        |          |          |
| 200  |            | 1.701  | 34.006           | 0.0294 | 0.0514   | 0.0782   |
|      | 0.132      |        |                  |        |          |          |
| 500  |            | 1.943  | 68.493           | 0.0146 | 0.0137   | 0.0580   |
|      | 0.0561     |        |                  |        |          |          |
| 1000 |            | 2.107  | 120.206          | 0.0083 | 0.0042   | 0.0472   |
|      | 0.0257     |        |                  |        |          |          |
| 2000 |            | 2.206  | 217.337          | 0.0046 | 0.0018   | 0.0416   |
|      | 0.0256     |        |                  |        |          |          |
| 5000 |            | 2.313  | 495.453          | 0.0020 | 0.0006   | 0.0362   |



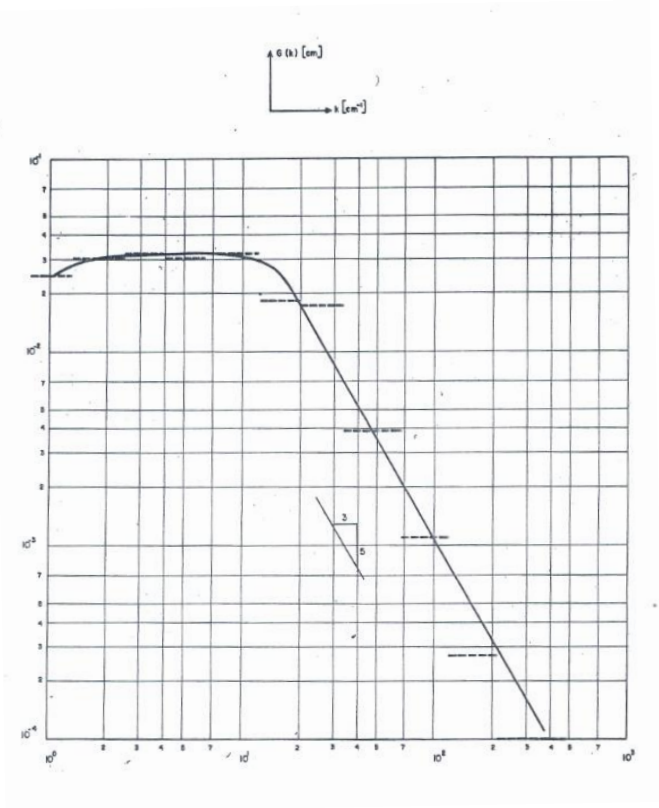
Şekil 7. Tükes Fonksiyonu. TEST 2.



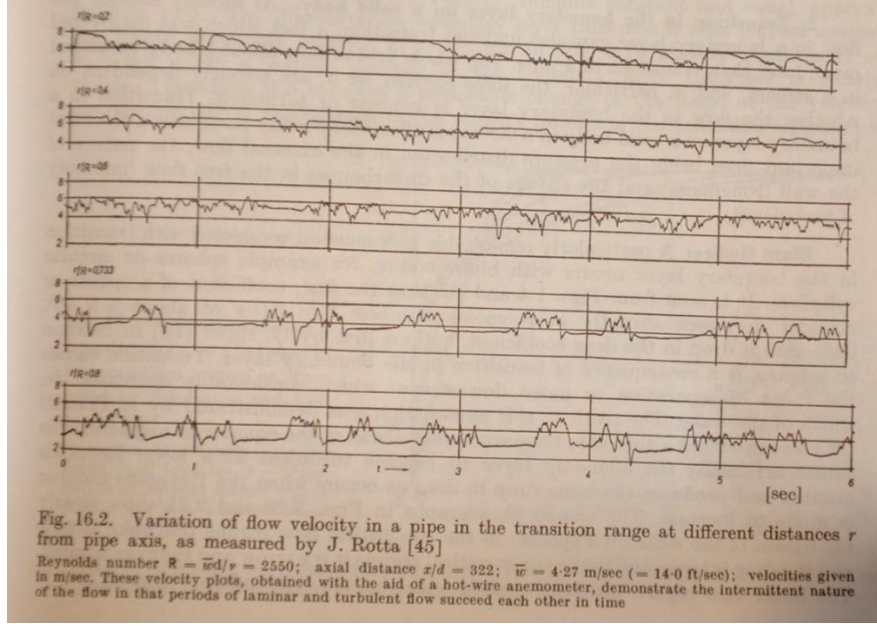
Şekil 8. Tükes Fonksiyonu. TEST 8.



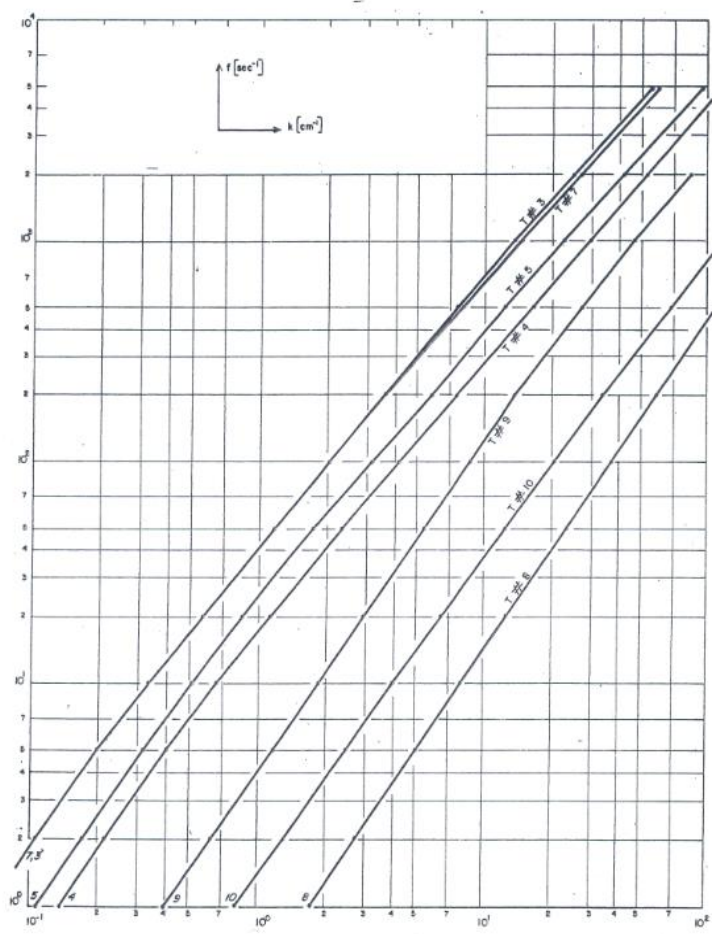
Şekil 9. Tükes Fonksiyonu. TEST 9.



Şekil 10. Tükes Fonksiyonu. TEST 10.



Şekil 11. Tekleme (Intemittency)



## MATEMATİKSEL GELİŞTİRMELER

UHUK 2020-046 TEBLİĞİ

TÜRBÜLANSIN BİR PROBLEMİ VE TÜRBÜLANSIN KUANTİK DAVRANIŞI  
YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜMÜ

## EK

**GİRİŞ:** Bu EK, “Türbülansın bir Problemi ve Türbülansın Kuantik Davranışı Yaklaşımı ile Çözümü” başlıklı UHUK 2020 Kongresini 046 numaralı tebliğinin tamamlayıcı parçasıdır. Kullanılan matematiğin üretim süreçlerini içerir. Tebliğ metninin sürekliliğini, bütünlüğünü bozmamak için matematiksel gelişmeler bu EK’te verilmiştir. C. ÇIRAY.

## İÇİNDEKİLER.

I: GENEL.

II: OYOF’nun SABİTLERİ.

III: ÇÖZÜMDE KULLANILAN DENKLEMLER.

1: DENKLEMLERİN SAYISAL HALLERİ..

2: SAYISAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN BALATILMASI.

3: “k”nın  $u = \frac{d\omega}{dk}$  YARDIMI İLE BULUNMASI.

## I.GENEL.

## I.1. TANIMLAR VE SİMGELER.:

 $\bar{U}$  ; Anıl hız ; $u$  : Salınım hızı $\bar{U}$  : Ortalama hız (zamansal), $u' = \bar{u}^{1/2}$ 

$$U = \bar{U} + u = \bar{U} \left( 1 + \frac{u}{\bar{U}} \frac{u'}{\bar{U}} \right) = \bar{U} (1 + xI) = \bar{U} y \quad ; \quad y = \frac{U}{\bar{U}} \quad ; \quad x = \frac{u}{\bar{U}}$$

$$y = 1 + Ix \quad ; \quad I = \frac{u'}{\bar{U}}$$

$P(y)$  : OYof, tanımlanmış bir fonksiyon.

$G(f)$  :  $u'^2$  ile normalize edilmiş TükES fonksiyonu. Deney sonucu elde edilmiş sayısal veridir.

$\omega$  : Dairesel frekans.  $\omega = 2\pi f$ .  $f$  : Doğal frekans (1/s veya hertz).

$\mu^k$  : "U"nın " $k$ " nıncı momenti :  $\mu^k = \frac{1}{\bar{U}^k} \int_{-\infty}^{\infty} P(y) U^k dy$

## I.2. OYof'nun ÖZELLİKLERİ VE SONUÇLARI.

$$(1): \int_{-\infty}^{\infty} P(y) dy = 1 \quad \therefore \quad (1A): \int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = \frac{1}{I}$$

$$(2): \int_{-\infty}^{\infty} P(y) U dy = \bar{U} \quad \therefore \quad (3): \int_{-\infty}^{\infty} P(y) y dy = 1$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} P(y) U dy = \int_{-\infty}^{\infty} P(y) (\bar{U} + u) dy = \bar{U} \int_{-\infty}^{\infty} P(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} P(y) u dy = \bar{U}$$

$$\therefore \bar{U} + \int_{-\infty}^{\infty} P(y) u dy = \bar{U} \quad \text{O halde:}$$

$$(4): \int_{-\infty}^{\infty} P(y) u dy = 0 \quad \text{ve} \quad (5): \int_{-\infty}^{\infty} P(1 + Ix) u dx = 0. \quad \text{Ayrıca:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(y) U^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} P(y) (\bar{U} + u)^2 dy = \bar{U}^2 \int_{-\infty}^{\infty} P(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} P(y) u^2 dy = \bar{U}^2 + u'^2. \quad \text{O halde:}$$

$$(6) \quad \mu^2 = 1 + I^2$$

## II. OYof'nun SABİTLERİ.

### II. 1. OYof'nun İFADESİ.

$$(7) \quad P(y) = P(1) y^n \exp\{A^n (1 - y^n)\} \quad \text{dir.}$$

Burada  $P(1)$  ve “ $A$ ” sabitlerdir ve OYOF’nun sağlaması gereken standart özelliklerden hareket edilerek bulunur. Üçüncü sabit “ $n$ ” her TEST için ayrıca (6) yardımı ile hesaplanır.

(7) ifadesi yeniden yazılsın:

$$(8) \quad P(y) = Cy^n \exp(-A^n y^n)$$

Demek ki:

$$(9) \quad C = P(1)\exp(A^n) \quad \text{dir. O halde:}$$

$$(10) \quad P(y) = C\varphi(y) \quad \text{olup}$$

$$(11) \quad \varphi(y) = y^n \exp(-A^n y^n) \quad \text{dir.}$$

## II. 2. $P(1)$ HESABI.

(1) Koşulunun sağlanması için:

$$(12) \quad C = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy} \quad \text{olmalıdır.}$$

### II. 2. 1. (12) ifadesindeki integralin hesabı:

$$y^n = q.$$

tansformasyonunu yapalım. O halde:

$$(13) \quad dy = \frac{1}{n} \frac{q^{\frac{1}{n}}}{q} dq \quad \text{ve:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^n \exp(-A^n y^n) dy = \int_{-\infty}^{\infty} q \exp(-A^n q) \frac{1}{n} \frac{q^{\frac{1}{n}}}{q} dq \quad \text{veya:}$$

$$(14) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{n}} \exp(-A^n q) dq \quad \text{olur.}$$



Bu eşitliğin sağ yanı "Handbook of Mathematical Functions, edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun, a Dover publication." da verilen Gama fonksiyonunun tanımı ile benzerlik taşır. Kitabın 255'inci sayfasında 6.1.1 formülü:

$$(6.1.1) \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-kt) dt \quad \text{dir.}$$

İki integralin alt limitleri aynı değildir. Ama izleyen koşul nedeni ile bu bir problem yaraymaz.

Çünkü:  $y \geq 0$  dir.

Dolayısı ile:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy = \int_0^{\infty} \varphi(y) dy \quad \text{olur}$$

İzleyen tabloda, iki ifadede birbirlerine karşıt gelen sembolleri gösterilmiştir.

(6.1.1)

(14)

$t \rightarrow$

$q$

$k \rightarrow$

$A^n$

$z-1 \rightarrow$

$\frac{1}{n}$

$\rightarrow$

$z = \frac{n+1}{n}$

O halde:

$$n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy = (A^n)^{-\frac{n+1}{n}} \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

veya:

(15)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy = \frac{1}{n} A^{-(n+1)} \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

yazılır.

(1) koşulu veya (12), sonuça:

$$(16) \quad C = \frac{nA^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)} \quad \text{olur}$$

Ve (9) yardımı ile:

$$(17) \quad P(1) = \frac{nA^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right) \exp(A^n)} \quad \text{bulunır.}$$

Dolayısı ile:

$$(18) \quad P(y) = \frac{nA^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)} y^n \exp(-A^n y^n) \quad \text{olur.}$$

(1A) koşulu kullanılarak aynı hesap tarzı tekrar edilirse,  $y = 1 + Ix$  olmak üzere:

$$(19) \quad P(x) = I \frac{nA^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)} y^n \exp(-A^n y^n) \quad \text{dir.}$$

### II. 3. “A” SABİTİNİN HESABI.

(3) koşulu (8) ile beraber kullanılır:

$$(20) \quad C \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) y dy = C \int_{-\infty}^{\infty} y^{n+1} \exp(-A^n y^n) dy = 1$$

Ortadaki integral II. 2. 1’ de (14) ‘ün elde edilişi için yapılan işlem tekrarlanır. Ancak:

$$z = \frac{n+2}{n} \quad \text{dir. (20) ifadesi:}$$

$$C \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{n+2}{n}\right) \frac{1}{A^{n+2}} = 1 \quad \text{olur.}$$

(16) yardımı ile:

$$\frac{nA^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)} \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{n+2}{n}\right) \frac{1}{A^{n+2}} = 1, \quad \text{yazılırsa}$$

sonuçta:

$$(21) \quad A = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)} \quad \text{elde edilir.}$$

#### II. 4. “ $\mu^k$ ” PARAMETRESİNİN HESABI.

Tanım ve (8) yardımı ile:  $\mu^k = \frac{1}{U^k} \int_{-\infty}^{\infty} P(y) U^k dy = \int_{-\infty}^{\infty} P(y) y^k dy = C \int_{-\infty}^{\infty} y^n \exp(-A^n y^n) y^k dy$

$$(22) \quad \mu^k = C \int_{-\infty}^{\infty} y^{n+k} \exp(-A^n y^n) dy \quad \text{elde edilir.}$$

(22) entegrali II. 2 düzeninde hesaplanır.

$$y^n = q \quad \text{and} \quad dy = \frac{1}{n} \frac{q^{\frac{1}{n}}}{q} dq.$$

$$(23) \quad \mu^k = \frac{C}{n} \int_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{1+k}{n}} \exp(-A^n q) dq$$

6.1.1 ile karşılık:

$$6.1.1 \quad (23)$$

$$t \rightarrow q$$

$$z-1 \rightarrow \frac{1+k}{n} \rightarrow z = \frac{n+k+1}{n}$$

$$k A^n \rightarrow k^{-z} = A^{-(n+k+1)}$$

(23)ün yeni şekli:

$$(24) \quad \mu^{\kappa} = \frac{C}{n} A^{-(n+\kappa+1)} \Gamma\left(\frac{n+\kappa+1}{n}\right)$$

(21) ifadesi (24), 'e aktarılırsa, sonuçta:

$$(25) \quad \mu^{\kappa} = \frac{\left[ \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right) \right]^{\kappa-1} \Gamma\left(\frac{n+\kappa+1}{n}\right)}{\left[ \Gamma\left(\frac{n+2}{n}\right) \right]^{\kappa}} \quad \text{elde edilir.}$$

### III: KULLANILAN DENKLEMLER.

#### III 1. KULLANILAN DENKLEMLERİN SAYISAL HALİ.

U(f) fonksiyonunu bulmak için kullanılan yönetici denklem:

$$(26) \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(x) u^2 dx = u'^2 \int_0^{\infty} G(f) df \quad \text{veya} \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(x) x^2 dx = \int_0^{\infty} G(f) df \quad \text{dir.}$$

Anlaşılabacağı gibi “f” bandında “df” aralığındaki türbülans kinetik enerjisine katkıda bulunan

“ $\mp u$ ” hızlarının olasılıkları genelde farklıdır. Dolayısı ile P(x) simetrik seçilmemiştir. O halde OYOF'nun sağ ve sol ayakları ayrı ayrı hesaplanır. Sağ ayakta “ $x_i$ ” ile “ $x_{i+1}$ ” ve sol ayakta “ $-x_i$ ” ile “ $-x_{i-1}$ ” dar aralıkları için (26)dan izleyen denklemi yazmak mümkündür:

$$(27) \quad \int_{-x_i}^{-x_{i-1}} P_L(\xi) \xi^2 d\xi + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_R(\xi) \xi^2 d\xi = \int_{f_i}^{f_{i+1}} G(\eta) d\eta$$

Bu denklemin sayısal hali:

$$(28) \quad \left[ P_L(-x_{i-1})(x_{i-1})^2 + P_L(-x_i)x_i^2 \right] \frac{-x_{i-1} - (-x_i)}{2} + \\ + \left[ P_R(x_{i+1})(x_{i+1})^2 + P_R(x_i)x_i^2 \right] \frac{x_{i+1} - x_i}{2} = \Delta G(f_i; f_{i+1}) \quad \text{dir.}$$

Birinci mertebeden açılımlar:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_{i+1} \quad ; \quad P_R(x_{i+1}) = P_R(x_i) + \frac{dP_R(x_i)}{dx} \Delta x_{i+1} + \dots$$

$$-x_{i-1} = -x_i - \Delta x_{i+1} \quad ; \quad P_L(-x_{i-1}) = P_L(-x_i) - \frac{dP_L(-x_i)}{dx} \Delta x_{i+1} + \dots$$

(28) denkleminde kullanılırsa:

$$(29) \quad \left\{ \left[ P_L(-x_i) - \frac{dP_L(-x_i)}{dx} \Delta x_{i+1} \right] (-x_i - \Delta x_{i+1})^2 + P_L(-x_i) x_i^2 \right\} \frac{\Delta x_{i+1}}{2} +$$

$$+ \left\{ \left[ P_R(x_i) + \frac{dP_R(x_i)}{dx} \Delta x_{i+1} \right] (x_i + \Delta x_{i+1})^2 + P_R(x_i) x_i^2 \right\} \frac{\Delta x_{i+1}}{2} = \Delta G(f_i; f_{i+1}) \quad .$$

elde edilir. (29)da " $\Delta x_{i+1}$ " in en fazla ikinci dereceden olan terimleri muhafaza edilirse,

$$(30) \quad C_1 \Delta x_{i+1}^2 + C_2 \Delta x_{i+1} = \Delta G(f_i, f_{i+1}) \quad \text{yazılabilir. Burada}$$

$$(30a) \quad C_1 = x_i [P_L(-x_i) + P_R(x_i)] + \frac{1}{2} x_i^2 \left[ -\frac{dP_L}{dx} \Big|_{-x_i} + \frac{dP_R}{dx} \Big|_{x_i} \right]$$

$$(30b) \quad C_2 = x_i^2 [P_L(-x_i) + P_R(x_i)] \quad \text{dir.}$$

(30) denkleminde "Kullanılan Denklem"dir.

### III. 2. "KULLANILAN DENKLEMLER"İN HESAPLANMASI SÜRECİNDE "İLK DEĞERLER.

#### III. 2. 1. " $x_1$ " değerinin bulunması. :

Başlangıçta  $x_0 = 0$  ve "OYoF"nın değerleri:  $P_L(0) = P_R(0) = P(1)$  dir.

" $x_0$ " civarında iyi bir yakınsaklıkla:

$$\int_0^{x_1} 2P(1)x^2 dx = \Delta G(0;1)$$

yazılabilir. O halde: ,

$$(31) \quad x_1 = \left( \frac{3}{2} \frac{\Delta G(0;1)}{P(1)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{olur.}$$

Herhangi bir  $x_{i+1}$  değeri  $x_i$  bilidiğine göre  $x_{i+1} = x_i + \Delta x_{i+1}$  ve (30) yardımı ile bulunur.

Sonuçta izleyen bağıntı formunda sayısal değerler elde edilir.:

$$(32) \quad x = x(f)$$

**II. 2. 1.** “ $k_1$ ”in hesabı.

$$(33) \quad u = \frac{df}{dk} \quad \text{bilinmektedir. O halde:}$$

$$(34) \quad \int_0^f \frac{df}{u} = \frac{1}{u'} \int_0^f \frac{df}{x} \quad \text{dir.}$$

“ $x$ ” değerlerinin sayısal olarak bilinmesi halinde izleyen ifade ile “ $k(f)$ ” bulunabilir.

$$(35) \quad k(f) = \frac{1}{u'} \left[ \int_0^1 \frac{df}{x} + \int_1^f \frac{df}{x} \right] = k(1) + \frac{1}{u'} \int_1^f \frac{df}{x}$$

“ $k(1)$ ” ilk değer olarak bulmak için,  $x(f)$  üssel bir fonksiyon olarak ifade edilir.

$$(36) \quad x = x_b \left( \frac{f}{f_b} \right)^B \quad \text{veya} \quad x = M f^B$$

Bu ifadede “ $B$ ”, “ $x_b$ ” ve “ $f_b$ ” (32) fonksiyonunun ilk üç noktasına ait değerlerden hesaplanabilir.

(36) kullanılırsa (35) den  $k(1)$  bulunur:

$$(37) \quad k(1) = \frac{1}{u'} \frac{f_b^B}{x_b} \int_0^{f_1} \frac{df}{f^B}$$

Sonuç:

$$(38) \quad k(1) = \frac{1}{u'} \left( \frac{f_b}{f_1} \right)^B \frac{f_1}{1-B} = \frac{1}{u'} \frac{1}{M} \frac{f_1^{1-B}}{1-B} \quad \text{dir.}$$

(32)'deki değerler ve (35) sağ yanındaki son ifadesi yardımı ile elde edilen (39) veya (40) dan  $K(f_i)$  hesaplanabilir.

$$(39) \quad k(f_i) = \frac{1}{u'} \left( \frac{f_b}{f_1} \right)^B \frac{f_1}{1-B} + \frac{2}{u'} \sum_{j=2}^i \frac{f_j - f_{j-1}}{x_j + x_{j-1}}$$

$$(40) \quad k(f_i) = \frac{1}{u'} \left[ \left( \frac{f_b}{f_1} \right)^B \frac{f_1}{1-B} + 2 \sum_{j=2}^i \frac{f_j - f_{j-1}}{x_j + x_{j-1}} \right].$$


---